
C 364672

ANNALES

DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.



ANNALES

DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

PUBLIÉES

PAR U.-J. LE VERRIER,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

TOME CINQUIÈME.

PARIS,

MALLET-BACHELIER,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

—

1859

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME CINQUIÈME.

RECHERCHES ASTRONOMIQUES (Suite) [*],

Par U.-J. LE VERRIER.

CHAPITRE XV. — *Théorie et Tables du mouvement de Mercure.*

[*] *Voir* les tomes I, II, III et IV.

ADDITION.

MÉMOIRE SUR LA CONSTRUCTION DES TÉLESCOPES EN VERRE ARGENTÉ; PAR LÉON FOUCAULT.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ; PAR J.-A. SERRET.

RECHERCHES SUR LES ATMOSPHÈRES DES COMÈTES;

PAR ÉDOUARD ROCHE.

ANNALES

DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS.

RECHERCHES ASTRONOMIQUES (SUITE) [*].

PAR U.-J. LE VERRIER.

CHAPITRE XV.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE MERCURE.

> Adeò ut cœlestis hic Mercurius non minùs Astronomos torserit, quàm terrestris Alchimistas eludat.
>
> (RICCIOLI, *Almagest. nov.* Lib. VII, sect. III, cap. 1.)

Nulle planète n'a demandé aux astronomes plus de soins et de peines que Mercure, et ne leur a donné en récompense tant d'inquiétudes, tant de contrariétés. En les comparant à celles dont le mercure terrestre était la source pour les alchimistes, Riccioli n'a fait qu'émettre l'opinion de tous les astronomes de son temps, celle de ses prédécesseurs, et de Mœstlinus en particulier. Les astronomes qui, depuis Mœstlinus et Riccioli, ont eu le malheur de s'attacher à la théorie de Mercure, Lalande entre autres, ont dû plus d'une fois se ranger à leurs avis.

L'immense difficulté que Mercure a présentée aux anciens astronomes, venait surtout de ce que la planète, plongée durant le jour dans les rayons du Soleil, ne pouvait être vue que le soir ou le matin dans les vapeurs de l'horizon; en sorte qu'avant l'invention et le perfectionnement des lunettes, il était impossible de l'observer hors de ses élongations. Copernic, empêché par les brouillards de la Vistule, et par la longue durée des crépuscules en été, ne put jamais parvenir à

---

[*] *Voir* les Tomes I, II, III et IV.

apercevoir Mercure. L'astronome Schoner est cité pour avoir fait à Nuremberg quelques observations de Mercure.

On n'avait donc sur cette planète qu'un petit nombre de données fort peu précises, pour arriver à la détermination d'une orbite très-excentrique. Il n'en résulta pas cependant de grands inconvénients jusqu'en l'année 1631. Les Tables et les observations, avant cette époque, étant également mauvaises, le tout pouvait marcher ensemble, dans les mêmes limites d'erreur. Mais lorsque, après avoir construit ses Tables Rudolphines, Képler annonça, en 1627, un passage de Mercure sur le Soleil pour le 7 novembre 1631, il comprit facilement qu'on allait se trouver désormais dans un grand embarras : qu'on serait obligé de prédire des phénomènes, susceptibles d'être observés avec la plus grande précision, en se fondant sur des Tables très-défectueuses. Et cet immortel auteur n'osa pas assurer que son calcul pût représenter le lieu de Mercure, dans ses conjonctions, avec une précision de plus d'un jour.

Képler mourut en 1631, quelques jours avant l'époque qu'il avait fixée pour le passage de Vénus sur le Soleil. Ce passage n'eut pas lieu. Mais celui de Mercure arriva comme il avait été prédit, et fut aperçu en plusieurs points de l'Europe. Gassendi l'observa à la chambre obscure. Lorsque, le 7 novembre au matin, les nuages vinrent à se dissiper, Gassendi remarqua sur l'image du Soleil un point noir, très-net, qu'il prit pour une tache solaire. On attribuait alors à Mercure un diamètre de trois minutes, tandis que la tache avait un diamètre à peine sensible. Gassendi la compara aux bords du Soleil, dans l'intention de lui rapporter ensuite la position de Mercure s'il venait à paraitre sur le disque du Soleil. Plusieurs fois, à différents intervalles, il reprit cette mesure ; et ce fut en voyant que la prétendue tache avait un mouvement propre très-rapide, qu'il comprit enfin que Mercure était sous ses yeux. Gassendi écrivit à Schickard pour lui rendre compte de son observation. « Plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques, » occupés à chercher *Mercurium in Sole* (c'est-à-dire la pierre philosophale), je l'ai » trouvé, je l'ai contemplé là où personne avant moi ne l'avait vu. »

L'observation de Gassendi apprit que les Tables de Ptolémée étaient en erreur de 4° 25'; les Tables prussiennes de Reinhold de 5 degrés ; celles de Longomontanus de 7°13'; celles de Lansberg de 1° 21'; enfin, les Tables Rudolphines de 14' 24".

A l'occasion du passage de 1651, Skakerlœus entreprit un voyage aux Grandes Indes, qui n'a servi à rien. Halley fut plus heureux ; et, en 1677, il fit à Sainte-Hélène la première observation complète d'un passage de Mercure sur le Soleil.

Hévélius observa avec soin le passage de 1661. Cependant Cassini fils, pour expliquer les erreurs des Tables de son père, s'en prit à l'emploi de l'observation d'Hévélius.

Lahire, dont les Tables paraissaient exactes, suivant des observations méri-

diennes, prédit, pour le 5 mai 1707, un passage de Mercure sur le Soleil, visible à Paris. Le 5 mai, le Soleil se lève dans tout son éclat, fournit sa course entière sans que le plus petit nuage l'obscurcisse, et Mercure ne paraît pas sur son disque. Le passage eut lieu dans la nuit, et fut entrevu, le 6 au matin, par Rœmer, à Copenhague.

Le 8 mai 1720, de Lisle attendit vainement un passage indiqué par les éphémérides, et qui n'eut pas lieu.

Lors du passage de 1753, Lalande alla observer à Meudon, afin de procurer à Louis XV la satisfaction de voir Mercure sur le Soleil. Les Tables de Lahire indiquaient l'entrée sur le disque du Soleil pour le 5 mai au soir; celles de Halley pour le 6 mai, à $6^h \frac{1}{2}$ du matin. Elle eut réellement lieu le 6 à $2^h \frac{1}{2}$ du matin.

Après un grand nombre d'essais infructueux sur la théorie de Mercure, Lalande se décide à apprendre le grec, afin de discuter de nouveau les observations qui nous ont été transmises dans l'*Almageste*. Il espère enfin n'avoir plus qu'à jouir du fruit de ses longs travaux, lorsque le passage du 4 mai 1786 vient durement lui apprendre que Mercure est bien toujours cette planète qui n'est propre qu'à décrier la réputation des astronomes.

« Au lever du Soleil, dit Delambre, il pleuvait; tous les astronomes de Paris » étaient à leurs lunettes; mais, fatigués d'attendre, ils quittèrent leur poste une » demi-heure après le moment de la sortie calculée, ne conservant plus aucune » espérance..... Je pris le parti d'attendre jusqu'après le moment indiqué par les » Tables de Halley; mais je n'eus pas besoin de tant de constance : l'observation » arriva plus tard de trois quarts d'heure (53 minutes) que suivant Lalande, mais » trois quarts d'heure plus tôt que suivant Halley. Lemonnier et Pingré, La» lande et son neveu, Méchain, Cassini et ses trois adjoints, trompés par l'an» nonce, avaient tous manqué l'observation. Je leur montrai la mienne le soir » même; ils ne voulaient presque pas y croire. Ce fut la première observation » que j'eus l'occasion de porter à l'Académie des Sciences, et c'est de là que je » date ma carrière d'astronome observateur. »

Lalande toutefois ne se rebuta pas, et il eut la satisfaction de prédire les passages de 1789, 1799 et 1802, avec plus d'exactitude.

M. de Lindenau s'est occupé de Mercure en 1813. Mais cet astronome ne me paraît pas avoir été heureux dans ses recherches. Un peu de soin l'aurait garanti des fautes nombreuses qu'on y rencontre.

La théorie de Mercure peut être reprise avec avantage, aujourd'hui qu'on dispose de nombreuses observations des passages de la planète sur le Soleil, d'Observations méridiennes précises, et de Tables du Soleil fort exactes. Je me suis déjà occupé de ce sujet dans un Mémoire publié en 1842. Mais, malgré le soin

que j'avais alors donné à mon travail, j'ai cru devoir le reprendre et le refondre en grande partie.

Il était devenu nécessaire de tenir compte des changements que j'ai apportés (Chapitre XIV) à la théorie du Soleil, et par suite aux coordonnées de cet astre, qui servent à passer des positions héliocentriques de Mercure à ses positions géocentriques. Pour atténuer l'inconvénient résultant du défaut de Tables du Soleil parfaitement précises, j'avais, il est vrai, dans mon premier travail, emprunté les longitudes du Soleil, nécessaires à la discussion des observations méridiennes de Mercure, non aux Tables connues, mais bien au même système d'observations qui me fournissait les positions de la planète. Mais, outre que la distance de la Terre au Soleil n'avait pu être corrigée de la même manière, la rectification de la longitude du Soleil pouvait laisser à désirer, à cause surtout des erreurs systématiques qui affectent les observations du Soleil faites à l'instrument des passages, erreurs dont nous avons traité avec un soin particulier dans le Chapitre XIV.

D'une autre part, je n'avais pu éviter de recourir exclusivement aux Tables en usage, pour discuter les anciens passages de la planète sur le Soleil : et cette cause d'erreurs était plus grave que les précédentes. Car, s'il est à croire que les erreurs des distances de la Terre au Soleil, et les incertitudes de la longitude de ce dernier astre, dues aux erreurs personnelles des observateurs, se soient compensées dans la discussion d'un grand nombre d'observations méridiennes faites dans toutes les positions de Mercure et de la Terre dans leurs orbites, il est au contraire certain que les incertitudes des Tables du Soleil auront influé systématiquement sur la discussion des observations des passages. L'erreur de la longitude moyenne du Soleil varie en effet progressivement et toujours dans le même sens : les erreurs de l'excentricité de l'orbite et de la position du périgée influent d'une manière uniforme sur la discussion de phénomènes qui se reproduisent dans le voisinage de deux positions de la Terre distantes de 180 degrés.

J'ai d'ailleurs profité de ces circonstances pour reprendre en entier le calcul des perturbations de l'orbite de Mercure, et le mettre en harmonie, soit pour le fond, soit pour la forme, avec les méthodes développées dans les volumes précédents. Une plus grande précision a été atteinte.

Enfin je suivrai, dans l'exposition de la présente Théorie de Mercure, le même ordre que dans la Théorie du mouvement apparent du Soleil (Chap. XIV). Après avoir déterminé les perturbations et réuni les formules qui représentent les coordonnées de la planète, je discuterai les observations dont nous aurons à faire usage. La comparaison de ces observations avec la théorie conduira à la rectification des valeurs adoptées pour les éléments qui entrent dans les formules. Je terminerai par les Tables nécessaires au calcul des lieux de la planète.

SECTION PREMIÈRE.

DU MOUVEMENT HÉLIOCENTRIQUE DE MERCURE ET DE SES INÉGALITÉS.

Les parties proportionnelles au temps des variations séculaires de l'inclinaison et de la longitude du nœud, de l'excentricité et de la longitude du périhélie ont été considérées dans le Chapitre IX (Tome II), auquel nous emprunterons les formules qui les représentent. Il nous reste à calculer les termes proportionnels au carré du temps, ainsi que les perturbations périodiques des éléments, de la longitude, de la latitude et du rayon vecteur.

Perturbations des éléments de l'orbite de Mercure, dépendant des premières puissances des masses.

Nous avons, dans le Chapitre XIV (Tome IV, page 3), donné une idée précise de la méthode qui a été employée dans le calcul des perturbations, en considérant l'action de Mars sur la Terre. La même marche a été suivie pour déterminer les perturbations produites sur Mercure par chacune des planètes. Nous pourrons donc nous borner ici à en présenter les résultats.

Les valeurs des transcendantes $a' A^{(i)}$, $a' A^{(i)}$,..., et de leurs dérivées, qui ont servi dans la détermination des perturbations de Mercure par les diverses planètes (Chapitre IV, Tome Ier), sont présentées dans une ADDITION, à la suite du présent Chapitre.

Au moyen de ces nombres, et en recourant aux formules du Chapitre IV, on a calculé les coefficients des divers termes des fonctions perturbatrices provenant de l'action de chacune des planètes sur Mercure. On en trouvera l'expression dans la seconde partie de l'ADDITION. Ces fonctions donneraient lieu à des remarques analogues à celles qui ont été présentées dans le Chapitre XIV.

La même partie de l'ADDITION comprend les coefficients des intégrales $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{L}_1$, A_1, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{T}_1$ dont dépendent les perturbations des éléments de l'orbite de Mercure. Les termes des diverses fonctions, et qui ont même argument qu'un terme de $a' R_1$, sont tous placés sur la même ligne horizontale que ce terme. Quatre de ces fonctions, savoir $\mathcal{N}_1$, A_1, $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{G}_1$ dépendent des sinus des arguments; ce sont celles qui sont relatives aux perturbations des longitudes de l'époque moyenne, du périhélie et du nœud. Les trois autres fonctions, savoir $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{T}_1$, relatives aux perturbations du grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison, dépendent des cosinus des arguments.

Cela posé, les perturbations périodiques des éléments sont données par les formules (15) du Chapitre VI, Tome II, page 29. En y mettant pour a et ψ leurs va-

leurs (Chapitre VII), et considérant que les perturbations du plan de l'orbite sont extrêmement petites, on a, avec une exactitude suffisante,

$$\begin{aligned}
\delta a &= \mathfrak{L}_1,\\
\delta e &= \mathfrak{P}_1 - 0{,}131\,\delta a,\\
e\delta\varpi &= \mathfrak{I}_1,\\
\delta l &= \Lambda_1 + \mathcal{A}_1 + 0{,}1039\,e\delta\varpi,\\
\sin\gamma\delta\tau &= \mathcal{G}_1,\\
\delta\gamma &= \mathfrak{E}_1;
\end{aligned}$$

a est le demi-grand axe, e l'excentricité. La longitude ϖ du périhélie, et la longitude moyenne l, sont comptées de l'équinoxe de 1850. Les deux dernières formules font connaître les perturbations du plan de l'orbite de Mercure par rapport au plan primitif de l'orbite de la planète troublante.

Avant de réunir les résultats ainsi obtenus, rappelons que les termes de la fonction perturbatrice qui ne renferment pas le temps explicitement, produisent dans $\mathcal{A}_1$ des parties proportionnelles au temps; or, en désignant par σt la partie correspondante qui en résulte dans δl, il est nécessaire d'appliquer au demi-grand axe la correction $\frac{2}{3}a\frac{\sigma}{n}$. J'ai trouvé

Action de Vénus........	$\sigma = -3'',3282$	$\delta a = -0'',033$
Action de la Terre......	$\sigma = -1,1002$	$\delta a = -0,011$
Action de Mars.........	$\sigma = -0,0381$	$\delta a = -0,000$
Action de Jupiter.......	$\sigma = -2,2034$	$\delta a = -0,022$
Action de Saturne.......	$\sigma = -0,1067$	$\delta a = -0,001$
Totaux.........	$\sigma = -6,7766$	$\delta a = -0,067$

Conformément à cet exposé, nous avons obtenu l'ensemble des formules suivantes dans lesquelles on a supposé que les valeurs reçues pour les masses de Vénus, la Terre,.... auraient besoin, pour devenir rigoureuses, d'être multipliées par les facteurs $1 + \nu'$, $1 + \nu''$,....

Perturbations non périodiques des éléments de l'orbite de Mercure.

Constante du demi-grand axe.

$$\delta a = -0'',067 - 0'',033\,\nu' - 0'',011\,\nu'' - 0'',022\,\nu^{\text{iv}} - 0'',001\,\nu^{\text{v}}.$$

Variations annuelles des éléments.

Nous les empruntons au Chapitre IX, Tome II, page 100, où nous trouvons :

$$\delta e = +0'',041\,88 + 0'',028\,23\nu' + 0'',010\,62\nu'' - 0'',000\,69\nu'''$$
$$+ 0,003\,19\nu^{\text{IV}} + 0,000\,53\nu^{\text{V}} + 0,000\,00\nu^{\text{VI}} + 0'',000\,00\nu^{\text{VII}},$$

$$e\delta\varpi = +1,083\,86 + 0,577\,04\nu' + 0,171\,91\nu'' + 0,005\,87\nu'''$$
$$+ 0,313\,75\nu^{\text{IV}} + 0,014\,89\nu^{\text{V}} + 0,000\,28\nu^{\text{VI}} + 0,000\,12\nu^{\text{VII}},$$

$$\delta p = -0,537\,01 - 0,277\,28\nu' - 0,087\,60\nu'' - 0,002\,13\nu'''$$
$$- 0,160\,84\nu^{\text{IV}} - 0,008\,98\nu^{\text{V}} - 0,000\,12\nu^{\text{VI}} - 0,000\,06\nu^{\text{VII}},$$

$$\delta q = +0,246\,59 + 0,070\,67\nu' + 0,073\,25\nu'' + 0,001\,73\nu'''$$
$$+ 0,097\,52\nu^{\text{IV}} + 0,003\,28\nu^{\text{V}} + 0,000\,10\nu^{\text{VI}} + 0,000\,04\nu^{\text{VII}}.$$

Ces formules donnent les mouvements des éléments de l'orbite de Mercure, par rapport à l'écliptique et à l'équinoxe de 1850. Les variables p et q sont, comme on le sait, liées à l'inclinaison φ et à la longitude θ du nœud ascendant par la relation :

$$p = \text{tang}\,\varphi \sin\theta,$$
$$q = \text{tang}\,\varphi \cos\theta.$$

Perturbations périodiques des éléments.

Soient

$$\delta a = \sum \text{A} \cos \mathcal{A}, \qquad \delta l = \sum \text{L} \sin \mathcal{A},$$
$$\delta e = \sum \text{E} \cos \mathcal{A}, \qquad e\delta\varpi = \sum \text{P} \sin \mathcal{A},$$
$$\delta\gamma = \sum \text{G} \cos \mathcal{A}, \qquad \sin\gamma\,\delta\tau = \sum \text{T} \sin \mathcal{A};$$

formules dans lesquelles γ et τ sont rapportées successivement à chacune des planètes perturbatrices que l'on considère ; γ représente l'inclinaison mutuelle de m, planète troublée, et m' planète troublante ; τ est la longitude du nœud ascendant de m sur m', τ' la longitude du nœud descendant de m' sur m. On a d'ailleurs, en raison de l'usage suivant lequel les longitudes sont comptées,

$$\tau' - \tau = \frac{1}{\sin\gamma}(qp' - pq'),$$

et l'on a posé

$$\lambda = l + \tau' - \tau,$$
$$\omega = \varpi + \tau' - \tau.$$

Les valeurs des coefficients A et L, E et P, G et T sont présentées dans les tableaux suivants, pour chacune des valeurs de l'angle $\mathcal{A}$. Pour simplifier, on n'a, dans ces tableaux, appliqué qu'un accent aux éléments de la planète perturbatrice, quel que soit son rang.

$\mathcal{A}$	A	L	E	P	G	T
			ACTION DE VÉNUS.			
$l' - \lambda$	+ 0″,025	+ 0″,428	− 0″,003	− 0″,041		+ 0″,019
$2l' - 2\lambda$	+ 0,079	+ 0,505	− 0,010	+ 0,042		+ 0,010
$3l' - 3\lambda$	+ 0,031	+ 0,158	− 0,004	+ 0,035		
$4l' - 4\lambda$	+ 0,010	+ 0,050		+ 0,024		
$5l' - 5\lambda$		+ 0,013		+ 0,015		
$6l' - 6\lambda$				+ 0,009		
$7l' - 7\lambda$				+ 0,005		
$-5l' + 6\lambda - \omega$		− 0,010				
$-4l' + 5\lambda - \omega$	+ 0,006	− 0,020	+ 0,006			
$-3l' + 4\lambda - \omega$	+ 0,009	− 0,030	+ 0,013	+ 0,006		
$-2l' + 3\lambda - \omega$	+ 0,012	− 0,038	+ 0,023	+ 0,018		
$-l' + 2\lambda - \omega$		− 0,010	− 0,009	− 0,009		
$\lambda - \omega$	− 0,012	+ 0,097	− 0,054	− 0,056		+ 0,006
$+l' - \omega$		+ 0,202	− 0,141	− 0,158		+ 0,019
$2l' - \lambda - \omega$	− 0,157	− 3,661	+ 0,972	+ 0,937		− 0,045
$3l' - 2\lambda - \omega$	− 0,055	− 0,462	+ 0,165	+ 0,139		− 0,010
$4l' - 3\lambda - \omega$	− 0,029	− 0,163	+ 0,056	+ 0,035		
$5l' - 4\lambda - \omega$	− 0,017	− 0,066	+ 0,020	+ 0,006		
$6l' - 5\lambda - \omega$	− 0,009	− 0,033	+ 0,013	− 0,002		
$7l' - 6\lambda - \omega$		− 0,014	+ 0,006	− 0,004		
$l' - \varpi'$		− 0,008				
$2l' - \lambda - \varpi'$		+ 0,041				
$3l' - 2\lambda - \varpi'$		+ 0,025				
$4l' - 3\lambda - \varpi'$		+ 0,010				
$5l' - 4\lambda - \varpi'$		+ 0,004				
$\lambda + \omega - 2\tau'$					− 0″,007	− 0,007
$l' + \omega - 2\tau'$					− 0,013	− 0,013
$2l' - \lambda + \omega - 2\tau'$		− 0,012			+ 0,014	+ 0,014
$-2l' + 4\lambda - 2\omega$			+ 0,007	+ 0,007		
$+l' + \lambda - 2\omega$		− 0,012	+ 0,011	+ 0,011		
$2l' - 2\omega$		− 0,050	+ 0,104	+ 0,104		
$3l' - \lambda - 2\omega$	− 0,045	+ 0,623	+ 0,552	+ 0,536		− 0,021
$4l' - 2\lambda - 2\omega$	+ 0,033	+ 0,440	− 0,194	− 0,179		+ 0,009
$5l' - 3\lambda - 2\omega$	+ 0,016	+ 0,115	− 0,059	− 0,050		
$6l' - 4\lambda - 2\omega$	+ 0,010	+ 0,054	− 0,025	− 0,018		
$7l' - 5\lambda - 2\omega$	+ 0,006	+ 0,027	− 0,016	− 0,006		
$8l' - 6\lambda - 2\omega$		+ 0,011	− 0,008			

ACTION DE VÉNUS (SUITE).

[illegible]	A	L	E	P	G	T
$9l' - 7\lambda - 2\omega$		+ 0″,005				
$3l' - \lambda - \varpi' - \omega$		− 0,080	− 0″,031	− 0″,031		
$4l' - 2\lambda - \varpi' - \omega$		− 0,049	+ 0,011	+ 0,011		
$5l' - 3\lambda - \varpi' - \omega$		− 0,014				
$2l' - 2\tau'$					+ 0″,011	+ 0″,011
$3l' - \lambda - 2\tau'$		+ 0,010			+ 0,039	+ 0,039
$4l' - 2\lambda - 2\tau'$					− 0,008	− 0,008
$3l' - 3\omega$		+ 0,008	− 0,018	− 0,018		
$4l' - \lambda - 3\omega$		+ 0,011	− 0,057	− 0,057		
$5l' - 2\lambda - 3\omega$	− 0″,091	− 8,239	+ 0,790	+ 0,751		− 0,033
$6l' - 3\lambda - 3\omega$	− 0,008	− 0,092	+ 0,052	+ 0,042		
$7l' - 4\lambda - 3\omega$		− 0,037	+ 0,022	+ 0,016		
$8l' - 5\lambda - 3\omega$		− 0,020	+ 0,012	+ 0,012		
$9l' - 6\lambda - 3\omega$		− 0,011	+ 0,008	+ 0,008		
$10l' - 7\lambda - 3\omega$		− 0,008				
$4l' - \lambda - \varpi' - 2\omega$			+ 0,006	+ 0,006		
$5l' - 2\lambda - \varpi' - 2\omega$	+ 0,015	+ 1,393	− 0,096	− 0,085		
$6l' - 3\lambda - \varpi' - 2\omega$		+ 0,015	− 0,006	− 0,006		
$5l' - 2\lambda - 2\varpi' - \omega$		− 0,078				
$5l' - 2\lambda + \varpi' - 4\omega$		− 0,031				
$5l' - 2\lambda - \omega - 2\tau'$		− 0,376	+ 0,011	+ 0,011	+ 0,066	+ 0,066
$5l' - 2\lambda - \varpi' - 2\tau'$		+ 0,021				
$5l' - \lambda - 4\omega$		− 0,005	+ 0,010	+ 0,010		
$6l' - 2\lambda - 4\omega$		+ 0,010	+ 0,035	+ 0,035		
$7l' - 3\lambda - 4\omega$	+ 0,006	+ 0,128	− 0,052	− 0,051		
$8l' - 4\lambda - 4\omega$		+ 0,022	− 0,015	− 0,015		
$9l' - 5\lambda - 4\omega$		+ 0,007	− 0,008	− 0,008		
$6l' - 2\lambda - \varpi' - 3\omega$		− 0,008	− 0,006	− 0,006		
$7l' - 3\lambda - \varpi' - 3\omega$		− 0,028	+ 0,009	+ 0,009		
$8l' - 3\lambda - 5\omega$		− 0,077	− 0,034	− 0,034		
$9l' - 4\lambda - 5\omega$		− 0,018	+ 0,010	+ 0,010		
$8l' - 3\lambda - \varpi' - 4\omega$		+ 0,023	+ 0,008	+ 0,008		
$8l' - 3\lambda - 3\omega - 2\tau'$		− 0,009				
$10l' - 4\lambda - 6\omega$		+ 0,111	− 0,020	− 0,020		
$10l' - 4\lambda - \varpi' - 5\omega$		− 0,033				
$10l' - 4\lambda - 4\omega - 2\tau'$		+ 0,010				

ACTION DE LA TERRE.

	A	L	E	P	G	Γ
$l' - \lambda$		+ 0″,073		− 0″,007		
$2l' - 2\lambda$	+ 0″,028	+ 0,135	− 0″,004	+ 0,016		
$3l' - 3\lambda$	+ 0,009	+ 0,040		+ 0,009		
$4l' - 4\lambda$		+ 0,012				
$-2l' + 3\lambda - \omega$		− 0,014	+ 0,010	+ 0,010		
$-l' + 2\lambda - \omega$						
$+\lambda - \omega$		+ 0,030	− 0,019	− 0,019		
$+l' - \omega$		+ 0,073	− 0,057	− 0,065		+ 0″,010
$2l' - \lambda - \omega$	− 0,026	− 0,321	+ 0,160	+ 0,149		− 0,007
$3l' - 2\lambda - \omega$	− 0,010	− 0,068	+ 0,032	+ 0,025		
$4l' - 3\lambda - \omega$		− 0,022	+ 0,009	+ 0,009		
$5l' - 4\lambda - \omega$		− 0,008				
$l' - \varpi'$		− 0,010				
$3l' - 2\lambda - \varpi'$		+ 0,008				
$2l' - 2\omega$		− 0,024	+ 0,061	+ 0,061		
$3l' - \lambda - 2\omega$	+ 0,008	+ 0,163	− 0,096	− 0,095		
$4l' - 2\lambda - 2\omega$		+ 0,023	− 0,017	− 0,017		
$5l' - 3\lambda - 2\omega$		+ 0,007	− 0,006	− 0,006		
$3l' - \lambda - \varpi' - \omega$		− 0,055	+ 0,018	+ 0,018		
$2l' - 2\tau'$					+ 0″,009	+ 0,009
$3l' - \lambda - 2\tau'$					− 0,007	− 0,007
$3l' - 3\omega$			− 0,007	− 0,007		
$4l' - \lambda - 3\omega$	− 0,009	− 0,998	+ 0,168	+ 0,167		
$5l' - 2\lambda - 3\omega$			+ 0,006	+ 0,006		
$4l' - \lambda - \varpi' - 2\omega$		+ 0,547	− 0,062	− 0,062		
$4l' - \lambda - 2\varpi' - \omega$		− 0,102	+ 0,006	+ 0,006		
$4l' - \lambda - \omega - 2\tau'$		− 0,126	+ 0,006	+ 0,006	+ 0,021	+ 0,021
$4l' - \lambda - \varpi' - 2\tau'$		+ 0,026				
$5l' - \lambda - 4\omega$			+ 0,006	+ 0,006		

ACTION DE JUPITER.

	A	L	E	P	G	Γ
$l' - \lambda$		+ 0,021				
$2l' - 2\lambda$	+ 0,038	+ 0,199	− 0,006	+ 0,031		
$3l' - 3\lambda$		+ 0,012				
$-2l' + 3\lambda - \omega$	+ 0,010	− 0,028	+ 0,019	+ 0,020		
$-l' + 2\lambda - \omega$						
$+\lambda - \omega$	− 0,006	+ 0,055	− 0,039	− 0,040		

$\mathcal{A}$	A	L	E	P	G	T
			ACTION DE JUPITER (Suite).			
$+\ l' - \omega$		+ 0″,315	− 0″,273	− 0″,290		+ 0″,035
$2l' - \lambda - \omega$	− 0″,030	− 0,261	+ 0,190	+ 0,173		
$3l' - 2\lambda - \omega$		− 0,016	+ 0,009	+ 0,009		
$l' - \varpi'$		− 0,601		+ 0,089		− 0,048
$2l' - \lambda - \varpi'$						
$3l' - 2\lambda - \varpi'$	+ 0,008	+ 0,037				
$l' + \varpi' - 2\omega$		+ 0,023	− 0,072	− 0,072		
$l' + \omega - 2\tau'$		+ 0,006			− 0″,019	− 0,019
$l' + \varpi' - 2\tau'$					− 0,008	− 0,008
$-2l' + 4\lambda - 2\omega$			+ 0,006	+ 0,006		
$+2l' - 2\omega$		− 0,483	+ 1,493	+ 1,493		
$+3l' - \lambda - 2\omega$		+ 0,010	− 0,012	− 0,012		
$2l' - \varpi' - \omega$		+ 0,023	− 0,020	− 0,020		
$3l' - \lambda - \varpi' - \omega$		− 0,046	+ 0,032	+ 0,032		
$2l' - 2\varpi'$		− 0,021				
$2l' - 2\tau'$		− 0,037			+ 0,177	+ 0,177
$3l' - 3\omega$		+ 0,010	− 0,034	− 0,034		
$3l' - \varpi' - 2\omega$		− 0,054	+ 0,170	+ 0,170		
$3l' - \omega - 2\tau'$						
$3l' - \varpi' - 2\tau'$					+ 0,019	+ 0,019
$4l' - \varpi' - 3\omega$			− 0,006	− 0,006		
$4l' - 2\varpi' - 2\omega$			+ 0,015	+ 0,015		
			ACTION DE SATURNE.			
$2l' - 2\lambda$		+ 0,012				
$l' - \omega$		+ 0,021	− 0,018	− 0,018		
$2l' - \lambda - \omega$		− 0,013	+ 0,009	+ 0,009		
$l' - \varpi'$		− 0,080		+ 0,012		− 0,007
$l' + \varpi' - 2\omega$			− 0,010	− 0,010		
$2l' - 2\omega$		− 0,057	+ 0,181	+ 0,181		
$2l' - 2\tau'$					+ 0,020	+ 0,020
$3l' - \varpi' - 2\omega$		− 0,007	+ 0,024	+ 0,024		
			ACTION D'URANUS.			
$2l' - 2\omega$			+ 0,009	+ 0,009		

Si l'on voulait vérifier que les nombres précédents résultent de ceux qui sont donnés dans la seconde partie de l'Addition, il pourrait se faire qu'on remarquât quelques différences dans la troisième décimale. Cela provient de ce qu'à l'impression, et pour abréger, on a supprimé les termes dont les coefficients se sont trouvés inférieurs à 0",005, tandis que dans les manuscrits l'exactitude a été poussée plus loin.

Les angles $5n' - 2n$ et $4n'' - n$ étant très-petits par rapport à n, les perturbations correspondantes, bien qu'étant du *troisième ordre*, sont les plus notables.

Perturbations des éléments, dépendant des secondes puissances et des produits des masses perturbatrices.

Les termes les plus notables de cet ordre sont les inégalités séculaires, dont voici les expressions :

$$\begin{aligned}\delta_2 e &= -\,0'',000\,0009\,t^2,\\ e\,\delta_2 \varpi &= -\,0,000\,0004\,t^2,\\ \delta_2 p &= -\,0,000\,0010\,t^2,\\ \delta_2 q &= -\,0,000\,0058\,t^2.\end{aligned}$$

Perturbations périodiques de la longitude, du rayon vecteur et de la latitude.

Les perturbations des coordonnées se déduisent de celles des éléments, par les formules (27), (37) et (45) du Chapitre VI, Tome II. On trouvera les expressions des perturbations de la longitude et du rayon vecteur dans la troisième partie de l'Addition, les longitudes des périhélies et des nœuds restant indéterminées. Si l'on remplace ces longitudes par leurs valeurs en 1850 (Chapitre VII), et si l'on développe de manière à sommer tous les termes de même argument, l'expression des perturbations de chaque coordonnée prendra la forme

$$\sum (\mathrm{M}\sin \mathrm{A} + \mathrm{N}\cos \mathrm{A}).$$

Voici quelles sont les valeurs sensibles de M et de N pour les diverses valeurs de l'angle A. Dans ces formules définitives, nous établissons les indices suivant le rang des planètes.

	LONGITUDE.		RAYON.	
A	M	N	M	N
	ACTION DE VÉNUS.			
0				$-0'',007$
$l'-l$	$+0'',743$	$-0'',001$		$+0,093$
$2l'-2l$	$-2,135$	$+0,007$		$-0,421$
$3l'-3l$	$-0,444$	$-0,012$		$-0,078$
$4l'-4l$	$+0,061$	$-0,001$		
$5l'-5l$	$-0,189$	$-0,023$	$+0'',004$	$-0,027$
$6l'-6l$	$-0,010$			
$-6l'+7l$	$+0,004$	$-0,013$		
$-5l'+6l$	$+0,017$	$-0,060$	$-0,010$	$-0,003$
$-3l'+4l$	$+0,035$	$-0,128$	$-0,016$	$-0,004$
$-2l'+3l$	$+0,145$	$-0,540$	$-0,081$	$-0,021$
$-l'+2l$	$-0,059$	$+0,219$	$+0,034$	$+0,009$
$+l$	$+0,017$	$-0,063$	$-0,011$	$-0,003$
$+l'$	$+0,077$	$-0,290$	$-0,041$	$-0,011$
$2l'-l$	$-1,004$	$+3,652$	$-0,139$	$-0,036$
$3l'-2l$	$-0,400$	$+1,310$	$-0,203$	$-0,060$
$4l'-3l$	$+0,092$	$-0,283$	$+0,057$	$+0,020$
$5l'-4l$	$-0,288$	$+0,637$	$-0,095$	$-0,043$
$6l'-5l$	$-0,005$	$+0,020$		
$-5l'+7l$	$-0,014$	$-0,008$		
$-3l'+5l$	$-0,040$	$-0,023$		
$-2l'+4l$	$-0,136$	$-0,079$	$-0,013$	$+0,022$
$-l'+3l$	$+0,050$	$+0,028$		
$+l'+l$	$-0,069$	$-0,039$	$-0,008$	$+0,014$
$2l'$	$+0,662$	$+0,375$	$+0,080$	$-0,142$
$3l'-l$	$-0,438$	$-0,330$	$+0,013$	$-0,018$
$4l'-2l$	$-0,415$	$-0,289$	$+0,022$	$-0,039$
$5l'-3l$	$+2,236$	$+1,766$	$-0,335$	$+0,425$
$6l'-4l$	$+0,045$	$+0,039$	$-0,008$	$+0,010$
$7l'-5l$	$-0,026$	$-0,015$		
$-2l'+5l$	$-0,034$	$+0,034$		
$+l'+2l$	$-0,015$	$+0,016$		
$2l'+l$	$+0,137$	$-0,140$	$-0,024$	$-0,024$
$3l'$	$-0,091$	$+0,074$	$+0,008$	$+0,012$
$4l'-l$	$-0,061$	$+0,051$	$+0,017$	$+0,016$
$5l'-2l$	$+6,137$	$-4,267$	$+0,021$	$+0,028$
$6l'-3l$	$+0,113$	$-0,086$	$+0,012$	$+0,012$
$7l'-4l$	$-0,064$	$+0,039$	$-0,014$	$-0,019$
$8l'-5l$	$-0,014$	$+0,015$	$-0,006$	$-0,006$

A	LONGITUDE. M	LONGITUDE. N	RAYON. M	RAYON. N
		ACTION DE VÉNUS (Suite).		
$-2l'+6l$	+ 0″,007	+ 0″,012		
$+2l'+2l$	− 0,027	− 0,045		
$3l'+l$	+ 0,016	+ 0,027		
$4l'$	+ 0,012	+ 0,020		
$5l'-l$	− 0,515	− 1,411	− 0″,283	+ 0″,104
$7l'-3l$	+ 0,037	+ 0,105		
$8l'-4l$	+ 0,023	+ 0,057	− 0,008	+ 0,005
$9l'-5l$	− 0,010	− 0,016		
$10l'-6l$	+ 0,008	+ 0,014		
$2l'+3l$	− 0,013	+ 0,004		
$5l'$	− 0,385	+ 0,032	+ 0,006	+ 0,059
$7l'-2l$	+ 0,025	− 0,007		
$8l'-3l$	− 0,062	− 0,002		
$9l'-4l$	− 0,017	+ 0,005		
$10l'-5l$	+ 0,060	− 0,018	+ 0,003	+ 0,012
$5l'+l$	− 0,014	+ 0,100	+ 0,013	+ 0,002
$8l'-2l$	+ 0,010	+ 0,021		
$10l'-4l$	+ 0,034	− 0,091		
$5l'+2l$	+ 0,029	+ 0,007		
$10l'-3l$	− 0,021	− 0,005		
		ACTION DE LA TERRE.		
0				− 0,003
$l''-l$	+ 0,209			+ 0,026
$2l''-2l$	− 0,244			− 0,047
$3l''-3l$	+ 0,016	+ 0,005		
$4l''-4l$	− 0,023	− 0,007		
$-4l''+5l$	+ 0,003	− 0,011		
$-2l''+3l$	+ 0,019	− 0,071	− 0,014	− 0,004
$-l''+2l$	− 0,014	+ 0,054	+ 0,010	+ 0,003
$+l$	+ 0,005	− 0,017		
$+l''$	+ 0,026	− 0,082	− 0,009	− 0,002
$2l''-l$	− 0,112	+ 0,419	− 0,041	− 0,011
$3l''-2l$	+ 0,047	− 0,114	+ 0,024	+ 0,010
$4l''-3l$	− 0,046	+ 0,065		
$-2l''+4l$	− 0,017	− 0,010		
$-l''+3l$	+ 0,013	+ 0,007		
$+l''+l$	− 0,026	− 0,015		

A	LONGITUDE. M	LONGITUDE. N	RAYON. M	RAYON. N
	ACTION DE LA TERRE (Suite).			
$2l''$	+ 0″,066	+ 0″,038	+ 0″,010	− 0″,017
$3l''-l$	− 0,094	− 0,080		
$4l''-2l$	+ 0,246	+ 0,263	− 0,051	+ 0,050
$5l''-3l$	+ 0,010	+ 0,005		
$2l''+l$	+ 0,014	− 0,014		
$3l''$	− 0,019	+ 0,013		
$4l''-l$	+ 0,605	− 0,260		
$5l''-2l$	+ 0,008	− 0,008		
$4l''$	− 0,020	− 0,138	− 0,028	+ 0,005
$4l''+l$	− 0,028	− 0,005		
	ACTION DE JUPITER.			
0				− 0,004
$l^{iv}-l$	+ 0,613	− 0,322	+ 0,061	+ 0,112
$2l^{iv}-2l$	− 0,935	+ 0,012		− 0,154
$3l^{iv}-3l$	− 0,015	− 0,029	+ 0,005	− 0,008
$-2l^{iv}+3l$	+ 0,066	− 0,245	− 0,035	− 0,009
$-l^{iv}+2l$	− 0,118	+ 0,127	+ 0,020	+ 0,019
$+l$	+ 0,008	− 0,031		
$+l^{iv}$	− 0,523	− 0,199	− 0,022	− 0,006
$2l^{iv}-l$	− 0,797	+ 3,182	− 0,580	− 0,145
$3l^{iv}-2l$	− 0,113	− 0,003	+ 0,003	− 0,017
$-2l^{iv}+4l$	− 0,063	− 0,036	− 0,004	+ 0,008
$-l^{iv}+3l$	+ 0,024	+ 0,039		
$+l^{iv}+l$	− 0,084	+ 0,170	+ 0,033	+ 0,017
$2l^{iv}$	+ 0,402	+ 0,263	+ 0,063	− 0,112
$3l^{iv}-l$	− 0,085	+ 0,347	− 0,058	− 0,013
$-2l^{iv}+5l$	− 0,012	+ 0,012		
$-l^{iv}+4l$	+ 0,008	− 0,008		
$+l^{iv}+2l$	+ 0,036	− 0,031		
$2l^{iv}+l$	+ 0,088	− 0,089	− 0,021	− 0,021
$3l^{iv}$	+ 0,051	+ 0,027	+ 0,007	− 0,013
$4l^{iv}-l$	− 0,006	+ 0,026		
$l^{iv}+3l$	+ 0,008	− 0,012		
$2l^{iv}+2l$	− 0,017	− 0,029		
$3l^{iv}+l$	+ 0,008	− 0,012		
$2l^{iv}+3l$	− 0,010	+ 0,003		

A	LONGITUDE. M	N	RAYON. M	N
		ACTION DE SATURNE.		
$l' - l$	$+ 0'',032$	$+ 0'',012$		
$2l' - 2l$	$- 0,102$	$0,000$	$0'',000$	$- 0'',019$
$-2l' + 3l$	$+ 0,007$	$- 0,027$		
$-l' + 2l$	$- 0,002$	$+ 0,009$		
$+ l'$	$+ 0,005$	$+ 0,060$		
$2l' - l$	$- 0,098$	$+ 0,368$	$- 0,066$	$- 0,018$
$3l' - 2l$	$0,000$	$+ 0,012$		
$l' + l$	$+ 0,027$	$+ 0,007$		
$2l'$	$+ 0,051$	$+ 0,030$	$+ 0,008$	$- 0,013$
$3l' - l$	$+ 0,048$	$+ 0,013$	$- 0,002$	$+ 0,009$
$2l' + l$	$+ 0,010$	$- 0,011$		

Il entre, dans l'expression des perturbations de la longitude, des termes dépendant uniquement de la longitude de Mercure même. On sait qu'on peut les négliger, pourvu qu'on ajoute au rayon certains termes dépendant du même argument (Chapitre VI, Tome II). Mais ces derniers termes sont insensibles, si ce n'est dans l'action de Vénus sur Mercure; et, dans cette dernière théorie, ils se trouvent égaux et de signes contraires aux termes $- 0'',011 \sin l$ et $- 0'',003 \cos l$ provenant d'une autre source. Il résulte de ces considérations que les termes des perturbations qui dépendent uniquement de la longitude de Mercure peuvent être négligés soit dans la longitude, soit dans le rayon de Mercure (*).

Je n'ai point rapporté les expressions générales des termes des perturbations de la latitude. Ces termes, qu'on tirera sans difficulté des perturbations des éléments, au moyen de la formule (45) du Chapitre VI, sont fort petits. Aussi les pourrait-on négliger s'il ne s'agissait que de calculer les positions habituelles de Mercure. Mais quand on en vient à considérer les passages sur le Soleil, où les observations acquièrent tant de précision, il est convenable de ne rien omettre. On y arrive avec une exactitude suffisante en attribuant à la longitude de Mercure la valeur particulière convenant soit au nœud ascendant,

(*) C'est ce qui a été fait en réduisant en Tables les inégalités produites dans le mouvement de Mercure par l'action de Vénus. En calculant les Tables relatives aux inégalités produites dans la longitude par les actions de la Terre et de Jupiter, on a, par mégarde, conservé les termes en sin l et cos l. Peu importe, puisque l'une et l'autre voie sont également légitimes.

soit au nœud descendant sur l'écliptique. Les perturbations ne changent alors qu'avec les longitudes des planètes troublantes; et l'action de la Terre se réduit même à une constante, puisqu'aux instants des passages la longitude de la Terre est égale à celle de Mercure. De cette manière, j'ai obtenu :

Perturbations de la latitude de Mercure, au moment du passage de la planète par son nœud ascendant.

$$\left.\begin{aligned}\delta s = &+ 0'',000 \sin l' + 0'',030 \cos l' \\ &- 0,035 \sin 2l' - 0,006 \cos 2l' \\ &+ 0,011 \sin 3l' + 0,036 \cos 3l' \\ &- 0,008 \sin 4l' + 0,002 \cos 4l' \\ &+ 0,028 \sin 5l' - 0,055 \cos 5l'\end{aligned}\right\} \text{Action de Vénus.}$$

$$\left.\begin{aligned}&+ 0,058 \sin l^{\text{iv}} + 0,013 \cos l^{\text{iv}} \\ &- 0,019 \sin 2l^{\text{iv}} + 0,175 \cos 2l^{\text{iv}} \\ &+ 0,002 \sin 3l^{\text{iv}} + 0,019 \cos 3l^{\text{iv}}\end{aligned}\right\} \text{Action de Jupiter.}$$

$$\left.\begin{aligned}&+ 0,000 \sin l^{\text{v}} - 0,007 \cos l^{\text{v}} \\ &- 0,006 \sin 2l^{\text{v}} + 0,019 \cos 2l^{\text{v}}\end{aligned}\right\} \text{Action de Saturne.}$$

L'effet résultant de l'action de la Terre est insensible.

Perturbations de la latitude de Mercure, au moment du passage de la planète par son nœud descendant.

$$\left.\begin{aligned}\delta s = &- 0'',023 \sin l' - 0'',012 \cos l' \\ &- 0,022 \sin 2l' - 0,048 \cos 2l' \\ &- 0,021 \sin 3l' + 0,041 \cos 3l' \\ &+ 0,005 \sin 4l' + 0,007 \cos 4l' \\ &- 0,075 \sin 5l' - 0,007 \cos 5l'\end{aligned}\right\} \text{Action de Vénus.}$$

$$+ 0,017 \qquad \text{Action de la Terre.}$$

Les termes provenant des actions de Jupiter et de Saturne sont égaux et de signes contraires à ceux qui correspondent au passage par le nœud ascendant.

Les résultats contenus dans la présente Section s'accordent avec ceux que nous avons donnés en 1844, dans les limites de l'exactitude à laquelle nous nous étions alors arrêtés : seulement, les formules actuelles sont plus précises. Si l'on considère

d'ailleurs que tous les nombres compris dans le travail de 1844 avaient été obtenus par des formules d'interpolation, suivant la méthode exposée dans la deuxième Section du Chapitre IV (Tome II), tandis qu'ici nous avons eu exclusivement recours au développement des formules algébriques, on trouvera dans la coïncidence des résultats, tirés de deux méthodes distinctes, une garantie certaine d'exactitude.

SECTION II.

RÉSUMÉ DES FORMULES RELATIVES AUX MOUVEMENTS HÉLIOCENTRIQUE ET GÉOCENTRIQUE DE MERCURE.

Les formules que nous allons rassembler seront, à peu d'exceptions près, basées sur les valeurs provisoires attribuées aux divers éléments dans le Chapitre VII.

Les masses des planètes en particulier auront pour expressions :

Mercure.........	m	$= 0,000\,000\,333\,3\,(1+\nu)$
Vénus............	m'	$= 0,000\,002\,488\,5\,(1+\nu')$
La Terre..........	m''	$= 0,000\,002\,817\,4\,(1+\nu'')$
Mars..............	m'''	$= 0,000\,000\,333\,9\,(1+\nu''')$
Jupiter...........	m^{iv}	$= 0,000\,952\,381\,(1+\nu^{\text{iv}})$
Saturne...........	m^{v}	$= 0,000\,284\,738\,(1+\nu^{\text{v}})$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ sont des indéterminées dont la considération permettra d'introduire ultérieurement les modifications qui seraient rendues nécessaires par des changements apportés aux valeurs actuellement reçues pour les masses.

En comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne à leurs volumes, on a remarqué que les densités de ces planètes sont, à peu près, en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil. La règle n'est pas vraie pour Vénus et Uranus. En l'étendant toutefois à Mercure, on en déduirait la densité de cette planète, et par suite sa masse, en recourant au demi-diamètre que nous donnerons plus bas. On trouverait ainsi que la masse de la planète serait, à peu près, *un deux-millionième* de celle du Soleil. J'ai réduit ici cette masse à *un trois-millionième*, en considération des perturbations qu'elle a fait éprouver à la comète d'Encke dans son passage au périhélie, en 1838. Mais, suivant M. Encke, la masse de Mercure serait encore plus faible. Concluons donc seulement que cette masse est fort petite et qu'elle ne peut avoir aucune influence sensible sur le calcul du grand axe de l'orbite.

Déjà, en traitant du mouvement du Soleil, nous avons trouvé que la masse ci-dessus adoptée pour Vénus avait à peine besoin d'être modifiée.

La masse de Mars est celle que nous avons conclue, Chapitre XIV, Tome IV, de l'étude des mouvements du Soleil. Elle est plus faible que celle donnée au Chapitre VII, dans le rapport de 0,985 à *l'unité*. Nous avons effectué cette correction, afin de n'avoir pas à conserver ν''' comme indéterminée, la théorie de Mercure n'étant pas susceptible d'apporter aucune lumière nouvelle sur ce sujet.

3.

Position du plan de l'orbite pour l'époque 1850 + t, rapportée à l'écliptique et à l'équinoxe de la même époque.

Les valeurs de δp et δq (page 7) font connaître, à l'époque 1850 + t, la position du plan de l'orbite de Mercure par rapport à l'écliptique et à l'équinoxe de 1850. Pour en déduire la position du même plan relativement à l'écliptique et à l'équinoxe de 1850 + t, il faut recourir aux formules du Chapitre IX (Tome II, page 184), savoir :

$$\varphi = \varphi_0 + [(\delta p - p'')\sin\theta_0 + (\delta q - q'')\cos\theta_0]\cos^2\varphi_0,$$

$$\theta = \theta_0 + \psi_1 + \frac{(\delta p - p'')\cos\theta_0 - (\delta q - q'')\sin\theta_0}{\tang\varphi_0}.$$

Ces formules résultent du développement des équations

$$\tang\varphi\sin(\theta - \psi_1) = \delta p - p'',$$

$$\tang\varphi\cos(\theta - \psi_1) = \delta q - q'',$$

auxquelles il sera plus exact de recourir, si l'on veut conserver les termes dependant du carré du temps.

φ_0 et θ_0 sont l'inclinaison de l'orbite et la longitude du nœud en 1850 (Chapitre VII).

δp et δq ont été données à la page 7 du présent Chapitre.

p'' et q'' résultent de la théorie du mouvement de la Terre (Chapitre XIV, Section II).

Selon la théorie de la précession, et en réduisant ψ_1 à sa partie moyenne, on a $\psi_1 = 50'',235\,72t + 0'',000\,112\,89t^2$.

En ayant d'ailleurs égard à la correction de la masse de Mars, on conclut de ces diverses données, et pour l'époque 1850 + t,

$$\begin{aligned}\varphi = {} & 7^\circ\,0'\,8'',16 + 0'',063\,14t - 0'',000\,005\,6t^2 \\ & - 0'',000\,92\nu t - 0'',008\,86\nu' t - 0'',013\,02\nu'' t + 0'',000\,04\nu''' t \\ & + 0'',077\,35\nu^{iv} t + 0,008\,56\nu^{v} t + 0'',000\,02\nu^{vi} t - 0'',000\,01\nu^{vii} t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta = {} & 46^\circ 33' 3'',25 + 42'',643\,0t + 0'',000\,083\,5t^2 \\ & - 0'',066\,1\nu t - 4'',100\,6\nu' t - 0'',923\,5\nu'' t - 0'',099\,6\nu''' t \\ & - 2'',283\,5\nu^{iv} t - 0'',117\,0\nu^{v} t - 0'',001\,9\nu^{vi} t - 0'',000\,5\nu^{vii} t.\end{aligned}$$

Dans la partie séculaire de θ, l'effet de la précession et celui des perturbations sont confondus ensemble. Le mouvement propre du nœud, rapporté à l'écliptique

mobile, a pour expression

$$-7'',605\,5\,t - 0'',000\,029\,4\,t^2.$$

En raison des mouvements de l'écliptique et de l'équateur, on doit ajouter à la longitude moyenne de la planète et à la longitude du périhélie les termes :

$$\psi_1 + \frac{\tang\varphi}{2}(p''\cos\theta - q''\sin\theta).$$

La seconde partie de cette expression est égale à $+0'',023\,70\,t$, terme qui devra être ajouté à la précession ψ_1.

Éléments du mouvement dans l'orbite.

La longitude moyenne, pour le midi moyen du 1er janvier 1850, est supposée égale à

$$327^\circ\,15'\,19'',89.$$

Le moyen mouvement sidéral de la planète en une année de $365^j,25$ sera supposé de $5\,381\,016'',181\,58$; et l'on doit y ajouter $\psi_1 + 0'',023\,70\,t$, pour le rapporter à l'équinoxe moyen de $1850 + t$. La longitude moyenne de la planète, à cette même époque, aura donc pour expression

$$l = 327^\circ\,15'\,19'',89 + 5\,381\,066'',441\,00\,t + 0'',000\,112\,89\,t^2,$$

t étant estimé en années juliennes.

La longitude correspondante du périhélie sera, d'après ce qui précède, et en ayant égard à la correction de la masse de Mars,

$$\begin{aligned}\varpi = 75^\circ\,7'\,1'',03 &+ 55'',530\,8\,t + 0'',000\,111\,1\,t^2 \\ &+ 2'',806\,4\,\nu' t + 0'',836\,1\,\nu'' t + 0'',025\,5\,\nu''' t \\ &+ 1'',525\,9\,\nu^{iv} t + 0'',072\,4\,\nu^{v} t + 0'',001\,4\,\nu^{vi} t + 0'',000\,6\,\nu^{vii} t.\end{aligned}$$

En retranchant ϖ de l, on aura l'anomalie moyenne, dont la formule nous serait inutile ici.

L'expression de l'excentricité qui nous servira de point de départ est :

$$\begin{aligned}e = e_0 + e_1 t + e' t^2 = 0,205\,610\,5 &+ 0'',041\,95\,t - 0'',000\,000\,9\,t^2 \\ &+ 0'',028\,23\,\nu' t + 0'',010\,62\,\nu'' t - 0'',000\,62\,\nu''' t \\ &+ 0'',003\,19\,\nu^{iv} t + 0'',000\,53\,\nu^{v} t.\end{aligned}$$

On en déduit pour l'*équation du centre*, en négligeant les termes en ν', ν'', ...,

et en appelant ζ l'anomalie moyenne :

$$
\begin{aligned}
\text{Équation du centre } f = \;& (84376'',212 + 0'',0825\,9t) \sin\zeta \\
& + (10732,403 + 0,020\,89t) \sin 2\zeta \\
& + (1891,996 + 0,005\,51t) \sin 3\zeta \\
& + (381,117 + 0,001\,50t) \sin 4\zeta \\
& + (82,559 + 0,000\,40t) \sin 5\zeta \\
& + (18,719 + 0,000\,11t) \sin 6\zeta \\
& + (4,379 + 0,000\,03t) \sin 7\zeta \\
& + 1,048 \sin 8\zeta \\
& + 0,255 \sin 9\zeta \\
& + 0,063 \sin 10\zeta \\
& + 0,016 \sin 11\zeta \\
& + 0,004 \sin 12\zeta
\end{aligned}
$$

Nous avons omis le petit terme en t^2 dont on tiendrait compte au besoin.

L'équation du centre étant ajoutée à la longitude moyenne, fera connaître la longitude vraie $v = l + f$.

Ces formules sont commodes quand on les a préalablement réduites en Tables. Autrement on peut, avec avantage, passer par l'anomalie excentrique pour calculer le lieu vrai au moyen des relations

$$\zeta = u - e \sin u = u - (4,627\,47042) \sin u,$$

$$\operatorname{tang} \frac{v - \varpi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2} = (0,090\,58676) \operatorname{tang} \frac{u}{2}.$$

Dans ces relations, ainsi que dans les suivantes, les nombres placés entre parenthèses sont des logarithmes, et ils correspondent à la valeur de l'excentricité à l'origine du temps.

Si, par exemple, on suppose que l'anomalie moyenne ζ soit égale à 90 degrés, on en déduira

$$u = 101°32'32'',55, \quad v - \varpi = 112°56'2'',634.$$

Cette valeur de l'anomalie vraie coïncide avec celle qu'on obtient au moyen de l'expression de l'équation du centre.

La partie elliptique de la longitude dans l'orbite étant connue, on lui ajoutera

les perturbations résultant des actions de Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne. Les expressions de ces perturbations sont données pages 12 et suivantes.

Le demi-grand axe de l'orbite étant égal à 0,387 098 7, la partie elliptique du rayon vecteur a pour expression

$$\begin{aligned}
r = &+ 0{,}395\,281\,13 + 0{,}000\,000\,016\,2t \\
&- (0{,}078\,333\,47 - 0{,}000\,000\,075\,0t)\cos\zeta \\
&- (0{,}007\,953\,64 - 0{,}000\,000\,015\,2t)\cos 2\zeta \\
&- (0{,}001\,212\,45 - 0{,}000\,000\,003\,5t)\cos 3\zeta \\
&- (0{,}000\,219\,13 - 0{,}000\,000\,000\,9t)\cos 4\zeta \\
&- (0{,}000\,043\,52 - 0{,}000\,000\,000\,2t)\cos 5\zeta \\
&- 0{,}000\,009\,18\cos 6\zeta \\
&- 0{,}000\,002\,02\cos 7\zeta \\
&- 0{,}000\,000\,46\cos 8\zeta \\
&- 0{,}000\,000\,10\cos 9\zeta \\
&- 0{,}000\,000\,02\cos 10\zeta.
\end{aligned}$$

La partie elliptique du rayon pourra aussi se conclure soit de l'anomalie excentrique, soit de l'anomalie vraie. Dans le premier cas, on fera usage de l'une ou de l'autre des formules suivantes :

$$r = a - ae\cos u = 0{,}387\,098\,7 - (\bar{2}{,}900\,8670)\cos u$$

$$r = a(1-e) + 2ae\sin^2\frac{u}{2} = 0{,}307\,507\,14 + (\bar{1}{,}201\,8970)\sin^2\frac{u}{2}.$$

Près du périhélie, où l'angle u est petit, la seconde forme donnée à l'expression du rayon est préférable à la première. Dans le second cas, on aura la formule

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)} = \frac{(\bar{1}{,}569\,06223)}{1+(\bar{1}{,}313\,0453)\cos(v-\varpi)}.$$

Ces diverses formules donnent toutes la même valeur $r = 0{,}403\,024\,4$ pour les valeurs correspondantes $\zeta = 90°$, $u = 101°32'32'',55$ et $v - \varpi = 112°56'2'',634$.

On complétera la valeur du rayon, calculée par l'une ou l'autre de ces relations, en lui ajoutant les perturbations déterminées par les formules comprises, comme pour la longitude, pages 12 et suivantes.

Longitude héliocentrique ; latitude ; rayon accourci.

La longitude v_1 réduite à l'écliptique, et qui porte le nom de longitude *héliocentrique*, sera calculée par la formule

$$\tan g(v_1 - \theta) = \cos\varphi \tan g(v - \theta).$$

On peut, si on le préfère, déduire v_1 de v, en calculant directement la réduction à l'écliptique, et alors on a la formule

$$\begin{aligned} v_1 &= v - \tang^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2(v-\theta) + \frac{1}{2} \tang^4 \frac{\varphi}{2} \sin 4(v-\theta) - \frac{1}{3} \tang^6 \frac{\varphi}{2} \sin 6(v-\theta) \ldots \\ &= v - (772'',110 + 0'',003\,87t) \sin 2(v-\theta) \\ &\quad + (1'',445 + 0'',000\,01t) \sin 4(v-\theta) \\ &\quad - 0'',004 \sin 6(v-\theta). \end{aligned}$$

Si l'on suppose, par exemple, que $v-\theta$ soit égal à $45°$, et que t soit nul, l'une et l'autre formule donneront $v_1 - v = -12'52'',11$.

Il restera à ajouter, à la longitude héliocentrique ainsi calculée, l'effet de la nutation luni-solaire, si on veut la rapporter à l'équinoxe vrai, et ainsi l'on aura définitivement :

Longitude héliocentrique $v_1 =$	l	Longitude moyenne.
	$+f$	Équation du centre.
	$+P_0$	Perturbations planétaires.
	$+\rho$	Réduction à l'écliptique.
	$+\Psi$	Nutation luni-solaire.

On déduira la latitude de l'une ou l'autre des formules :

$$\sin s = \sin\varphi \sin(v-\theta),$$
$$\tang s = \tang\varphi \sin(v_1-\theta).$$

On fera le calcul en remplaçant φ par sa valeur pour $1850+t$. Ou bien, si on le préfère, ce qui est plus commode dans la construction des Tables, on calculera d'abord s en donnant à φ sa valeur à l'origine du temps; puis on ajoutera à la valeur de s, ainsi obtenue, la variation séculaire,

$$\delta s = \frac{\tang s}{\tang \varphi}\delta\varphi = 0'',5141t \tang s.$$

La latitude devra en outre être corrigée en raison des perturbations. Nous avons dit qu'il ne sera nécessaire de prendre ce soin que dans le calcul des passages de la planète sur le Soleil, et on le fera alors au moyen des formules que nous avons rapportées page 17.

Le rayon *accourci*, c'est-à-dire le rayon vecteur projeté sur l'écliptique, se calculera au moyen de l'expression

$$r_1 = r \cos s.$$

Demi-diamètre de la Planète.

On peut le déduire de l'intervalle de temps qui sépare le contact intérieur et le contact extérieur, lorsque la planète, dans ses passages, quitte le disque du Soleil. Toutefois, il est facile de voir qu'on n'arrive ainsi qu'à une limite inférieure de la valeur réelle du demi-diamètre. On peut aussi l'obtenir par des mesures micrométriques pendant la durée du passage. Ainsi déterminé, il paraît être de 3",34 à la distance moyenne.

Coordonnées géocentriques.

Connaissant les coordonnées héliocentriques v_1, s et r_1, il en faut déduire les coordonnées correspondantes géocentriques $\mathcal{L}$, λ et Δ_1, qui représentent la longitude géocentrique, la latitude géocentrique et la distance à la Terre, projetée sur l'écliptique.

Soient à cet effet, $\odot$ la longitude du Soleil dépouillée de l'effet de l'aberration, R la distance du Soleil à la Terre à l'instant considéré (*), Λ la latitude du Soleil. On fera usage des équations :

$$\Delta_1 \sin(\mathcal{L} - \odot) = r_1 \sin(v_1 - \odot),$$
$$\Delta_1 \cos(\mathcal{L} - \odot) = \mathrm{R} + r_1 \cos(v_1 - \odot),$$
$$\Delta_1 \operatorname{tang} \lambda = r_1 \operatorname{tang} s + \mathrm{R} \operatorname{tang} \Lambda.$$

On pourra, en remarquant que Λ est toujours fort petite, négliger le dernier terme de la troisième relation pour calculer une valeur très-approchée de λ, à laquelle il suffira d'ajouter ensuite la correction

$$\delta\lambda = \left(\frac{\mathrm{R}}{\Delta_1} \cos^2\lambda\right) \Lambda.$$

Ayant ainsi calculé les coordonnées géocentriques vraies de la planète, on devra leur ajouter l'effet de l'aberration, pour obtenir les coordonnées apparentes. Il n'est utile d'appliquer cette correction qu'à la longitude et à la latitude. Supposons qu'au moyen d'éphémérides on ait conclu, pour le moment considéré, les variations $\delta\mathcal{L}$ et $\delta\lambda$ de la longitude et de la latitude en une seconde de temps ; on en déduira, pour les expressions de la longitude et de la latitude apparentes,

$$\mathcal{L} - 497,77\ \Delta . \delta\mathcal{L},$$
$$\lambda - 497,77\ \Delta . \delta\lambda,$$

(*) *Voir* le Chapitre XIV, Tome IV, page 54.

Δ étant la distance de la planète à la Terre, calculée par la formule

$$\Delta = \Delta_1 : \cos\lambda.$$

De la longitude et de la latitude géocentriques apparentes on déduira l'ascension droite $\mathcal{A}$ et la déclinaison $\mathcal{D}$ apparentes par les formules (3) ou (4) du Chapitre Ier, Tome I. L'obliquité dont on aura à faire usage a été donnée dans le Chapitre XIV, Tome IV, page 104.

Enfin, la position apparente de l'astre devra recevoir une dernière correction, en raison de la situation de l'observateur à la surface de la Terre. Les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison ont pour expressions (Chapitre Ier, Tome I, page 179) :

$$\partial\mathcal{A} = \frac{\rho\cos\mathcal{D}_0}{\sin 1''}\,\frac{\sin(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)}{\Delta\cos\mathcal{D}},$$

$$\partial\mathcal{D} = -\frac{\rho\sin\mathcal{D}_0}{\sin 1''}\,\frac{\cos\mathcal{D}}{\Delta} + \frac{\rho\cos\mathcal{D}_0}{\sin 1''}\,\frac{\sin\mathcal{D}\cos(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)}{\Delta}.$$

$\mathcal{A}_0$ est égale à l'heure sidérale au moment de l'observation : on réduira cette heure en degrés en la multipliant par 15.

Soit H la latitude de l'observateur : ρ et $\mathcal{D}_0$ résulteront des expressions

$$\rho = 8'',58 \left\{1 - 0{,}0033\sin^2 H\right\}\sin 1'',$$

$$\mathcal{D}_0 = H - 688''\sin 2H.$$

Les parallaxes en longitude et en latitude pourront être déterminées par les mêmes formules, en y remplaçant les ascensions droites et les déclinaisons de l'astre et de l'observateur par les longitudes et les latitudes correspondantes. Toutefois, comme les coordonnées de l'observateur varient rapidement, on pourra trouver plus simple de déterminer d'abord les parallaxes en ascension droite et en déclinaison, et d'en déduire ensuite les parallaxes en longitude et en latitude, au moyen des formules différentielles (13) et (14) du Chapitre Ier, Tome I, page 163.

Variations différentielles des coordonnées.

Lorsque nous voudrons rechercher les corrections des valeurs attribuées aux constantes de la théorie de Mercure, nous le ferons en comparant les longitudes et les latitudes géocentriques, déduites de la théorie par le calcul, aux données correspondantes résultant de l'observation. Examinons quelles sont les constantes dont il y aura lieu de considérer ainsi les corrections, et comment on formera les variations correspondantes des valeurs des coordonnées obtenues par le calcul.

Outre les changements qu'on devra attribuer aux valeurs adoptées pour les éléments à l'origine du temps, il faudra considérer les modifications que le changement des valeurs reçues pour les masses peut apporter aux parties des éléments qui varient avec le temps. Les calculs nécessaires pour cet objet se simplifieront, si l'on remarque que les masses de Jupiter et Saturne sont assez bien connues pour qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir égard aux très-petites variations qu'elles pourront ultérieurement recevoir. Et quant à Mars, nous avons employé la masse fournie pour cette planète par la considération du mouvement de la Terre, masse assez exacte pour que son changement ne puisse avoir d'influence dans la théorie de Mercure.

En conséquence, les très-petites variations des valeurs reçues pour les éléments de l'orbite de Mercure seront les suivantes :

Longitude moyenne....	$\delta\varepsilon + t\delta n,$
Excentricité..........	$\delta e + 0'',028\,23\,t.\nu' + 0'',010\,62\,t.\nu'',$
Longitude du périhélie.	$\delta\varpi + 2'',805\,4\;t.\nu' + 0'',836\,1\;t.\nu'',$
Inclinaison...........	$\delta\varphi - 0'',000\,92\,t.\nu - 0'',008\,86\,t.\nu' - 0'',013\,02\,t.\nu'',$
Longitude du nœud....	$\delta\theta - 0'',066\,1\;t.\nu - 4'',100\,6\;t.\nu' - 0'',923\,5\;t.\nu''.$

Le mouvement moyen sidéral est assez bien connu pour que le demi-grand axe ait dès à présent toute l'exactitude nécessaire au calcul du rayon de l'orbite.

Les variations correspondantes de la longitude héliocentrique v_1 peuvent être confondues avec celles de la longitude dans l'orbite v, à cause de la faible inclinaison de l'orbite et de la très-grande exactitude de la théorie qui nous sert de point de départ. Il en est de même pour les variations du rayon projeté, qui peuvent être confondues avec celles du rayon lui-même. Nous poserons donc :

$$\delta v_1 = \frac{dv_1}{d\varepsilon}(\delta\varepsilon + t\delta n) + \frac{dv_1}{de}\delta e + \frac{dv_1}{ed\varpi}e\delta\varpi + \frac{dv_1}{dm'}\nu' + \frac{dv_1}{dm''}\nu'',$$

$$\delta r_1 = \frac{dr}{d\varepsilon}(\delta\varepsilon + t\delta n) + \frac{dr_1}{de}\delta e + \frac{dr_1}{ed\varpi}e\delta\varpi + \frac{dr_1}{dm'}\nu' + \frac{dr_1}{dm''}\nu''.$$

Désignant toujours par ζ l'anomalie moyenne de Mercure, par p' et p'' les perturbations de la longitude dues à Vénus et à la Terre, par ρ' et ρ'' les perturbations du rayon dues aux actions des mêmes planètes, on aura, avec une exactitude

suffisante :

$$\frac{dv_1}{de} = 2\sin\zeta + \frac{5}{2}e\sin 2\zeta, \qquad \frac{dr_1}{de} = -a\cos\zeta + ae(1-\cos 2\zeta),$$

$$\frac{1}{e}\frac{dv_1}{d\varpi} = -2\cos\zeta - \frac{5}{2}e\cos 2\zeta, \qquad \frac{1}{e}\frac{dr_1}{d\varpi} = -a\sin\zeta - ae\sin 2\zeta,$$

$$\frac{dv_1}{d\varepsilon} = 1 - \frac{dv_1}{d\varpi}, \qquad \frac{dr_1}{d\varepsilon} = -\frac{dr_1}{d\varpi}.$$

$$\frac{dv_1}{dm'} = p' + \left(0'',028\,23\,\frac{dv_1}{de} + 0'',577\,04\,\frac{dv_1}{ed\varpi}\right)t,$$

$$\frac{dv_1}{dm''} = p'' + \left(0'',010\,62\,\frac{dv_1}{de} + 0'',171\,91\,\frac{dv_1}{ed\varpi}\right)t,$$

$$\frac{dr_1}{dm'} = \rho' + \left(0'',028\,23\,\frac{dr_1}{de} + 0'',577\,04\,\frac{dr_1}{ed\varpi}\right)t,$$

$$\frac{dr_1}{dm''} = \rho' + \left(0'',010\,62\,\frac{dr_1}{de} + 0'',171\,91\,\frac{dr_1}{ed\varpi}\right)t.$$

p', p'', ρ' et ρ'' résultent des Tables des perturbations planétaires, et du calcul même qui a servi à obtenir le lieu de la planète. Les autres coefficients sont tous des fonctions de ζ qu'on réduira en Tables très-simples.

La variation de la latitude héliocentrique a pour expression :

$$\delta s = \frac{ds}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{ds}{\sin\varphi\, d\theta}\sin\varphi\,\delta\theta + \frac{ds}{dv_1}\delta v_1 + \frac{ds}{dm}\nu + \frac{ds}{dm'}\nu' + \frac{ds}{dm''}\nu'';$$

les coefficients compris dans cette formule sont donnés par les relations :

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sin(v_1-\theta), \qquad \frac{ds}{\sin\varphi\, d\theta} = -\cos(v_1-\theta),$$

$$\frac{ds}{dv_1} = -\frac{ds}{d\theta},$$

$$\frac{ds}{dm} = -\left(0'',000\,92\,\frac{ds}{d\varphi} + 0'',008\,06\,\frac{ds}{\sin\varphi\, d\theta}\right)t,$$

$$\frac{ds}{dm'} = -\left(0'',008\,86\,\frac{ds}{d\varphi} + 0'',499\,90\,\frac{ds}{\sin\varphi\, d\theta}\right)t,$$

$$\frac{ds}{dm''} = -\left(0'',013\,02\,\frac{ds}{d\varphi} + 0'',112\,58\,\frac{ds}{\sin\varphi\, d\theta}\right)t;$$

tous ces coefficients sont des fonctions de $(v_1-\theta)$.

Le terme $\frac{ds}{dv_1}\delta v_1$ renfermant $\sin\varphi$ en facteur sera toujours fort petit. Par ce motif, nous ne le développerons pas; mais nous traiterons d'abord les équations

qui seront ultérieurement fournies par la considération de la longitude; et s'il en résulte une valeur numérique sensible de δv_1, nous la substituerons dans l'expression de δs.

Les termes en ν' et ν'' ne proviennent que des variations séculaires des éléments. Les perturbations périodiques de la latitude de Mercure sont assez petites pour que les incertitudes qui affectent les valeurs adoptées pour les masses ne puissent avoir aucun effet sur la grandeur de ces perturbations.

La masse de Mercure est introduite par le mouvement de l'écliptique, plan variable auquel nous rapportons l'inclinaison de l'orbite de Mercure. Il n'est pas à supposer que nous tirions, relativement à la valeur de cette masse, des données bien utiles de la présente théorie. Mais il conviendra de laisser ν comme indéterminée dans les équations de condition, afin qu'on puisse effectuer facilement tout changement provenant d'une modification à la masse adoptée pour Mercure.

Les variations des coordonnées géocentriques de la planète s'obtiendront par les formules (Chapitre Ier, Tome I, page 176)

$$\delta \mathfrak{L} = \frac{d\mathfrak{L}}{dv_1}\delta v_1 + \frac{d\mathfrak{L}}{dr_1}\delta r_1 + \frac{d\mathfrak{L}}{d\odot}\delta\odot + \frac{d\mathfrak{L}}{dR}\delta R,$$

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda}{ds}\delta s + \frac{d\lambda}{dv_1}\delta v_1 + \frac{d\lambda}{dr_1}\delta r_1 + \frac{d\lambda}{d\odot}\delta\odot + \frac{d\lambda}{dR}\delta R;$$

expressions dans lesquelles nous avons eu égard aux changements qu'on pourrait introduire ultérieurement dans la longitude $\odot$ et dans le rayon R du Soleil. Mais les termes de ces formules ne sont pas tous également importants; retranchons avec soin les inutiles.

La théorie du Soleil est assez précise, en raison des recherches effectuées dans le Chapitre XIV, pour que nous puissions considérer le rayon vecteur R comme étant connu avec une suffisante exactitude. En outre, les coefficients $\frac{d\mathfrak{L}}{dR}$ et $\frac{d\lambda}{dR}$ contiennent dans leurs expressions, le premier le facteur $\sin(\mathfrak{L} - \odot)$, le second le facteur $\sin\lambda$, facteurs qui sont toujours très-petits, surtout aux époques des passages de la planète sur le Soleil. Nous pourrons donc omettre les deux termes en δR.

Pareillement, nous négligerons dans $\delta\lambda$ les termes en δv_1, δr_1 et $\delta\odot$, dont les coefficients renferment $\sin\lambda$ en facteur. Mais nous aurons égard dans $\delta\mathfrak{L}$ à la correction que la longitude du Soleil peut requérir, en raison de l'incertitude de la longitude moyenne de cet astre et de l'impossibilité où nous nous sommes trouvés jusqu'ici de déterminer la masse de Mercure.

Nous avons, dans le Chapitre XIV, discuté les causes qui s'opposent à ce qu'on

considère les deux constantes de la longitude moyenne du Soleil, $L = \varepsilon + n'' t$, comme étant déterminées avec une entière certitude. A l'époque de 1850, la difficulté provient des erreurs inhérentes au mode d'observation de l'ascension droite du Soleil, et qui tiennent aux erreurs personnelles des observateurs; la moyenne de la partie systématique de ces erreurs affecte nécessairement la valeur adoptée pour ε. Dans le temps passé, on dépend principalement des observations de Bradley, et il y a lieu de craindre qu'aux incertitudes dues aux observateurs eux-mêmes ne se joigne quelque erreur systématique provenant de ce qu'alors la lunette méridienne de Greenwich n'était point abritée contre l'influence des rayons du Soleil. Nous supposerons donc que la longitude moyenne du Soleil doive recevoir une correction $\delta\varepsilon + t\,\delta n''$, qui, à cause de sa petitesse et à cause de la faiblesse de l'excentricité de l'orbite solaire, sera appliquée sans modification à la longitude vraie.

La masse de Mercure ne nous étant pas connue, et celle que nous avons supposée étant à peu près arbitraire, nous avons introduit dans toute la théorie du Soleil une indéterminée relative à cette masse. m désignant la valeur adoptée ci-dessus et $m(1 + \nu)$ représentant la véritable expression de la masse de Mercure, il résulte du Chapitre XIV, Sections II et IV, que les divers éléments de l'orbite solaire auxquels nous sommes parvenus doivent, ainsi que les indéterminées dont dépendent les masses de Vénus et Mars, recevoir les corrections suivantes :

$$\nu' = +0{,}001\,\nu, \qquad \delta L = +(0'',02 + 0'',002\,00\,t)\,\nu,$$

$$\nu''' = -0{,}003\,\nu, \qquad 2\,\delta e'' = -(0'',14 + 0'',005\,70\,t)\,\nu,$$

$$2e''\,\delta\varpi'' = -(0'',19 + 0'',009\,25\,t)\,\nu.$$

On en déduira la correction correspondante de la longitude du Soleil, et en lui ajoutant la perturbation périodique P due à l'action de Mercure, on trouvera, pour la partie de $\delta\odot$ proportionnelle à ν :

$$\delta\odot = \left\{ \begin{array}{l} P + 0'',02 + 0'',002\,00\,t \\ \quad -(0'',14 + 0'',005\,70\,t)\sin\zeta'' \\ \quad +(0'',19 + 0'',009\,25\,t)\cos\zeta'' \end{array} \right\} \nu,$$

ζ'' étant l'anomalie moyenne du Soleil. La considération de ces divers termes dans la théorie de Mercure permettra, si l'on vient à introduire ultérieurement des corrections dans la théorie du Soleil, de faire les changements correspondants dans celle de Mercure.

En résumé, ayant recours aux dérivées données par les formules ci-dessus et po-

sant en outre, conformément au Chapitre Ier,

$$\frac{d☿}{dv_1} = \frac{r_1}{\Delta_1}\cos(☿ - v_1), \qquad \frac{d☿}{d\odot} = \frac{R}{\Delta}\cos(☿ - \odot),$$

$$\frac{d☿}{dr_1} = -\frac{\sin(☿ - v_1)}{\Delta_1}, \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{r}{\Delta}\frac{\cos\lambda}{\cos s},$$

on calculera $\frac{d☿}{d\varepsilon}$, $\frac{d☿}{de}$, ..., par la formule

$$\frac{d☿}{dg} = \frac{d☿}{dv_1}\frac{dv_1}{dg} + \frac{d☿}{dr_1}\frac{dr_1}{dg},$$

dans laquelle on attribuera successivement à g les valeurs ε, e, $e\delta\varpi$, m', et m''. On posera en outre :

$$\frac{d☿}{dm} = \frac{d☿}{d\odot}\left\{\begin{array}{l} P + 0'',02 - 0'',14\sin\zeta'' + 0'',19\cos\zeta'' \\ + (0'',002\,00 - 0'',005\,70\sin\zeta'' + 0'',009\,25\cos\zeta'')\,t \end{array}\right\}$$

et ainsi l'on aura :

$$\delta☿ = \frac{d☿}{d\varepsilon}\left(\delta\varepsilon + t\,\delta n\right) + \frac{d☿}{de}\delta e + \frac{d☿}{ed\varpi}e\delta\varpi + \frac{d☿}{dm}\nu + \frac{d☿}{dm'}\nu' + \frac{d☿}{dm''}\nu''$$
$$+ \frac{d☿}{d\odot}\left(\delta\mathcal{E} + t\,\delta n''\right),$$

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda}{ds}\left\{\frac{ds}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{ds}{\sin\varphi\,d\theta}\sin\varphi\,\delta\theta + \frac{ds}{dv_1}\delta v_1 + \frac{ds}{dm}\nu + \frac{ds}{dm'}\nu' + \frac{ds}{dm''}\nu''\right\}.$$

Lorsque, ayant observé aux instruments méridiens l'ascension droite et la déclinaison de Mercure, on en aura déduit sa longitude et sa latitude, il suffira d'égaler ces valeurs à celles que fournit le calcul, en fonctions des corrections des éléments, pour obtenir deux équations de condition.

Il en est autrement dans la discussion des observations des passages de la planète sur le Soleil. La donnée que fournit alors l'observation, relativement à la longitude, consiste en ce qu'au moment de la conjonction observée la longitude de Mercure est égale à celle du Soleil ; ce qui fournit la relation :

$$☿ + \delta☿ = \odot + \delta\odot.$$

Près des conjonctions inférieures, $☿ - v_1$ est sensiblement égal à 180°, et $☿ - \odot$

est sensiblement nul : par suite, la relation actuelle devient

$$☿ - \frac{r_1}{\Delta_1}\,\delta v_1 + \frac{R}{\Delta_1}\,\delta ⊙ = ⊙ + \delta ⊙,$$

ou bien, en remarquant que $R - \Delta_1 = r_1$, à très-peu près,

$$\delta v_1 = \frac{\Delta_1}{r_1}\,(☿ - ⊙) + \delta ⊙.$$

Cette expression est facile à vérifier directement. Si, au moment observé de la conjonction, la longitude géocentrique calculée de Mercure (☿) surpasse la longitude calculée du Soleil (⊙), on peut voir qu'il est nécessaire d'ajouter à la longitude héliocentrique v_1 de Mercure la correction $\frac{\Delta_1}{r_1}(☿ - ⊙)$. Si de plus on suppose que la longitude calculée du Soleil ait besoin de la correction $\delta ⊙$, on devra ajouter la même correction à la longitude héliocentrique de Mercure.

SECTION III.

OBSERVATIONS DE MERCURE.

Les astronomes des derniers siècles ont fait un grand usage de seize observations de Mercure rapportées dans l'*Almageste* de Ptolémée. Leurs propres observations leur servaient à déterminer la forme de l'orbite à leur époque, et ils recouraient aux observations de l'*Almageste* pour conclure les mouvements de plusieurs des éléments.

Sept observations, antérieures à l'origine de notre ère, consistent en des alignements et des distances aux étoiles, simplement estimées. Lalande, qui les a discutées dans un Travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences pour* 1766, conclut, de la considération de l'heure des observations, qu'elles ont dû être faites à Babylone. Les *neuf* autres observations sont de l'époque de Ptolémée; elles ont été faites à Alexandrie avec le secours de l'astrolabe.

Bien qu'il apporte au texte des observations et à la traduction, édition de 1551, dont il fait usage, un grand nombre de corrections nécessaires, Lalande ne parvient pas à concilier tous les résultats. Nous possédons aujourd'hui des données beaucoup plus précises, qui nous dispenseront de recourir aux observations inscrites dans l'*Almageste*. Toutefois, nous conserverons ici le résultat du travail de Lalande sur ces anciennes déterminations astronomiques. Peut-être trouvera-t-on quelque intérêt à les comparer à la théorie, non pour la corriger, mais pour apprécier le degré d'exactitude auquel étaient parvenus les anciens astronomes.

*Anciennes observations de Mercure, rapportées dans l'*Almageste.

TEMPS MOYEN DE PARIS (compté de midi).				LONGITUDE de Mercure.
264	avant J.-C.	14 novembre	$15^h 16^m$	212° 47′
261	»	11 février	15.38	291.48
261	»	25 avril	4.31	53. 8
261	»	23 août	4.42	168.58
256	»	28 mai	4.56	88.49
244	»	18 novembre	15.20	211.52
236	»	29 octobre	15. 0	193.44

	TEMPS MOYEN DE PARIS (compté de midi).		LONGITUDE de Mercure.
130 après J.-C.	4 juillet	$6^h 21^m$	127° 22′
132 »	2 février	4. 6	332. 2
134 »	3 juin	13.55	49.48
134 »	2 octobre	15.28	171.15
135 »	5 avril	5.13	35.23
138 »	4 juin	6.10	98. 4
139 »	17 mai	5.54	78.34
139 »	4 juillet	13.57	81. 9
141 »	1er février	16.46	284.34

Nous ne nous arrêterons pas aux observations de distances, faites vers la fin du XVIIe siècle par Hévélius, Halley..... Elles ne supportent pas, pour l'exactitude, la comparaison avec les observations qu'on commençait à faire des passages de la planète sur le Soleil. Ces passages, joints aux observations méridiennes actuelles, font connaître avec une grande précision les éléments de l'orbite et leurs variations.

I. — *Observations des passages de Mercure sur le disque du Soleil.*

Passage du 7 novembre 1631.

Après avoir publié les Tables Rudolphines en 1627 et en avoir déduit ses éphémérides des positions apparentes des planètes, Képler annonça qu'un passage de Mercure sur le Soleil aurait lieu en 1631. (Jo. Kepleri *Admonitio ad astronomos rerumque cœlestium studiosos de miris rarisque anni* 1631 *phænomenis, Veneris putà et Mercurii in Solem incursu. Lipsiæ*, in-4°, 1629.)

Gassendi se prépara, en conséquence, à observer le phénomène par les mêmes procédés qu'il employait pour les taches du Soleil et les éclipses, c'est-à-dire en recevant dans une chambre obscure l'image du Soleil sur un écran. Cette image avait, dans le cas actuel, 9 pouces de diamètre. Gassendi a rendu compte de son observation dans une lettre à Schickard, sous le titre *Mercurius in Sole visus, et Venus invisa. Parisiis, anno* 1631.

L'observation fut contrariée par l'état très-variable de l'atmosphère. En outre, Gassendi ne reconnut pas Mercure dès qu'il l'eut aperçu sur le disque du Soleil. On attribuait alors aux planètes des diamètres beaucoup plus grands que les véritables, en sorte qu'en voyant Mercure si petit, Gassendi le prit pour une tache. « Quis verò sibi persuasisset potuisse Mercurium in terris appellari τριςμεγιστον, » eundemque posse jam in cœlis τριςελαχιστον apparere? » Plus tard, lorsque

Gassendi vint à reconnaître, par le mouvement de la prétendue tache, qu'il avait Mercure sous les yeux, l'Aide qui devait observer la hauteur du Soleil, pour fixer l'heure des observations, las d'attendre, avait quitté son poste. Le moment de la sortie, où le centre de la planète se trouve sur le bord du Soleil, fut seul observé avec quelque succès, et Gassendi en rend compte en ces termes :

« Si quicquam egregiè adnotatum habeo, ipsum tempus est, quo Mercurius à » limbo Solis medius excessit. Tunc enim Sol præcipuè clarus (etsi non diù cla- » ruerit) ipseque eò fui præsertim attentus. Itaque prædictus excessus contigit » alto jàm Sole 21.gr. 44 min. Ex quibus si detraxeris 5 minuta ob refractionem » (certè et in ipsa meridie Sol altus deinceps gr. 24. min. 58. elevatior æquo est » visus minutis propè 4, respectu saltem habito observationum æstivarum) resti- » tueris verò propter parallaxin Tychonicam minuta 3, prodibit correcta Solis alti- » tudo 21 gr. 42 min. Tumque si ex hâc, et ex declinatione austrina Solis 16 gr. » 19 min. (utpote Sole occupante 14 gr. 42 $\frac{3}{4}$ min. ♏) itèmque ex elevatione poli » Parisiensis 48 gr. 52 min. ratiocinari libeat, perspicuum evadet Mercurium ex- » cessisse è limbo Solis prædicta die VII, manè, hora X, min. XXVIII. »

Indépendamment de la difficulté physique de l'observation même de la sortie, on peut craindre quelque incertitude dans la mesure des hauteurs du Soleil. La hauteur méridienne, donnée comme résultant de l'observation, est trop forte de près de sept minutes d'arc : or, si ce fait provenait de l'inexactitude de l'instrument employé, la hauteur prise au moment de la sortie de Mercure pourrait également être fausse, auquel cas le temps du phénomène serait mal connu. Mais peut-être la difficulté provient-elle uniquement de quelque erreur de copie.

En empruntant la déclinaison du Soleil aux Tables données dans le Chapitre XIV, ($-16^\circ\,18'\,28''$ au moment de la sortie du centre de Mercure), acceptant $48^\circ\,51'$ pour la latitude du lieu de l'observation et réduisant la hauteur du Soleil à $21^\circ\,41'\,43''$ en raison de la réfraction et de la parallaxe, on trouve que le centre de la planète a été observé sur le bord du disque du Soleil, le 7 novembre, à $10^h\,27^m\,46^s$ temps vrai, ou, en temps moyen, $10^h\,11^m\,51^s$ (matin).

Il est utile de remarquer qu'un changement d'une minute d'arc dans la hauteur du Soleil modifierait de 15 secondes le temps du phénomène.

Cette observation ne présente d'intérêt que parce qu'elle est la première de ce genre. Comme on ne peut répondre de son exactitude, je ne l'ai pas calculée.

Passage du 3 *novembre* 1651.

Il n'a été vu qu'imparfaitement à Surate, dans les Indes, par Skakerley.

Passage du 3 *mai* 1661.

Suivant Hévélius, qui a observé ce passage à Dantzick, les diverses Tables astro-

nomiques indiquaient des époques fort différentes pour la conjonction de Mercure. On aurait eu, en effet, selon les Tables employées :

	TEMPS DE LA CONJONCTION.	
		h m s
Tabulæ Danicæ.........	1 Maji post meridiem.........	10.41. 3
Tabulæ Rudolphinæ.....	3 Maji manè	6.47.45
Tabulæ Philolaicæ	3 Maji post meridiem.........	2.36.49
Tabulæ Lansbergii	5 Maji post meridiem.........	11.23.56
Tabulæ Prutenicæ.......	6 Maji post meridiem.........	10. 6.11
Tabulæ Alphonsinæ	11 Maji manè.................	2.44.55

En conséquence, Hévélius surveilla l'arrivée du phénomène dès le 1er mai. Ce fut le 3 seulement, dans l'après-midi, qu'il aperçut Mercure sur le disque du Soleil. Le compte rendu des observations ainsi faites et des conséquences qu'Hévélius en a tirées se trouve dans son ouvrage intitulé : *Johannis Hevelii Mercurius in Sole visus Gedani, anno christiano MVCLXI d. III Maji S. N..... Gedani, autoris typis et sumptibus..... anno MVCLXII.*

L'entrée n'a point été vue par Hévélius, à cause de l'état du ciel. La sortie ne fut point visible à Dantzick, le Soleil s'y étant couché lorsque Mercure n'était encore parvenu qu'aux deux tiers de la corde qu'il a parcourue. Mais on trouve, à la page 70 de l'ouvrage d'Hévélius, une figure du disque du Soleil sur laquelle est tracée la route apparente suivie par Mercure; et sur cette route sont marqués sept lieux de la planète, dans lesquels elle a été observée. Hévélius divise en 500 parties la corde parcourue sur le Soleil par Mercure, et mesurant la distance de la planète à l'extrémité de la corde (lieu de l'entrée), il donne les résultats suivants :

TEMPS VRAI de Dantzick.	DISTANCE DE MERCURE au lieu de l'entrée.
h m s	
3. 4. 0	55 parties.
4.26. 0	138 »
5. 0.35	179 »
5. 6.20	183 »
5.15.15	195 »
5.29.40	208 »
7.21.53	331 »

On doit regretter qu'Hévélius ne donne pas de renseignements suffisants sur la marche qu'il a suivie pour obtenir son tracé et effectuer les mesures qu'il rapporte. La première position, prise rapidement par un ciel mauvais, semble pouvoir être omise. Hévélius fait remarquer que la position assignée à Mercure par la dernière observation se trouvait de 27″ au-dessous de la route résultant des autres

déterminations; et il attribue ce fait à l'influence des parallaxes du Soleil et de Mercure. En conséquence, pour obtenir la vraie position de Mercure, il le relève suivant la verticale, jusqu'à la rencontre de celle-ci avec l'orbite apparente fournie par les autres observations.

Que l'influence des parallaxes ait dû baisser le lieu apparent de Mercure, cela n'est pas douteux. Cet effet est toutefois beaucoup moindre que ne l'indique Hévélius, et il est à croire que le Soleil se trouvant à moins de $1^{\circ}\frac{1}{2}$ de l'horizon, au moment de la dernière observation de Mercure, la déformation de son disque aura influé sur l'exactitude de la mesure. Nous attribuerons donc une moindre valeur à cette dernière observation.

En concluant l'instant du milieu du passage au moyen des six dernières mesures, on trouve :

	h m s
Milieu du passage, temps vrai de Dantzick	6. 7. 4 Soir
Équation du temps..............................	11.56.24
Longitude ouest de Dantzick......................	22.54.43
Temps moyen du milieu du passage...............	4.58.11 Soir

Passage du 7 novembre 1677.

Ce passage a été observé à Avignon, par Gallet, à la chambre obscure. Je ne ferai point usage de ses observations; je m'attacherai à celles qui furent obtenues par Edmond Halley, à Sainte-Hélène. (Longitude, $32^{m}\,13^{s}$ à l'ouest du méridien de Paris; latitude, $15^{\circ}\,55'$ australe.)

Halley employa un télescope long de 24 pieds. Ses observations sont rapportées, en temps vrai de Sainte-Hélène, ainsi qu'il suit, à la fin de son *Catalogue des estoiles australes*, imprimé à Paris en 1679.

In insulâ Sanctæ Helenæ, anno 1677, stil. vet.

h m s
9.20.35 A. M. Sol purus videbatur.
9.26.17 Limbus Solis à Mercurio temeratus, facta quasi denticula, decem grad. à Nadir Solis ad dextram circiter.
9.27.30 Erat totus Mercurius intrà Solem, efficiens angulum contactûs.
2.38.39 P. M. Distantia limbi proximi Mercurii à limbo Solis non excederet Mercurialem diametrum.
2.40. 8 Limbus Mercurii attigit Solis limbum.
2.41. 0 Centralis egressus, 30 gr. circiter à Nadir ad dextram.
2.41.54 Solis limbus inter factus.

La *troisième* et la *cinquième* observation répondent au premier et au second contact interne. La sortie a duré $1^{m}46^{s}$, quantité qu'on peut croire assez exacte, parce que le commencement et la fin sont également distants du moment observé

de la sortie du centre. On trouve pour les deux phases principales :

	1er CONTACT interne.	2e CONTACT interne.
	h m s	h m s
Temps vrai de Sainte-Hélène	9.27.30 Matin	2.40. 8 Soir
Équation du temps	— 15.54	— 15.54
Longitude ouest de Sainte-Hélène	+ 32.13	+ 32.13
Temps moyen de Paris	9.43.49 Matin	2.56.27 Soir

Passage du 10 *novembre* 1690.

Suivant le P. de Fontanay, qui observait à Canton (longitude, $7^h 23^m 46^s$ E.; latitude + 23° 8′ 9″), Mercure parut à moitié sorti à $3^h 13^m 50^s$ de l'après-midi (temps de l'horloge non corrigé) : sortie entière à $3^h 14^m 48^s$. La planète parut toujours sur le Soleil comme une tache noire et fort ronde.

Trois observations de hauteurs correspondantes du Soleil s'accordent à donner $3^m 15^s$ pour la correction du temps de l'horloge. On en conclut que Mercure parut à moitié sorti à $7^h 53^m 19^s$ (matin), temps vrai de Paris. La sortie entière eut lieu 58^s plus tard.

L'observation de la sortie a encore été faite à Nuremberg (longitude $34^m 58^s$ E. : latitude + 49° 27′ 30″) par Wurtzelbaur, qui en rend compte en ces termes :

« Tubum illò ubi emersio Solis è nubibus expectanda erat direxi ; et postquam » emergens ejus discus ad tabulam observatoriam affluxerat..... (Ainsi Wurtzelbaur observait sur l'image du Soleil). Tandem cùm limbi mutuo contactu se » stringerent..... et postquàm limbus uterque ad minutum ferè sibi invicem » adhæsitare viderentur, H. 8. Min. 36, oscillatorii nostri, Mercurius totus disco » exiisse observatus est. »

Suivent des observations de Pégase et d'Andromède, des hauteurs du Soleil pour avoir la correction du temps de l'horloge. Ces mesures donnent des résultats fort peu concordants. Et par ce motif, aussi bien que par l'incertitude de la constatation physique du moment de la sortie, il nous paraît que l'observation de Nuremberg doit être laissée de côté.

Passage du 3 *novembre* 1697.

Les deux phases principales de la sortie ont été observées à Paris par Cassini, qui en rend compte ainsi qu'il suit :

Horâ 8.$8^m 38^s$, margo præcedens Mercurii pervenit ad Solis marginem præcedentem.

Horâ 8.$10^m 24^s$, Mercurius totus emersit è Solis disco telescopio pedum 18 observatus.

L'équation du temps étant de $11^h 43^m 52^s,6$, le second contact interne a eu lieu à $7^h 52^m 30^s,6$ de temps moyen (matin).

A Nuremberg, « Wurtzelbaur observed Mercury to go off the disk of the Sun » at 8h 45m 30s mane (8h 10m 32s, temps vrai de Paris). Mais ce dernier astronome s'étant servi de la chambre obscure, je ne ferai usage que de l'observation de Cassini.

Passage du 6 *mai* 1707.

Les Tables de Mercure par de Lahire se trouvaient d'accord, en 1701 et 1705, avec des observations méridiennes. Suivant l'observation méridienne du 12 avril 1707, elles étaient encore exactes. De Lahire se croyait donc certain d'avoir prédit juste en annonçant pour le 5 mai un passage de Mercure sur le Soleil, visible à Paris. Le 5 mai, cependant, le Soleil fut visible toute la journée, depuis son lever jusqu'à son coucher, et l'on n'aperçut aucune trace du passage annoncé. Il n'eut effectivement lieu que dans la nuit suivante, et la fin fut entrevue à Copenhague par Rœmer, le 6 mai au matin. Les nuages empêchèrent Rœmer de prendre aucune mesure exacte.

Passage du 9 *novembre* 1723.

L'entrée de Mercure sur le Soleil a été observée dans plusieurs observatoires et par divers astronomes. Malheureusement, lorsque la sortie eut lieu, le Soleil était déjà sous l'horizon, même pour les contrées les plus occidentales de l'Europe.

Le tableau suivant résume les principaux résultats de l'observation.

		1re impression.	1er contact intérieur.	
		Temps apparent du lieu.	Temps apparent du lieu.	Temps vrai à Paris.
		h m s	h m s	h m s
Cassini.......	Paris..........	2.50.52	2.51.48 Soir	2.51.48 Soir
Maraldi......	Id..............	2.50.13	2.51.48	2.51.48
Halley.......	Greenwich....	2.41.23	2.42.26	2.51.47
Bradley......	Wansted......	»	2.42.38	2.51.50
Manfredi....	Bologne.......	3.26.22	3.27.45	2.51.43
Poleni.......	Padoue.......	»	3.29.54	2.51.47

L'observation de Poleni a été faite à la chambre obscure. Les temps du premier contact intérieur, ramenés dans la dernière colonne au même méridien, ne seraient comparables entre eux qu'en les corrigeant de l'effet de la parallaxe.

Passage du 11 *novembre* 1736.

C'est le premier qui ait été observé complétement à Paris. Les observations les plus exactes ont été faites en France. Nous réunissons celles sur lesquelles on

peut compter, en ajoutant 7ˢ aux temps observés à Thury, et retranchant 6ᵐ 10ˢ des temps observés à Montpellier, afin de les réduire tous au temps vrai de Paris.

		1ʳᵉ impression.	1ᵉʳ contact interne.	2ᵉ contact interne.	2ᵉ contact externe.
		h m s	h m s	h m s	h m s
Paris, Observatʳᵉ.	Maraldi.........	9.32.40 Matin	9.35.15 Matin	0.15. 5 Soir	0.18.11 Soir
Id............	Cassini de Thury.	9.32.45	9.35.10	0.15.18	0.18.18
Thury..........	Cassini..........	9.32.56	9.35.21	0.15. 6	0.17.49
Montpellier......	De Plantade.....	9.32.45	9.35.17	0.15. 2	0.18. 8

Quelques astronomes ont encore observé ce passage à la chambre obscure. Leurs résultats sont de nature à ôter tout crédit à une observation isolée faite par ce procédé. Les durées du passage, observées par quatre astronomes différents, varient depuis 2ʰ 37ᵐ 32ˢ jusqu'à 2ʰ 43ᵐ 53ˢ; c'est-à-dire qu'il y a plus de six minutes de différence entre les résultats extrêmes. Or, chaque minute de temps équivaut à 17″,7 de degré en longitude héliocentrique à l'instant de l'entrée, et à 10″,3 à l'instant de la sortie. Dans les passages de mai, le mouvement relatif est plus lent, et l'erreur du temps a moins d'influence; mais, d'un autre côté, l'observation est plus difficile, les chances de l'erreur sur le temps variant en raison inverse du mouvement relatif : l'erreur en longitude doit donc être à peu près la même dans tous les cas.

Dans les passages de 1736 et de 1743, les astronomes ont pris, par un grand nombre de mesures micrométriques, la position relative de Mercure pendant qu'il passait sur le Soleil. Si l'on consulte les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour ces deux années, on verra que les résultats qu'on en a déduits, relativement à l'instant de la conjonction, sont très-différents entre eux. Ils laisseraient dans la longitude héliocentrique des incertitudes bien supérieures aux petites erreurs dont sont susceptibles les observations de l'entrée et de la sortie. C'est ce qui m'a déterminé à ne faire usage que des observations des contacts dans les équations de condition.

Passage du 2 mai 1740.

L'entrée a été observée à Cambridge, États-Unis d'Amérique (longitude 4ʰ 53ᵐ 52ˢ Ouest; latitude $+42° 22' 21''$) par Wintrop. Cet observateur rend compte de ses résultats en ces termes.

At 4ʰ 54ᵐ 59ˢ, I perceived that Mercury had made an impression on the Sun's limb; by the quantity of wich I concluded, that almost One quarter of his diameter might be entered. After I had beheld this very plainly about a Minute, a

small Cloud covered the Sun near 3^m; wich then clearing off, and the Sun shining very bright, as before, I had again a distinct view of the planet, and saw much more than half his body on the Sun. I continued to see him till $5^h 0^m 40^s$, at wich time he seemed to be gotten almost wholly within the Sun; for he appeared now very near round, though I could not yet discern the Sun's light behind him. By the shaking of the Tube, I unfortunately missed the Moment of his interior Contact with the sun's Limb, but am certain it could be but very little later than this; for I presently after saw him fairly within the sun.

Comme on le voit, l'instant décisif de l'observation est manqué par accident : et cela est d'autant plus fâcheux, que c'eût été la première observation d'un contact de Mercure avec le Soleil, vers le nœud descendant de la planète. Craignant que les autres parties de l'observation ne fussent également peu soignées, je n'ai fait aucun usage de ce passage.

Passage du 5 novembre 1743.

Il a été observé complétement à Paris. A Cambridge, États-Unis (longitude $4^h 53^m 52^s$ Ouest ; latitude $+ 42° 22'$), la sortie a été déterminée par Wintrop. En réduisant les temps observés dans cette dernière ville en temps vrais de Paris, on a les données suivantes :

		1re IMPRESSION.	1er CONTACT interne.	2e CONTACT interne.	2e CONTACT externe.
		h m s	h m s	h m s	h m s
Paris..........	LACAILLE	8.39.44 Matin	8.40.38 Matin	1.10. 3 Soir	1.11.58 Soir
Id	MARALDI	8.39.46	8.40.46	1.10.17	1.12.18
Id	CASSINI fils	8.39.34	8.40.34	1.10.26	1.12.24
Cambridge (E. U)	WINTROP.......	»	»	1.10.57	1.12.50

Selon La Caille, le Soleil était peu élevé et était ondoyant au moment de l'entrée; on ne vit Mercure avec évidence que lorsqu'il était déjà à moitié sur le bord du disque du Soleil. Maraldi rapporte qu'un grand vent agitait sa lunette, ce qui a rendu douteuses les observations des phases.

Passage du 6 mai 1753.

Les Tables de Mercure qu'on possédait à cette époque, différaient beaucoup sur l'instant de l'entrée; celles de Lahire l'indiquant pour le 5 mai au soir, et celles de Halley pour le 6 mai à $6^h 30^m$ du matin. Ces grands écarts provenaient du trop petit nombre d'observations que les auteurs avaient employées à la construction des Tables.

L'entrée eut lieu, pour Paris, pendant la nuit; en sorte qu'on n'a pu y observer que la sortie. Aucune observation des deux premières phases n'a été faite en

Orient. Voici, pour les deux dernières, les résultats obtenus par divers observateurs; les temps sont tous réduits au temps vrai de Paris.

		2ᵉ CONTACT interne.	2ᵉ CONTACT externe.
		h m s	h m s
Paris, Observatoire royal	DE THURY	10.19. 3 Soir	10.21.42 Soir
	LE GENTIL	10.18.47	10.21.42
	KERANSTRET	10.19. 1	10.21.31
Id. Rue des Fossés-St-Victor.	BOUGUER	10.18.40	10.21. 9
Id. Hôtel Clugny	DE LISLE	10.18.41	10.21.21
Id. Collége Louis-le-Grand	DE MERVILLE	10.18.38	10.21.45
	LIBOUR	10.18.37	10.21.30
Rouen, 3ˢ à l'occident de la cathédrale	BOUIN	10.19.18	10.21.39
	DE PREMAGNY	10.19.17	10.21.41
Londres, Short's House, 26ˢ à l'ouest de Greenwich	SHORT	10.19. 5	10.21.40
	BEVIS	10.18.58	10.21.36

Passage du 6 *novembre* 1756.

La conjonction inférieure de Mercure avec le Soleil eut lieu pendant la nuit du 6 au 7 novembre.

Ximenès, à Florence, ayant joui d'un très-beau temps au lever du Soleil, le 7 novembre, observa Mercure sur son disque pendant environ 10 minutes. Il détermina fort exactement (dit La Caille) le contact intérieur des bords à $7^h 58^m 53^s$, et le contact extérieur à $8^h 1^m 4^s$. La dernière détermination lui parut incertaine d'environ 8^s de temps.

L'observation a été faite complétement, à Pékin, par les PP. Gaubil et Amiot, dans le palais de l'empereur, résidence des Jésuites français. Leurs résultats me paraissent défectueux et inconciliables avec ceux qu'on déduit des autres passages. Je transcris toutefois leur observation complète, en temps vrai du méridien de Pékin, sauf à la discuter plus tard.

	MERCURE à moitié entré.	1ᵉʳ CONTACT interne.	2ᵉ CONTACT interne.	SORTIE TOTALE.
	h m s		h m s	h m s
AMIOT	9.31.12 Matin	»	14.54.20 Soir	14.56. 4 Soir
GAUBIL	9.30.51	$9^h 31^m 54^s,5$ Matin	14.54.25	14.56.31

La longitude de Pékin étant de $736^m 34^s$ à l'Est de Paris, l'équation du temps étant de $11^h 43^m 59^s,3$, le premier contact interne a donc été observé à $1^h 39^m 19^s,8$ de temps moyen, et le second contact interne à $7^h 1^m 47^s,8$ (matin du 6 novembre).

Passage du 9 novembre 1769.

L'entrée a été observée à Philadelphie (long. $= 5^h 10^m 3^s$ Ouest ; lat. $= +39°57'2''$), et à Norriton (long. $= 5^h 10^m 55^s$ Ouest ; lat. $= +40°9'56''$). En ramenant tous les résultats au temps vrai du méridien de Paris, on trouve :

		1er contact externe.	1er contact interne.
Philadelphie	Williamson	7.46. 8 Soir ($^{h\ m\ s}$)	7.47.33 Soir
	Shippen	7.46.15	7.47.43
	Evans	7.46.12	7.47.41
	Ewing	7.46.12	7.47.33
Norriton	Smith	7.46.12	7.47.30
	Lukens	7.46.12	7.47.28
	Rittenhouse	7.46.12	7.47.30

L'accord des observateurs sur la première phase, nécessairement si incertaine, est très-grand : ils mentionnent expressément que leurs observations sont indépendantes les unes des autres.

La sortie a été observée à Batavia (long. $= 6^h 58^m 12^s$ Est ; lat. $= -6° 8' 55''$) et à Manille (long. $= 7^h 54^m 35^s$ Est ; lat. $= +14°35' 26''$). En ramenant toujours les observations au temps vrai du méridien de Paris, on a :

		2e contact interne.	2e contact externe.
Batavia	Mohr	Nov. 10j 0.35.20 Matin ($^{h\ m\ s}$)	Nov. 10j 0.36.59 Matin
Manille	Veron	0.35.19	0.36.49

Passage du 12 novembre 1782.

Il a été vu complétement à Paris. Les discordances qui existent entre les instants donnés par les différents astronomes, pour une même phase, sont très-propres à montrer combien on doit quelquefois avoir une juste défiance des observations isolées. Voici les données recueillies à Paris, en temps vrai de l'Observatoire :

		1re impression.	1er contact interne.	2e contact interne.	Mercure sorti.
Paris	Lalande	»	3. 4.55 Soir ($^{h\ m\ s}$)	»	»
Id	Messier	$2^h 58^m 43^s$ Soir	3. 4.21	»	»
Id	Le Gentil	»	3. 4.24	$4^h 18^m 7^s$ Soir	»
Id	Cassini fils	2.58.35	»	4.17.19	$4^h 22^m 49^s$ :: Soir
Id	Dagelet	»	3. 2.38	4.16. 8	»
Id	Méchain	2.59.30	3. 2. 8	4.17.46	»
Id	Lemonnier	2.58.53	3. 1.48	»	»

Méchain assure que son observation du second contact interne n'est incertaine que de 5ˢ au plus.

Ainsi, les différences entre les observateurs s'élèvent, pour le premier contact interne, à plus de 3ᵐ, et à près de 2ᵐ pour le second contact interne. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on ait souvent de pareilles incertitudes à redouter. L'inégalité des résultats vient ici de ce que la latitude de Mercure étant presque égale au demi-diamètre du Soleil, la planète n'a décrit qu'une très-petite corde du disque de cet astre; la projection du mouvement relatif de Mercure sur le rayon du Soleil, passant au point de contact, était très-peu sensible. De plus, le Soleil était très-bas sur l'horizon, surtout à l'instant de la sortie; l'ondulation et la dentelure de son bord étaient extrêmes. Nous pourrons cependant déduire de ce passage de 1782 de bons résultats; on comprend en effet qu'il est très-propre à donner avec précision la latitude de la planète.

Le passage de 1782 a encore été observé à Cambridge aux États-Unis (longitude = $4^h\,53^m\,52^s$ Ouest; latitude = + 42° 22′). En ramenant les résultats au temps vrai du méridien de Paris, on a :

		1ʳᵉ impression.	1ᵉʳ contact interne.	2ᵉ contact interne.	Sortie.
		h m s	h m s	h m s	h m s
Cambridge.	Williams...	2.59.52 Soir	3. 5.59 Soir	4.17. 0 Soir	4.23.11 Soir
Id.....	Wintrop...	»	3. 6. 5	4.16.57	»
Id.....	Paine.......	»	»	4.15.57:	»

Passage du 4 mai 1786.

On sait que les Tables de Lalande ayant indiqué la sortie 53ᵐ trop tôt, elle fut manquée à Paris par la plupart des astronomes, Messier et Delambre exceptés. La sortie a encore été observée à Louvain (longitude = $9^m\,26^s$ Est; latitude = + 50° 53′ 26″).

L'entrée et la sortie, 1ᵉʳ et 2ᵉ contacts internes, ont été déterminées à Upsal (longitude = $1^h\,1^m\,13^s$ Est; latitude = + 59° 51′ 50″); à Saint-Pétersbourg (longitude = $1^h\,51^m\,52^s$ E.; latitude = + 59° 56′ 31″); à Mittaw (long. = $1^h\,25^m\,33^s$ E.; lat. = + 56° 39′ 4″); enfin à Bagdad (long. = $2^h\,48^m\,9^s$ E.; lat. = + 33° 19′ 50″).

En réunissant les diverses données et réduisant tous les temps au méridien de Paris (temps vrai), on trouve :

		1er contact interne.	2e contact interne.	Sortie.
			h m s	h m s
Paris	Messier	»	8.36.27 Matin	8.39.56 Matin
	Delambre	»	»	8.39.56
Louvain	Pigott (Nathan)	»	8.36.15	8.40. 2
	Pigott (Edward)	»	8.36. 5	8.39.56
Upsal	Prosperin	»	8.35.27	8.40. 8
	Son Assistant	»	8.35.27	8.39.58
Pétersbourg	Inochodzow	3h 11m 21s Matin	8.35.20	»
	Rumowski	3.10.27	8.35. 3	»
	Tzernoi	»	8.35.15	»
Mittaw	Beitler	3.11.53	8.35.30	»
Bagdad	De Beauchamp	3.11.56	8.34.43::	»

Passage du 5 novembre 1789.

Le premier contact interne a été observé à Paris : les deux phases de la sortie ont été déterminées à Montevideo (longitude $= 3^h 54^m 14^s$ O. ; latitude $= -34° 54' 8''$) par Galiano, Vernacci et de la Concha. En ramenant toutes les données au temps vrai de Paris, l'on a :

		1er contact interne.	2e contact interne.	Sortie totale.
		h m s		
Paris	Cassini	1.19. 5,8 Soir	»	»
	Delambre	1.19. 2,0	»	»
	Messier	1.18.54,0	»	»
	Méchain	1.19. 0,0	»	»
Montevideo	»	»	6h 9m 25s Soir	6h 11m 8s Soir

Passage du 7 mai 1799.

Les résultats des observations, rassemblés dans le tableau suivant, sont tous exprimés en temps vrai de Paris :

		1er contact externe.	1er contact interne.	2e contact interne.	2e contact externe.
		h m s	h m s	h m s	h m s
Paris	Delambre	9.20.53 Matin	9.23.53 Matin	4.41.48 Soir	4.44.49 Soir
	Messier	9.20.25	9.23.35	4.42. 6	»
	Pommard	»	9.23.51	4.41.37	4.44.46
Mirepoix	Vidal	»	9.23.44	4.41.50	»
Marseille	Thulis	9.21. 1	9.23.47	4.42. 3:	4.44.38
Berlin	Bode	»	9.23.15	4.41.47	»
Montauban	Duc la Chapelle	»	9.23.37	»	»
Gotha	De Zach	»	9.23.25	»	»
Madrid	Chaix	»	9.23.52	»	»
Manheim	Barry	»	»	4.41.42	»
Genève	Pictet	»	»	4.41.40	»
Greenwich	Maskelyne	»	»	4.41.48	»
	Nisbet	»	»	4.41.58	»
	Wilson	»	»	4.41.38	4.44.25
	T. F.	»	»	4.41.52	4.44.13

Passage du 9 novembre 1802.

C'est le dernier dont Lalande, qui s'est occupé si longtemps de Mercure, ait fait usage. « Je l'ai observé, dit Lalande, avec délices, dans le même endroit où il le fut la première fois par Gassendi, l'un de mes plus illustres prédécesseurs au Collége de France. »

On n'a observé, en 1802, que la sortie. Voici les instants obtenus, ramenés au temps vrai de l'Observatoire de Paris.

		2ᵉ CONTACT interne.	SORTIE.
		h m s	h m s
Paris	MECHAIN	o. 6.45 Soir	o. 8.30 Soir
	MESSIER	o. 6.49	o. 8.20
	BURCKARDT	o. 6.45	o. 8.20
	BOUVARD	o. 6.54	o. 8.19
	LALANDE (neveu)	o. 6.44	o. 8.19
Greenwich	T. F	o. 6.42	o. 8.22
	R. B	o. 6.42	o. 8.19
Lilienthal	SCHROTER	o. 6.45	o. 8.15
	HARDING	o. 6.39	o. 8.18
Amsterdam	KEIZER	o. 6.46	o. 8.18
Leipzig	RUDIGER	o. 6.41	o. 7.59

Passage du 5 novembre 1822.

Ce passage, qui a eu lieu dans la nuit pour Paris, a été observé le matin du 5 novembre à Calcutta (longitude $= 5^h 44^m 4^s$ E.); latitude $= + 22° 33'$), à Kurnaul (longitude $= 4^h 58^m 55^s$ E.; latitude $= + 29° 41' 25''$), à Paramatta (longitude $= 9^h 54^m 43^s$ E.; latitude $= - 33° 48' 45''$) et à Sidney (longitude $= 9^h 55^m 34^s$ E.; latitude $= - 33° 51' 40''$).

Voici les instants des différentes phases, en temps *moyen* de Paris, compté à partir du midi du 4 novembre :

		1ʳᵉ IMPRESSION.	1ᵉʳ CONTACT interne.	2ᵉ CONTACT interne.	SORTIE.
			h m s	h m s	h m s
Calcutta	HODGSON	»	13.12.12 ::	15.54.30	15.56.52
	HERBERT	»	»	15.54.38	15.56.51
Kurnaul	W. EWER	»	»	15.54.51	15.57.21
Paramatta	RUMKER	$13^h\ 9^m 56^s$	13.12.37	15.54.25	15.57.24
Sidney	BRISBANE	13. 9.49	13.12.32	15.54.27	15.57.26

L'instant du 1ᵉʳ contact intérieur, observé à Calcutta, est marqué douteux. L'observateur avertit qu'on n'y doit pas compter à 4^s à 5^s près.

Passage du 5 mai 1832.

Un grand nombre d'observatoires étant aujourd'hui répandus sur la surface du

globe, les passages de Mercure seront désormais plus complétement observés. Malgré des circonstances atmosphériques défavorables en Europe, on a recueilli sur le passage de 1832 un grand nombre de données, parmi lesquelles nous avons choisi les suivantes :

	Longitude du lieu.	Latitude du lieu.		Temps moyen de Paris. 1er contact interne.	2e contact interne.	Sortie.
	h m s			h m s	h m s	h m s
Kœnigsberg	+1.12.39	+ 54°43′	Bessel	9.12. 0 Matin	3.54.59 Soir	3.58.22 Soir
			Argelander	»	3.55. 0	3.58. 9
			Bush	»	3.55. 0	3.57.55
Cap de Bonne-Espérance	+1. 4.33	− 33.56	Henderson	9.14.39	3.53.52	»
Breslau	+0.58.49	+ 51. 7	Boguslawski	9.12.14	3.54.50	3.58. 9
Padoue	+0.38.10	+ 45.24	Santini	9.11.49	3.54.52	3.57.47
Gottingue	+0.30.24	+ 51.32	Gauss	»	3.55. 8	»
Utrecht	+0.11. 9	+ 52. 5	Moll	9.12.16	3.54.58	3.58. 6
			Fockens	9.12.16	3.54.50	3.58. 9
			Van Beek	9.12.16	3.55. 0	3.58. 1
Leyde	+0. 8.38	+ 52. 9	Kaiser	9.12.12	»	»
			Uylenbrock	9.12. 4	»	»
Bruxelles	+0. 8. 7	+ 50.51	Quetelet	»	3.54.45	»
Lisbonne	+0.46. 1	+ 38.42	Fisher	9.12. 5	3.54.57	3.58.17
Sainte-Croix	−4.28. 4	+ 17.45	Lang	»	3.56. 2	3.59.15
Lima	−5.17.51	− 12. 3	Scholtz	»	3.56.47	4. 0. 1[illegible]

Malgré une violente tempête et nonobstant les nuages qui passèrent fréquemment devant le Soleil, Bessel recommande son observation comme étant excellente. Outre la détermination des instants des phases, Bessel a été attentif aux observations et aux mesures nécessaires pour prononcer sur le phénomène de l'irradiation, sur la figure et sur le diamètre de Mercure.

Sous la dénomination d'*irradiation solaire*, on comprend la propriété qu'aurait le disque lumineux du Soleil de paraître un peu plus grand angulairement qu'il ne l'est en réalité. On a été conduit à cette hypothèse par différentes particularités des éclipses de Soleil. Dans les passages de Vénus et de Mercure, on a cru remarquer que le trait lumineux qui apparaît au moment du premier contact interne prenait instantanément une largeur appréciable; et qu'au moment du second contact interne, le trait lumineux se brisait brusquement, ayant encore une largeur notable et sans passer par tous les états d'un affaiblissement progressif. On admettait donc que le premier rayon lumineux qui, au moment du premier contact interne, venait à jaillir entre les disques des deux astres, étendait aussitôt son impression apparente, d'une part en dehors du vrai disque du Soleil, de l'autre en dedans du vrai disque de la planète; d'où résultait un agrandissement apparent

du diamètre du Soleil et une diminution apparente du diamètre de la planète, tandis que le trait lumineux devait ainsi, au moment de son apparition, prendre instantanément une largeur égale au double de l'amplitude de l'irradiation. Au moment du second contact interne, un phénomène pareil se devait produire, dans un ordre inverse.

Or Bessel n'a observé rien de semblable. Il a vu, au contraire, et très-nettement, le segment lumineux réduit, en son milieu, à une largeur insensible aux moments des deux contacts intérieurs : ce qui est contraire à l'existence supposée du phénomène de l'irradiation. Toutefois Argelander, qui observait avec Bessel, aurait au contraire noté un effet quelque peu sensible de l'irradiation. L'instrument dont se servait Argelander était moins puissant que la lunette de l'héliomètre dont Bessel faisait usage. D'un autre côté, on ne peut douter, en présence des descriptions laissées par les anciens astronomes, qu'un effet pareil à celui que l'irradiation devrait produire n'ait été observé par eux dans les passages de Vénus sur le Soleil. Et en conséquence, Bessel conclut que ce phénomène n'a rien de réel, qu'il est dû aux lunettes et se produit particulièrement avec les plus faibles.

L'héliomètre de Kœnigsberg n'offrant aucunes traces de l'effet de l'irradiation, Bessel estime qu'il est propre à fournir la véritable valeur du diamètre de Mercure. Il conclut de ses mesures que le demi-diamètre est égal à 3",35 à l'unité de distance, et qu'il est le même dans toutes les directions, en sorte que le disque de la planète paraît parfaitement circulaire.

Passage du 8 mai 1845.

Le temps n'a pas, non plus qu'en 1832, favorisé la plupart des observateurs en Europe. Voici les principaux résultats qu'on a pu recueillir, exprimés en *temps moyen* de Paris.

	LONGITUDE du lieu.	LATITUDE du lieu.		1er CONTACT interne.	2e CONTACT interne.	SORTIE totale.
Hambourg....	+0h30m32s	+53°33'	RUMKER......	4h31m54s Soir	»	»
			GOTZE.........	4.32.11	»	»
			FUNK.........	4.32.15	»	»
			OLDE.........	4.32.18	»	»
Nienstedten...	+0.30 1	+53.33	SCHUMACHER...	4.32.19	»	»
			PETERSEN......	4.32.20	»	»
			R. SCHUMACHER.	4.31.56	»	»
Genève......	+0.15.16	+46.12	PLANTAMOUR...	4.32. 6	»	»
Bruxelles.....	+0. 8. 7	+50.51	QUETELET.....	4.32.22	»	»
			HOUSEAU......	4.32.22	»	»
			BOUVY........	4.32.19	»	»
			LIAGRE........	4.32.15	»	»
Cincinnati....	−5.46.57	+39. 6	MITCHEL......	4.33.16	10h56m14s Soir	10h59m43s Soir

Les observations ont été faites à Cincinnati dans les plus favorables circonstances. Le disque de Mercure était nettement défini. L'instant où le premier rayon du Soleil est apparu au bord oriental de la planète a été pris pour le temps du premier contact interne ; on a employé le grand équatorial avec un pouvoir de 360. Le diamètre apparent de la planète, déduit de vingt-six mesures, faites dans les meilleures conditions avec le micromètre filaire, a été trouvé de 11",58.

Passage du 9 novembre 1848.

L'entrée a seule été observée. Voici, *en temps moyen* de Paris, l'instant du premier contact interne, suivant divers observateurs :

	LONGITUDE du lieu.	LATITUDE du lieu.		
Hambourg......	+ 0h.30m.32s	+ 53°.33'	RUMKER......	11h.16m. 8s Matin
			WEYER......	11.16.24
			JURGENSEN....	11.16.26
			BRIGMANN....	11.16.20
Altona.........	+ 0.30.25	+ 53.33	SCHUMACHER..	11.16. 9
			SONNTAG......	11.16. 8
			OLDE........	11.16.16
Genève........	+ 0.15.16	+ 46.12	PLANTAMOUR..	11.16.17
			BRUDERER....	11.16. 9
Cambridge......	— 0. 8.57	+ 52.13	CHALLIS......	11.16. 9
			BREEN.......	11.16. 8
Greenwich.....	— 0. 9.21	+ 51.29	HENRY.......	11.16.20
			ELLIS........	11.16.25
			ROGERSON.....	11.16.34
			DUNKIN......	11.16.28
Regent's Park...	— 0. 9.58	+ 51.32	HIND.........	11.16.24
Durham........	— 0.15.39	+ 54.46	THOMPSON....	11.16.17
Liverpool.......	— 0.21.22	+ 53.25	HARTNUP.....	11.16.15

Telles sont les principales données obtenues par les observations faites jusqu'à ce jour, relativement aux passages de Mercure sur le disque du Soleil. Nous les discuterons dans la Section suivante. Auparavant nous allons présenter les résultats des observations méridiennes que nous ferons concourir à la détermination de la forme de l'orbite de la planète.

II. — *Positions de Mercure déduites des observations méridiennes.*

Les observations méridiennes auxquelles nous aurons recours pour déterminer, concurremment avec les observations des passages sur le Soleil, la forme de l'orbite, se composent de deux séries : l'une comprenant 240 observations faites à Paris, depuis le 8 mars 1801 jusqu'au 22 octobre 1828, l'autre comprenant 157 observations faites également à Paris, depuis le 20 avril 1836 jusqu'au 18 août 1842.

Ces deux séries d'observations ont été réduites antérieurement au travail que nous avons entrepris pour le calcul de l'ensemble des observations méridiennes faites à Paris depuis l'année 1800, travail dont deux volumes ont déjà paru. Il ne nous a point semblé nécessaire de rien changer à nos premières déterminations.

L'erreur de collimation de la Lunette méridienne, l'erreur en azimut et l'erreur du niveau étant toujours fort petites, on s'est dispensé d'y avoir égard, en ayant soin de comparer la planète aux étoiles les plus voisines en déclinaison.

On a choisi *autant qu'il était possible*, pour déterminer l'heure de la pendule, des étoiles fondamentales, observées par le même astronome qui avait observé Mercure. Cette condition, qu'il est bon de remplir, n'élimine pas toutefois les erreurs personnelles et systématiques. Une étoile et une planète telle que Mercure, souvent difficile à voir pendant le jour et mal définie, peuvent certainement être observées d'une manière différente quant au pointé et à l'estime du temps. Aussi remarque-t-on fréquemment, dans les séries d'observations faites par un même astronome, de petites erreurs systématiques que rien ne peut faire disparaître.

Depuis 1836, on observe toujours à Paris le bord éclairé de Mercure; j'ai ramené l'observation au centre de la planète, par la connaissance de son diamètre apparent. Antérieurement, c'est le centre de la planète qui était observé : je n'ai apporté à cet égard aucune réduction aux observations ainsi effectuées.

Les déclinaisons ont été observées jusqu'en 1822 avec le quart de cercle de Bird; et, depuis cette époque, avec le Cercle entier de Fortin. J'ai trouvé plus commode, pendant toute cette période (1800-1822) de déterminer la correction de collimation de l'instrument par les observations du Soleil. J'y ai apporté beaucoup de soin, et la parfaite concordance des résultats déduits de cette marche, a montré qu'elle donnait autant de précision que l'emploi des étoiles.

Pendant la période 1836-1842, on a calculé la correction de collimation pour chaque observation, au moyen d'étoiles prises dans le voisinage du parallèle de Mercure, et observées par le même astronome qui avait observé la planète. Les pointés s'exécutaient alors entre deux fils horizontaux, et il a été constaté qu'ils donnaient naissance à une erreur personnelle à l'observateur. De là, la précaution qu'on vient de mentionner et qu'on a cru devoir prendre, sans se dissimuler que l'erreur peut être différente pour la planète et pour l'étoile.

Nous ne rapporterons pas ici le détail de la réduction des observations, non plus que les positions en ascension droite et en déclinaison. Mais on trouvera dans le tableau suivant les longitudes et les latitudes qui doivent servir de fondement à nos comparaisons.

Pour comparer la théorie avec les observations ainsi réduites, nous devrons,

1° au moyen de nos Tables provisoires, calculer les coordonnées héliocentriques de Mercure pour les temps des observations; 2° au moyen de nos Tables du Soleil, calculer aux mêmes époques les coordonnées de cet astre; 3° en conclure la longitude et la latitude géocentriques apparentes de Mercure.

A l'époque où ce travail de comparaison fut effectué, nous ne possédions pas encore nos Tables du Soleil, et nous dûmes faire usage des Tables de Bessel. Pour remédier à cet inconvénient, nous recherchâmes avec un grand soin, et par la discussion d'un très-grand nombre d'observations, les corrections qui, aux époques des observations de Mercure, devaient être appliquées aux longitudes du Soleil déduites des Tables de Bessel. Grâce à cette précaution, dont l'objet était de ne pas avoir à recommencer un jour la comparaison des observations méridiennes de Mercure, il serait effectivement inutile de la reprendre. La planète a été rapportée au Soleil avec toute l'exactitude que comporte l'ensemble des observations.

Bien que la comparaison de la théorie avec les observations appartienne surtout à la IVe Section du présent Chapitre, on trouvera dès à présent, à côté des longitudes et latitudes observées, l'excès du calcul sur l'observation. La planète passant toujours au méridien dans le milieu du jour, nous avons rapporté l'heure de l'observation en temps civil, compté à partir de minuit.

Longitudes et latitudes géocentriques de Mercure, déduites des observations méridiennes. Comparaison avec les Tables provisoires.

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
1801	Mars	8	13^h.12^m.24^s	4°.39′.26″	0″	1°. 4′.25″,8	− 5″,8	1
	Juin	18	13.12.49	103. 8.15	− 5	1.59. 1,2	+ 2,5	
		19	13.16.52	104.57.59	− 1	1.58.29,7	+ 2,3	2
		20	13.20.43	106.45.27	+ 1	1.57.10,3	+ 7,7	
		28	13.44. 7	119.42. 8	− 3	1.24. 0,1	− 7,2	
		29	13.46. 6	121. 8.33	− 2	1.16.54,9	+ 6,5	
		30	13.47.53	122.32.35	+ 1	1. 9.36,2	− 0,3	3
	Juill.	1	13.49.27	123.54.12	+ 2	1. 1.38,6	+ 1,4	
		2	13.50.49	125.13.18	+ 1	0.53.16,9	− 3,2	
		7	13.54.25	131. 9.51	+ 8	0. 4. 1,6	− 1,5	4
		8	13.54.29	132.12.48	+ 2	−0. 7. 3,5	− 3,7	
	Août	18	10.58.11	129. 2.19	− 2	−2.14.24,3	+ 0,2	
		19	10.55.34	129.17. 7	− 1	−1.56.37,6	− 0,6	
		20	10.53.27	129.39.41	− 3	−1.39. 0,1	+ 1,8	
		21	10.51.52	130. 9.50	+ 2	−1.21.17,1	− 2,6	5
		22	10.50.47	130.47.46	− 2	−1. 4. 3,0	− 1,4	
		23	10.50.12	131.33. 5	+ 3	−0.47.13,9	− 1,7	

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
1801.	Août	25	h m s 10.50.26	133°.25′.30″	+ 2″	−0°.15′.21″,3	− 1″,4	
		26	10.51.13	134.31.59	+ 2	−0. 0.26,2	− 3.6	
		27	10.52.24	135.44.54	+ 1	0.13.37,8	− 3,8	6
		28	10.53.58	137. 3.53	− 4	0.26.47,9	− 2,7	
		29	10.55.51	138.28.15	+ 2	0.39. 5,1	− 5.2	
		30	10.58. 2	139.57.52	0	»	»	
	Sept.	1	11. 3. 9	143.10.17	+ 2	1. 9.48,0	− 3,3	7
		5	11.15.19	150.14.13	+ 1	1.36.18,7	+ 3,7	8
		6	11.18.34	152. 5.32	+ 1	1.40.35,1	− 1.6	
1802.	Juin	11	13.37.35	102.17.51	+ 3	1.53.59.0	− 1,4	
		12	13.39.56	103.44.40	− 2	1.49.20,0	− 0,2	9
		14	13.43.56	106.29.46	− 2	1.38. 1,0	− 2,6	
		15	13.45.35	107.47.59	+ 2	1.31.17,3	− 0,4	10
		16	13.47. 0	109. 3.22	0	1.23.55,7	− 0,6	
		19	13.49.46	112.31.26	+ 4	0.58. 3,7	− 2,9	
		20	13.50.11	113.34.36	+ 2	0.48.11,2	− 2,3	11
		21	13.50.21	114.34.26	+ 1	0.37.43,1	− 2,4	
		22	13.50.15	115.31. 2	− 2	0.26.43,2	− 1,6	
		27	13.45.43	119.20.33	+ 2	−0.36. 3,6	− 4,4	12
		29	13.41.54	120.25.32	− 4	−1. 4.12,5	− 5,4	
	Août	4	10.48.20	112.55.59	− 4	−2.17.24,2	− 3,9	
		5	10.47.15	113.34.22	− 1	−2. 1.10,2	− 2,6	
		7	10.46.28	115.10.37	0	−1.28.38,1	− 8,3	13
		9	10.47.27	117.11.57	+ 4	−0.56.59,8	− 4,9	
		14	10.56.42	123.55.30	− 2	0.14.17,6	− 2,9	
		15	10.59.31	125.31. 4	+ 4	0.26.36,2	− 3,3	
		16	11. 2.36	127.11. 1	− 1	0.38. 3,9	− 0,8	14
		18	11. 9.22	130.41.37	+ 2	0.58.31,2	− 2,4	
		20	11.16.46	134.24. 5	− 3	1.15.21,9	− 5,1	
		21	11.20.35	136.18.28	+ 5	1.22.20,2	− 3,1	15
		22	11.24.29	138.14.44	− 1	1.28.27,3	− 6,2	
		23	11.28.23	140.12. 4	+ 3	1.33.32,5	− 2,8	
	Sept.	17	12.41.34	186.29.39	0	0.23. 9,6	− 5,4	
		18	12.43.27	188. 7.35	0	0.16.10,1	− 3,7	16
		19	12.45.15	189.44.30	0	0. 9. 6,1	− 4,5	
		20	12.47. 1	191.20.29	− 1	0. 1.56,6	− 4,6	
		24	12.53.36	197.34.48	− 3	−0.27.22.6	− 0,1	
		25	12.55. 8	199. 6. 3	− 3	−0.34.47,9	+ 1,7	17
		26	12.56.38	200.36.14	+ 1	−0.42. 7,5	− 2,6	

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1802.	Sept.	30	13. 2.14	206.28.11	— 2	—1.11.31,4	+ 0,4	18
	Oct.	1	13. 3.32	207.53.45	0	—1.18.46,1	+ 2,0	
		3	13. 6. 2	210.41.54	+ 2	—1.32.58,3	+ 2,4	
		16	13.16.46	226.50.23	+ 3	—2.48.21,5	— 5,8	19
		17	13.16.56	227.52.13	0	—2.52.10,6	— 1,2	
		22	13.14.58	232.14.36	+ 4	—3. 3. 3,8	+ 4,7	20
1803.	Août	2	11. 6.24	114.39.53	— 1	0.26.36,1	— 2,9	21
		3	11.10.26	116.31.15	— 2	0.37.33,2	— 3,8	
	Sept.	7	13. 4.40	181.57.59	— 3	0. 0.56,3	— 0,8	22
1804.	Juill.	14	10.53.20	94.59.46	— 3	—0.33. 8,4	+ 0,1	23
		17	11. 5.13	100.26.15	— 1	0. 4. 5,5	— 0,8	
		18	11. 9.38	102.21. 3	+ 1	0.15.40,2	+ 0,5	
	Août	26	13.23.47	175.14.10	— 1	—0.16.24,4	— 1,7	24
	Sept.	6	13.31.16	189.45.56	— 1	—1.51.15,3	+ 4,4	25
		9	13.31. 9	193. 6.46	+ 3	—2.16.22,6	— 0,9	
		13	13.29. 8	197. 1.53	— 1	—2.48.14,0	+ 0,4	26
		14	13.28.14	197.53.43	— 2	—2.55.39,3	+ 1,2	
1805.	Avril	9	12.37. 3	28.45.58	— 4	0.27.44,3	— 2,6	27
		10	12.40.36	30.48. 1	— 4	0.38.57,9	— 1,0	
		12	12.47.31	34.46.34	+ 4	1. 1.18,6	— 3,3	
		13	12.50.51	36.42.41	0	1.12.10,9	— 2,3	
	Août	2	13.20. 7	148. 8.32	— 3	1. 6.45,8	— 4,7	28
		3	13.22.24	149.48.12	— 3	1. 0.25,4	— 6,8	
		11	13.35.46	162. 6.50	— 4	—0. 1.12,0	— 4,6	29
		25	13.39.30	179. 2.52	+ 2	—2.13.44,2	+ 2,5	30
		26	13.38.43	179.58.37	+ 3	—2.23.17,0	— 2,4	
	Oct.	13	10.51.18	183.53.46	— 2	1.59.59,8	— 4,6	31
		19	11. 3.12	193.38.13	+ 2	1.50.43,6	— 2,1	32
		23	11.12. 0	200.23.11	+ 2	1.33.37,9	— 3,7	
1806.	Avril	8	13.11.51	37.18. 5	— 2	2.36. 0,2	— 0,4	33
		9	13.11.49	38.20. 3	— 1	2.42.38,6	— 1,1	
	Juin	18	11. 7.22	74. 7.43	+ 2	—0.27. 4,4	— 2,2	34
	Juill.	18	13.28.12	134.49.16	— 2	1.22.13,1	— 0,2	35
	Sept.	21	10.49.13	159.58.49	— 2	1. 3.28,5	— 4,1	36
	Nov.	7	12.31.16	236.29.54	— 4	—1.24.56,0	— 5,2	37
		8	12.33.33	238. 0.53	— 4	—1.30.37,0	— 4,0	
1807.	Mars	22	13.12.16	19.31.49	+ 4	2.12.47,8	— 0,8	38
		24	13.11.17	21.30.26	— 4	2.33.52,0	— 3,2	
		26	13. 8.39	»	»	2.51.40,3	— 0,8	

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1807.	Mai	21	10.29.43	37. 0.43	— 3	—2.41. 0,2	— 1,3	
		22	10.31.36	38.33.23	— 3	—2.34.49,3	+ 0,7	
		23	10.33.39	40. 8.21	+ 1	—2.28. 7,5	+ 2,7	39
		24	10.35.53	41.45.47	— 3	—2.20.53,1	+ 2,3	
		26	10.40.52	45. 7.33	+ 2	—2. 4.59,3	+ 0,2	
	Juin	24	12.58.28	104.51.28	+ 2	1.54.33,7	»	40
		29	13.19.21	114.15.59	0	1.51.45,8	+ 7,7	41
		30	13.22.57	116. 2.32	0	1.49.17.3	+ 1,7	
	Juill.	9	13.46.23	130.25. 4	— 1	1. 0.14,8	— 0,6	
		10	13.48. 1	131.50. 0	0	0.52.14,8	+ 0,2	
		11	13.49.27	133.12.46	— 5	0.43.48,1	+ 1,3	42
		12	13.50.42	134.33. 6	— 3	0.34.55,5	+ 3,4	
		13	13.51.45	135.51. 6	0	0.25.38,2	+ 5,2	
		17	13.54. 3	140.38.56	— 4	—0.14.58,3	+ 0,4	
		19	13.54. 1	142.47. 9	— 3	—0.37.16,7	+ 1,5	43
		22	13.52.23	145.37.53	— 1	—1.12.41,3	+ 0,9	
1808.	Fév.	21	12.56.29	342.40.49	»	—0.55.12,2	+ 2,5	
		22	12.59. 8	344.31.19	»	—0.45.40,3	+ 2,5	44
		25	13. 6.23	349.54.41	»	—0.13.19,4	+ 2,7	
	Mars	6	13.15. 5	3.58.51	+ 1	2. 0.11,0	+ 1,5	
		7	13.13.55	4.49.48	— 3	2.13.22,0	+ 3,5	45
		8	13.12.16	5.32.40	— 3	2.26. 6,8	+ 4,4	
		9	13.10. 8	6. 7.22	— 7	2.38. 7,8	+ 1,1	
	Mai	2	10.30.29	18. 6.55	— 2	—2.47.37,3	+ 7,7	46
		3	10.32. 3	19.37.15	— 5	—2.44.59,7	+10,2	
		14	10.58.17	38.23.44	— 1	—1.41. 0,1	+ 7,0	
		15	11. 1.35	40.18.15	— 2	—1.32.15,9	+ 1,5	
		16	11. 5. 2	42.14.36	+ 4	—1.23.11,4	— 0,6	47
		17	11. 8.41	44.13.11	— 4	—1.13.49,9	+ 1,3	
	Juill.	8	13.46.23	130.51.35	— 1	—1.24. 1,0	— 0,6	
		10	13.41.55	131.50.42	— 3	—1.52. 8,3	— 0,9	48
		13	13.33. 0	132.46.48	— 8	—2.35. 5,2	+ 0,2	
	Sept.	26	12.34.28	194.51.26	— 1	0.10.33,9	— 5,0	49
	Oct.	6	12.51.35	210.21.45	— 2	—1. 0.37,0	— 2,9	50
1809.	Mai	26	13. 4.24	80.44.46	0	2. 1.56,0	+ 2,5	51
	Juin	2	13.29.36	92.41.57	0	2. 7.56,2	+ 1,7	52
1810.	Mai	10	12.58.16	64.34.22	— 1	1.54. 0,0	+ 1,7	53
		20	13.28.25	80.38.46	0	2.19.18,2	+ 3.7	54
		30	13.33.40	90.38.15	— 7	»	»	55

ANNÉES.	MOIS et jours.	TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1810.	Août 22	12.51.58	161.15.15	− 1	1. 9.49,0	− 0,5	
	23	12.54.24	163. 0. 8	− 6	1. 4. 9,1	− 4,9	56
	24	12.56.43	164.43.36	− 7	0.58. 6,1	− 3,8	
	26	13. 1. 0	168. 6.22	− 1	0.45.10,3	+ 0,8	
1811.	Janv. 11	13.24.43	308.34. 9	− 4	−1.10.52,6	+ 2,2	57
	12	13.25.56	309.52.49	+ 1	»	»	
	Mars 18	10.57.58	337. 1.10	− 7	−2.14.31,5	− 2,2	58
	23	11. 9. 7	345.14.31	− 5	−2.17.46,7	− 1,2	59
	26	11.16.25	350.26.21	− 3	−2.14. 6,8	− 0,2	
	27	11.18.58	352.13. 0	− 4	−2.11.54,8	− 0,3	60
	28	11.21.34	354. 0.52	+ 4	−2. 9.11,0	− 2,2	
	Sept. 3	13.35. 0	186.58.45	− 2	−2.12.40,2	− 2,6	
	5	13.33.56	188.57. 6	+ 3	−2.30.15,0	− 0,7	
	6	13.33.10	189.52.22	− 1	−2.38.45,0	− 3,8	61
	7	13.32.13	190.44.39	− 1	−2.47. 8,4	− 2,2	
	8	13.31. 6	191.33.46	+ 3	−2.55.21,5	+ 1,5	
	10	13.28.16	193. 1.59	− 5	−3.10.43,3	− 2,8	62
	11	13.26.30	193.40.21	− 2	−3.17.54,7	− 4,3	
1812.	Juill. 25	13.20.35	140.23. 5	− 3	1.20.43,5	− 2,8	63
	Août 1	13.35.32	151.39.48	+ 1	0.33.25,2	− 1,5	64
	23	13.35.57	176.34.31	+ 5	−2.59. 7,6	− 1,2	65
	25	13.31.43	177.42. 6	+ 4	−3.17.51,5	− 3,8	
1813.	Juill. 7	13.16.54	121.39.20	− 1	1.46.24,4	+ 2,2	66
	29	13.51.35	153. 9.59	0	−1. 5.20,2	− 1,3	
	30	13.51. 7	154. 9.38	+ 1	−1.16.41,2	+ 0,8	67
	31	13.50.28	155. 6.28	− 2	−1.28. 7,9	− 0,6	
	Août 3	13.47.17	157.38.24	− 1	−2. 3. 6,7	− 2,3	68
	Sept. 20	11. 0.12	161.56.10	− 4	1.39.38,4	− 2,4	69
1817.	Mai 7	13.10.28	65. 0.20	0	2.13.31,2	+ 1,3	70
1818.	Sept. 4	13.28.35	187. 6.29	− 6	−3.19.31,0	+ 4,2	71
1819.	Avril 6	13. 7.23	33.44.50	0	1.56.38,8	+ 2,5	
	8	13.10.13	36.36.28	− 3	2.15.29,8	+ 2,0	72
	9	13.11.12	37.54.41	− 4	2.23.57,8	− 2,1	
	10	13.11.52	39. 7.36	− 9	2.31.32,6	+ 0,5	
1820.	Mars 20	13. 9.34	17.18.25	− 3	1.31.45,8	»	73
	Mai 23	10.29.47	39.56.38	− 2	−2.38.53,8	+ 0,9	74
	Juin 28	13. 8.56	111.40.58	+ 3	1.54.39,1	− 6,0	75
	29	13.12.59	113.33. 6	+ 1	1.53.23,3	+ 1,2	
	Juill. 11	13.46.30	133.15. 9	− 1	0.54.10,9	+ 1,1	76
	16	13.52.23	139.55.59	0	0. 9.13,7	+ 3,3	
1821.	Juin 19	13.31.11	108.25.17	+ 8	1.53. 9,4	+ 1,7	77

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1821.	Août	21	10.50.11	129.37.32	− 4	−0.21.41,9	− 3,0	
		22	10.51.12	130.47. 2	− 3	−0. 6.48,7	− 2,8	78
		23	10.52.36	132. 2.42	− 5	0. 7.24,3	− 7,1	
	Déc.	10	10.27. 0	237.20.39	+ 2	»	»	79
1822.	Fév.	15	13.18.13	343.16. 9	+ 1	0. 8.55,4	+ 2,6	80
		22	13.16.59	351. 7.20	0	1.51.15,3	− 1,6	81
	Juin	1	13.18.22	89. 8.14	0	2. 8.32,8	+ 3,0	82
		6	13.34. 9	97.10. 8	+ 6	2. 2. 3,3	+ 3,7	
		7	13.36.39	98.38. 6	0	1.58.27,6	+ 4,0	83
		9	13.40.57	101.25. 6	+ 1	1.49. 7,0	+ 1,7	
		13	13.46.37	106.23. 2	+ 6	1.21.47,2	+ 0,6	84
		18	13.47.56	111.23.11	− 4	0.32.34,7	− 1,0	
1823.	Avril	10	10.57.26	1.23.10	+ 1	−2.22.53,8	− 0,6	85
		11	10.59.44	3. 6.32	− 2	−2.20.25,7	+ 2,0	
	Mai	24	13.32. 6	84.54.50	+ 5	2.13.22,5	− 0,8	86
		29	13.37. 1	90.28.24	− 3	1.46.49,5	+ 4,8	
	Août	24	12.48.32	162.16.39	− 1	1.11.18,6	− 1,5	87
		25	12.50.59	164. 2. 1	0	1. 5.40,5	− 1,2	
		26	12.53.19	165.45.59	+ 3	0.59.40,7	+ 2,5	88
		29	12.59.43	170.50.23	− 2	0.40.27,6	− 3,3	
	Sept.	2	13. 6.56	177.18.17	+ 3	0.11.47,6	− 1,9	
		4	13.10. 4	180.25. 1	− 3	−0. 3.28,9	+ 1,4	89
		5	13.11.30	181.56.30	− 2	−0.11.14,3	− 0,3	
		8	13.15.23	186.23.38	+ 2	−0.35.10,7	+ 5,7	
		9	13.16.32	187.50.14	0	−0.43. 8,5	+ 0,2	
		10	13.17.37	»	»	−0.51.14,4	+ 0,1	90
		11	13.18.38	190.39.41	− 3	−0.59.22,0	+ 1,1	
1824.	Avril	20	12.33. 5	39.26.39	−11	0.42.30,3	+ 7,1	91
		21	12.37. 4	41.30.40	− 2	0.53.16,8	+ 5,2	
		29	13. 5.41	56.40.28	+ 7	2. 5.23,3	+ 0,5	92
		30	13. 8.36	58.20.13	− 6	1.44.41,0	− 5,8	
	Juill.	12	11. 0.51	95. 2.55	0	−0.13.16,3	+ 1,2	93
		17	11.24. 7	104.53.33	+ 1	0.42.26,6	+ 1,8	94
		20	11.39.33	111. 9.59	+ 1	1. 8.46,6	+ 1,0	
	Août	7	12.57. 5	147.32.10	− 4	1.28.12,6	+ 0,9	95
		11	13. 7.51	154.36.52	− 4	1. 7.32,4	+ 2,7	
		26	13.31. 8	177.38.44	− 3	−0.47.43,6	+ 4,0	96
		27	13.31.52	178.58.51	− 2	−0.56.34,8	+ 4,5	
1825.	Avril	3	12.32. 7	21.11. 2	− 1	0. 0.30,3	+ 3,2	
		4	12.35.37	23.14.19	− 5	0.11.31,2	+ 8,7	97
		5	12.39. 4	25.16.32	− 5	0.22.48,9	+ 7,6	

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1825.	Avril	7	12.45.49	29.16.39	— 1	0.45.35,9	+ 7,0	
		8	12.49. 4	31.13.53	— 4	0.56.59,1	+ 4,3	98
		9	12.52.14	33. 8.40	— 2	1. 8.10,6	+ 4,4	
	Août	23	13.39.16	177. 8.30	+ 3	— 2.23.27,8	+ 4,6	
		24	13.37.56	177.55.28	+ 1	— 2.43.14,2	+ 1,2	99
1826.	Juill.	1	12.39. 6	107. 6.50	— 7	1.46.56,1	+ 1,7	
		2	12.44. 6	109.10.24	— 2	1.49.17,7	+ 4,2	
		3	12.48.57	111.12.19	+ 1	1.51. 1,7	0,0	100
		4	12.53.37	»	»	1.51.57,3	— 1,2	
		18	12.39.19	137.52.59	— 1	1. 0.49,1	— 2,2	101
		26	13.49.50	149. 5.25	— 6	—0. 8.18,2	+ 0,9	
		29	13.51. 2	152.42.14	— 7	—0.39. 2,9	+ 0,1	102
	Août	2	13.50.11	156.57. 3	— 7	—1.22.58,9	+ 5,9	103
	Sept.	17	10.50.15	156.15.58	— 4	0.57.14,9	0,0	104
		22	10.57.45	163.14.55	— 1	1.38.45,8	— 3,6	
		23	10.59.55	154.51.25	0	1.43.31,7	+ 0,4	105
1827.	Avril	30	10.22. 2	13. 4. 1	0	—2.44.38,0	+ 1,6	106
	Juin	1	11.18.26	60.48.46	+ 5	—0.29.30,7	+ 6,0	107
	Juill.	7	13.50.15	129.38.13	— 4	0.48.47,1	— 0,8	108
		18	13.52.15	141.39.34	+ 3	—1. 9.41,5	— 2,2	109
	Oct.	17	12.40.59	218.12. 6	— 2	—1. 1.36,0	— 3,9	110
1828.	Oct.	19	13.14.55	229.55.39	+ 5	—2.41.31,2	— 1,4	
		21	13.15.54	232. 7. 8	+ 2	—2.48.51,0	+ 3,5	111
		22	13.16.11	233. 9. 9	+ 5	—2.51.46,8	+ 1,9	
1836.	Avril	20	11.17.54	18.49.52,8	+ 3,3	—1.44.46,3	+ 3,8	112
	Mai	12	12.49.11	64.53.27,8	— 3,6	1.40.42,6	+ 1,9	
		13	12.53.32	66.51. 8,7	+ 3,5	1.47.46,4	+ 1,7	
		14	12.57.46	68.46.26,0	— 0,1	1.54. 9,7	+ 1,3	113
		15	13. 1.51	70.38.55,9	+ 0,9	1.59.47,3	+ 2,7	
		18	13.13. 7	75.58.59,4	+ 5,2	2.12.12,2	+ 0,4	
		19	13.16.30	77.39.32,8	+ 7,3	2.14.45,5	— 1,5	
		20	13.19.42	79.17. 3,2	+ 3,0	2.16.27,4	— 1,5	114
		21	13.22.40	80.51.13,9	+ 5,5	2.17.19,2	— 1,5	
	Juill.	19	10.39.17	96.35.48,8	+ 1,0	—2.13.55,4	+ 2,6	115
		28	10.56.56	108.49. 9,0	+ 3,6	—0. 7.16,4	+ 5,1	116
	Août	30	12.56.21	171.53. 2,9	+ 1,5	0.42.23,8	— 1,0	117
		31	12.58.20	173.32.36,3	— 0,3	0.35.33,6	+ 1,2	
	Sept.	26	13.23.13	209.12.48,0	— 0,3	—2.41.27,8	+ 0,3	118

ANNÉES.	MOIS et jours.	TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1836.	Nov. 12	10.37.25	212.23.29,4	− 2,2	2. 6.10,2	− 0,3	119
	15	10.41.40	216.39.52,4	− 3,4	1.52.27,7	+ 1,1	
1837.	Mars 10	10.34.34	323.42.13,9	− 1,2	−1.27.36,6	− 1,6	120
	Avril 1	11.17.25	357.55. 8,7	+ 1,0	−2. 9.43,2	+ 0,8	121
	2	11.20. 4	359.44.33,0	+ 1,3	−2. 6.14,0	+ 1,3	
	Mai 17	13.24.38	77.28.48,8	− 0,9	1.59.15,9	+ 2,1	122
	Juill. 3	10.32. 0	79.54.34,3	+ 0,1	−2.38.30,0	− 2,7	123
	4	10.32.54	81. 3.41,3	− 4,5	−2.26.25,0	+ 1,0	
	Août 7	12.47.22	144.49. 4,3	− 0,7	1.36.43,1	+ 0,1	24
	14	13. 6.58	157.22.49,6	+ 8,6	0.58.28,7	0,0	125
	18	13.15.19	164. 1. 4,5	+ 1,7	0.36.25,3	+ 0,1	
	19	13.17. 7	165.37. 5,8	− 2,6	0.29. 7,2	0,0	
	23	13.23.16	171.46.44,6	+ 1,0	−0. 2. 1,3	− 1,5	126
	25	13.25.45	174.43. 5,9	− 0,2	−0.18.32,1	− 3,1	
	26	13.26.51	176. 9.10,9	− 4,4	−0.26.59,0	− 2,9	
	27	13.27.50	177.33.37,3	+ 1,8	−0.35.32,4	− 2,2	
	Sept. 9	13.31.36	193.19.11,1	+ 0,4	−2.28.27,4	+ 1,0	127
	10	13.31. 2	194.17.19,0	− 1,0	−2.36.36,3	− 0,1	
	20	13.14.29	200.50. 2,7	+ 4,6	−3.40.20,7	− 0,9	128
	23	13. 4. 1	201.14. 5,9	+ 6,3	−3.47.35,7	+ 3,3	
	Oct. 12	11. 0.44	186.26.34,2	− 0,6	0.11. 1,5	+ 2,6	129
	Nov. 2	10.54.38	206.25.31,4	+ 0,9	1.46.11,3	+ 0,6	130
	6	11. 2.52	212.52.59,1	− 0,5	1.24.38,6	+ 0,5	
	Déc. 15	12.45.18	274.46.10,4	+ 1,4	−2. 9.46,3	− 3,6	131
	29	13.22. 9	295.58.16,9	− 1,1	−1.43.41,0	− 3,9	132
	31	13.25.11	298.36.15,0	+ 1,0	−1.28.44,1	+ 0,6	
1838.	Fév. 7	10.29.34	292.53.56,0	− 4,7	1.22.21,0	+ 0,4	133
	Mars 1	10.51.26	318.39.13,0	− 3,6	−1.43.42,9	+ 6,3	134
	21	11.39.47	352. 2.57,5	+ 8,5	−1.58.15,7	− 3,4	135
	Avril 10	12.46.11	32.20.37,8	+ 1,9	0.52.51,5	+ 1,7	136
	Juin 1	10.43.25	51.42.14,7	+ 3,8	−3.52. 3,7	− 3,4	137
	8	10.27.38	54.38.57,5	− 3,9	−3.52.19,0	+ 2,7	138
	Août 11	13.38.31	162.56.15,3	+ 0,8	−0.12.17,8	+ 1,5	139
	12	13.39.26	164.18.24,4	− 1,1	−0.21.19,7	− 0,8	
	13	13.40.12	165.38.42,7	+ 1,0	−0.30.36,3	+ 2,1	
	14	13.40.52	166.57.12,1	+ 3,5	−0.39.54,8	− 2,3	140
	15	13.41.23	168.13.53,2	+ 1,5	−0.49.24,2	− 3,2	
	16	13.41.47	169.28.37,5	+ 0,7	−0.59. 5,6	+ 0,5	
	22	13.41.18	176.12.21,6	+ 1,0	−1.58. 9,4	− 0,7	141

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1838.	Août	28	13.35. 3	181.22.50,1	+ 1,7	−2.56. 5,2	− 5,2	142
		31	13.29. 8	183. 9.48,6	+ 1,8	−3.22.27,7	+ 2,3	
	Sept.	1	13.26.40	183.37.21,6	+ 0,5	−3.30.31,7	+ 1,2	143
		4	13.17.34	184.30.31,3	+ 0,8	−3.51.41,0	+ 2,1	
	Oct.	3	10.45.42	172. 0. 1,5	− 1,5	1. 8.58,1	+ 2,1	144
		4	10.45.12	172.51.30,2	+ 2,1	1.19.40,0	+ 2,9	
		10	10.49.42	180.15.53,1	− 0,1	1.56.10,5	− 0,1	145
		14	10.56.55	186.31. 0,6	+ 0,3	1.58.44,2	− 2,0	
		18	11. 5.27	193.11.27,4	0,0	1.49.21,1	+ 0,4	146
		22	11.14.24	199.59. 8,8	+ 2,6	1.32. 0,1	+ 3,8	
	Déc.	14	13.21.44	281.57. 1,8	+ 2,8	−2. 2.33,2	− 0,6	147
		16	13.24. 4	284.18.18,4	+ 1,4	−1.50.33,1	0,0	
1839.	Janv.	16	10.37. 6	274. 9.55,9	− 5,5	2.42.40,8	− 2,2	148
		18	10.32.13	274.51.15,7	− 4,7	2.23.59,2	− 0,3	
	Fév.	27	11.31.37	326.31.21,0	− 4,2	−2. 8.30,2	+ 1,4	149
	Mars	1	11.37. 3	329.58.18,9	− 1,5	−2. 8.58,7	+ 3,6	150
		2	11.39.48	331.43.25,9	− 2,1	−2. 8.26,8	− 1,5	
		3	11.42.35	333.29.34,3	+ 0,9	−2. 7.34,3	+ 0,1	
		4	11.45.23	335.16.51,6	+ 1,0	−2. 6.12,3	+ 0,3	
		5	11.48.14	337. 5.13,6	+ 2,1	−2. 4.21,3	− 0,3	
	Avril	7	13.11.34	36.14.46,6	+ 4,9	2.39.10,3	+ 3,6	151
		11	13. 8. 6	39.28.58,9	− 3,7	2.59.17,3	+ 0,6	
	Mai	27	10.20.24	40.43.26,6	− 2,5	−3.24. 9,3	− 1,1	152
		29	10.21. 7	42.58.27,6	+ 3,1	−3.16.21,5	− 0,9	
		30	10.21.47	44.10.36,2	0,0	−3.11.18,3	− 0,2	
	Juin	7	10.34.20	55.30.36,7	− 2,9	−2.11.48,4	− 5,3	153
		12	10.49. 7	64. 4.53,8	+ 1,7	−1.20.48,1	+ 1,2	154
		13	10.52.46	65.55.43,7	+ 1,1	−1. 9.46,6	+ 1,8	
		14	10.56.38	67.49. 5,7	+ 1,3	−0.58.33,1	+ 0,7	
		17	11. 9.33	73.43.34,1	+ 3,6	−0.24.30,4	+ 1,7	155
		20	11.24.17	79.57. 5,1	+ 6,0	0. 8.58,9	− 0,3	
	Juill.	16	13.27.28	132.39.36,3	+ 1,6	1.26.58,6	+ 0,7	156
		17	13.30. 8	134.19.51,9	+ 2,1	1.21.29,0	+ 2,2	
	Août	2	13.50. 8	156.36. 4,8	+ 1,5	−0.56. 3,6	− 5,5	157
		5	13.49.10	159.43.21,4	+ 2,6	−1.28.54,0	− 3,6	158
		8	13.46.33	162.25.25,6	+ 1,9	−2. 2.37,3	− 2,3	
		13	13.37.56	165.48.27,1	+ 4,7	−2.58.33,7	− 2.5	159
	Sept.	16	10.50. 6	155.18.52,6	+ 0.6	0.13. 5,0	+ 3,5	160
	Déc.	7	13.15.11	274. 0.46,3	− 3,2	−1.19.37,8	+ 0,2	161
1840.	Avril	25	10.33.40	12. 7.58,1	+ 2,4	−1.56.41,0	+ 1,0	162

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ' "	"	° ' "	"	
1840.	Avril	29	10.25.38	13.58.11,0	+ 2,3	−2.32.42,0	+ 2,0	163
		30	10.24.12	14.36. 2,8	− 1,1	−2.39.39,5	− 0,9	
	Mai	1	10.22.59	15.17.35,4	+ 1,7	−2.45.52,0	− 0,9	
		2	10.21.58	»	»	−2.51.17,5	− 2,4	
	Juin	1	11.10.52	59.44.25,6	+ 6,4	−0.44. 2,8	+ 1,1	164
		2	11.15.18	61.47.38,4	+ 4,7	−0.33.15,8	+ 3,7	
		16	12.30.15	92.10.18,1	+ 4,4	1.35.34,0	+ 2,3	165
		20	12.51. 8	100.29.30,6	+ 6,3	1.51.50,6	+ 0,7	
		21	12.56. 0	102.29.48,2	+ 4,8	1.54. 2,7	+ 1,4	166
		22	13. 0.40	104.28. 0,2	+ 7,8	1.55.31,0	+ 0,1	
		23	13. 5.11	106.24.15,3	+ 4,2	1.56.14,4	+ 0,2	
	Juill.	15	13.54.19	139.43.58,8	− 0,5	−0.17.48,3	− 0,3	167
		16	13.54.16	140.47.12,6	+ 4,8	−0.29. 3,2	+ 0,3	
	Août	31	10.50.34	139.59.15,5	− 5,1	−0.16. 7,3	+ 0,8	168
	Sept.	6	10.56.50	147.13.39,4	− 1,7	1. 2. 7,4	− 0,8	169
	Oct.	9	12.20.47	205.12.26,2	+ 2,9	0. 2.42,6	− 2,2	170
		10	12.22.45	206.49. 1,7	+ 0,1	−0. 4.13,0	− 0,5	
		14	12.30.28	213. 8.20,6	+ 1,7	−0.31.54,9	+ 0,5	171
		24	12.49. 8	228.12.26,0	+ 5,3	−1.37.14,1	− 1,9	172
		30	12.59.57	236.43.54,7	− 0,6	−2. 9.45,2	+ 1,6	173
1841.	Mars	11	12.58.21	5.18.37,8	+ 2,9	»	»	174
	Avril	27	10.26.30	11.40.56,3	+ 2,3	−2.50.31,0	+ 5,1	
		28	10.27.40	13. 4.31,0	− 1,4	−2.50. 2,2	+ 1,9	175
		30	10.30.22	15.57.43,9	+ 0,5	−2.47.23,3	− 2,5	
	Mai	1	10.31.54	17.27.25,9	− 1,4	−2.45.17,8	+ 0,2	
		11	10.54.16	34.13. 2,4	+ 1,8	−1.54.31,4	+ 0,8	176
		14	11. 3.49	39.53.18,5	+ 3,1	−1.29.50,5	+ 0,7	177
		17	11.14.51	45.50.59,8	+ 7,1	−1. 1.43,1	+ 2,6	
	Juin	17	13.36.53	108. 4.23,3	+ 1,5	1.49.34,6	+ 1,7	178
		28	13.53. 0	122.21.22,5	− 2,2	0.25. 7,8	+ 0,9	179
	Août	19	10.52.42	128.21. 4,1	− 1,3	0. 1. 0,8	+ 4,5	180
		20	10.54.39	129.44.47,6	0,0	0.14.28,3	+ 3,6	
	Sept.	21	12.29.11	187.54.25,9	− 2,8	0.36. 6,7	+ 1,7	181
	Déc.	2	10.27.33	229.44. 8,5	+ 4,5	2.27.42,6	− 1,3	182
		11	10.33.35	240.11.17,7	− 1,1	1.32.55,6	+ 1,2	183
1842.	Fév.	6	13.11.20	331.44.26,1	− 1,2	−0.54.30,6	+ 4,9	184
		8	13.15.26	335. 2.18,7	+ 3,5	−0.33.38,1	+ 0,6	
		15	13.21.13	344.36.22,2	+ 1,6	1. 0.39,2	− 1,6	185
	Avril	8	10.29. 7	351.55.31,5	− 4,0	−2.25. 6,2	− 0,2	186
		9	10.30.11	353.15.40,3	− 6,5	−2.28.12,6	− 3,4	
		10	10.31.20	354.37.38,3	− 3,1	−2.30.52,0	− 1,7	
		11	10.32.35	356. 1.32,7	− 4,2	−2.32.55,8	− 4,0	

ANNÉES.	MOIS et jours.		TEMPS moyen.	LONGITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en long.	LATITUDE apparente observée.	ERREUR des Tables en lat.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	″	° ′ ″	″	
1842.	Avril	17	10.42. 0	5. 2. 9,8	— 1,4	—2.34.30,4	— 1,5	
		18	10.43.53	6.38.20,0	— 2,3	—2.32.54,2	— 2,1	187
		19	10.45.52	8.16.10,0	— 0,7	—2.30.50,6	+ 1,3	
		20	10.47.57	9.55.45,7	— 2,8	—2.28.12,7	+ 1,6	
		22	10.52.25	13.19.59,1	— 2,5	—2.21.22,0	+ 1,4	188
		23	10.54.48	15. 4.35,2	+ 2,7	—2.17. 9,6	+ 1,0	
	Mai	2	11.21.35	32. 4.54,8	— 0,3	—1.16.59,3	— 6,4	189
		17	12.28.48	64.13. 8,0	+ 3,1	1.12.26,3	+ 2,9	
		18	12.33.47	66.20.30,9	— 1,1	1.21. 3,8	+ 2,8	190
		19	12.38.41	68.26. 5,2	+ 5,5	1.29. 7,8	+ 3,1	
	Juin	3	13.35.26	94.55.13,9	+ 5,9	2. 3. 4,8	+ 2,1	191
		6	13.41. 9	98.54.55,0	+ 4,3	1.48.53,0	— 1,8	192
		7	13.42.34	100. 8.30,7	+ 4,4	1.42.36,0	— 1,1	
		11	13.45.37	104.30. 4,0	+ 4,7	1.40.11,1	+ 3,7	193
		13	13.45.30	106.20. 9,9	+ 2,0	0.49.50,4	+ 2,1	
	Août	10	11.10.50	123.42.12,5	0,0	0.48.29,7	+ 2,6	
		12	11.18.53	127.29.58,9	+ 3,4	1. 6.45,1	— 0,6	194
		14	11.27.17	131.25.43,2	+ 5,4	1.21,24,0	+ 2,5	
		15	11.31.32	133.25.42,1	+ 0,1	1.27.27,0	+ 1,0	
		16	11.35.46	135.26.22,9	+ 4,3	1.32.33,5	+ 2,1	195
		17	11.39.58	137.27.37,9	+ 5,9	1.36.49,9	+ 1,4	
		18	11.44. 8	139.29. 8,0	+ 5,7	1.40.13,8	+ 1,9	

SECTION IV.

COMPARAISON DE LA THÉORIE AVEC LES OBSERVATIONS.

Passages de Mercure sur le Soleil.

Désignons toujours par ☿ et $\odot$ les longitudes de Mercure et du Soleil, par λ et Λ leurs latitudes, et appelons c la distance des centres. La considération du triangle sphérique dont les sommets sont au pôle de l'écliptique et aux centres des deux astres, donne la condition

$$\cos c = \sin\lambda \sin\Lambda + \cos\lambda \cos\Lambda \cos(☿ - \odot),$$

ou bien, en remplaçant $\cos(☿ - \odot)$ par $1 - 2\sin^2 \frac{☿ - \odot}{2}$,

$$\cos c = \cos(\lambda - \Lambda) - 2\cos\lambda \cos\Lambda \sin^2 \frac{☿ - \odot}{2}.$$

En effectuant la même transformation sur $\cos c$ et $\cos(\lambda - \Lambda)$, on trouvera l'équation

$$\sin^2 \frac{c}{2} = \sin^2 \frac{\lambda - \Lambda}{2} + \cos\lambda \cos\Lambda \sin^2 \frac{☿ - \odot}{2}.$$

Cette relation étant rigoureuse et indépendante des grandeurs des angles qu'elle contient, on y remplacera, si on le veut, les longitudes et les latitudes des astres par leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. Avec ces dernières coordonnées, le calcul de l'effet des parallaxes serait un peu plus simple : mais on compliquerait les autres déterminations. Aussi nous en tiendrons-nous à la considération des longitudes et des latitudes.

A cause de l'extrême petitesse de la latitude du Soleil, on peut réduire $\cos\Lambda$ à l'unité. De plus, $\frac{c}{2}$, $\frac{\lambda - \Lambda}{2}$, $\frac{☿ - \odot}{2}$ et λ sont de petits angles dont on peut développer les lignes trigonométriques en séries. En effectuant ce calcul, et conservant les termes du quatrième ordre, on forme l'équation

$$c^2 = (\lambda - \Lambda)^2 + (☿ - \odot)^2 + \varepsilon,$$

ε ayant pour expression

$$\varepsilon = \frac{c^4 - (\lambda - \Lambda)^4 - (☿ - \odot)^4}{12} - \frac{\lambda^2}{2}(☿ - \odot)^2.$$

En raison de l'extrême petitesse de ε, on peut remplacer, dans son expression, c^2



par sa valeur approchée $(\lambda - \Lambda)^2 + (\text{☿} - \odot)^2$, ce qui fournit plus simplement, en négligeant de plus Λ,

$$\varepsilon = -\frac{1}{3}\lambda^2(\text{☿} - \odot)^2.$$

Le maximum de cette valeur de ε est, pour une distance c donnée, égal à $\frac{1}{12}c^4$; et on peut voir que la suppression de ce terme, dans l'équation fondamentale, influe de la quantité $\frac{1}{24}c^3$ sur la distance calculée des centres. Cette dernière quantité ne s'élève pas à 0",001 aux moments de l'entrée sur le disque du Soleil et de la sortie, et, en conséquence, l'équation dont dépendent les circonstances d'un passage, peut être réduite aux termes

$$(1)\qquad c^2 = (\lambda - \Lambda)^2 + (\text{☿} - \odot)^2\ (*).$$

Pour traiter cette équation, on calculera les coordonnées pour une heure voisine du milieu du passage et en tenant compte de l'aberration. On les calculera en outre quatre heures avant et quatre heures après; et, en prenant l'heure pour unité de temps, on conclura avec une exactitude suffisante :

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda - \Lambda &= n + n't + n''t^2, \\ \text{☿} - \odot &= m + m't + m''t^2. \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation de condition, elle prendra la forme

$$c^2 = e + ft + gt^2 + ht^3.$$

Comme la distance des centres approche de son *minimum*, le coefficient du terme en t^2 sera relativement considérable. Le terme en t^3 aura un effet à peine sensible. En posant

$$(3)\qquad k = \frac{c^2}{g} - \frac{e}{g} - \frac{h}{g}t^3,$$

on aura l'équation

$$t^2 + \frac{f}{g}t - k = 0,$$

dont on déduira

$$(4)\qquad t = -\frac{f}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2g}\right)^2 + k},$$

(*) Si l'on voulait remplacer les longitudes et latitudes par les ascensions droites et déclinaisons, il faudrait en outre multiplier la différence d'ascension droite par le cosinus de la demi-somme des déclinaisons du Soleil et de Mercure.

ce qui fera connaître les deux époques où la distance des centres deviendra égale à c.

Veut-on, par exemple, calculer les heures des contacts intérieurs, c sera égal à la différence des rayons des disques du Soleil et de Mercure, et il éprouvera une légère variation pendant la durée du passage. En négligeant d'abord cette variation, ainsi que le terme en t^2, on aura une première valeur approchée de k, avec laquelle on calculera des valeurs de t déjà fort exactes. Avec chacune de ces valeurs approchées de t, on déterminera les valeurs précises correspondantes de c et k, qui permettront d'arriver ensuite à la connaissance exacte de l'instant de la phase considérée.

En donnant à c une valeur égale à la somme des demi-diamètres de la planète et du Soleil, on calculerait de même les instants des contacts extérieurs. Le premier contact extérieur n'est pas susceptible d'être observé avec précision. Le temps du second contact extérieur s'estime mieux, et l'on peut conclure le diamètre de la planète du temps écoulé entre les seconds contacts intérieur et extérieur. En attribuant à $\lambda - \Lambda$ et à $☿ - \odot$ les valeurs qui conviennent à l'instant de la sortie, en désignant par d le diamètre de la planète, et par τ la durée de la sortie, on aura entre ces quantités la relation

$$(5)\qquad cd = [(\lambda - \Lambda)n' + (☿ - \odot)m']\tau.$$

Connaissant par ce qui précède l'instant de l'une des phases vues du centre de la Terre, il nous reste à en déduire l'instant de la même phase vue d'un point de la surface de la Terre.

L'équation $(\lambda - \Lambda)^2 + (☿ - \odot)^2 = c^2$ étant satisfaite pour une certaine valeur de t, ou, ce qui revient au même, pour les valeurs correspondantes de $\lambda - \Lambda$, $☿ - \odot$ et c, si nous attribuons à $\lambda - \Lambda$, $☿ - \odot$ et t des accroissements ψ, π et θ, en raison de l'effet des parallaxes, nous aurons entre ces accroissements la relation

$$(6)\qquad (\lambda - \Lambda)(n'\theta + \psi) + (☿ - \odot)(m'\theta + \pi) = 0.$$

qui, en posant

$$(7)\qquad A = -n'(\lambda - \Lambda) - m'(☿ - \odot),$$

donnera

$$(8)\qquad \theta = \frac{\lambda - \Lambda}{A}\psi + \frac{☿ - \odot}{A}\pi.$$

ψ et π sont les différences des parallaxes de Mercure et du Soleil en latitude et en longitude : nous allons les déduire des différences des parallaxes correspondantes ψ' et π' en déclinaison et en ascension droite, en simplifiant les résultats

par cette considération que les points du Soleil et de la planète qui sont en contact apparent, ont même ascension droite et même déclinaison. Soient, conformément aux formules du Chapitre I[er] (Tome I), ω étant d'ailleurs l'obliquité de l'écliptique,

(9)

$$\sin S = \sin\omega \frac{\cos \mathcal{L}}{\cos \mathcal{D}},$$

$$\cos S = \frac{\cos\omega - \sin\lambda \sin \mathcal{D}}{\cos\lambda \cos \mathcal{D}},$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{A}} = \frac{\cos \mathcal{D}}{\cos\lambda} \cos S, \qquad \frac{d\lambda}{d\mathcal{A}} = -\cos \mathcal{D} \sin S,$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{D}} = \frac{\sin S}{\cos\lambda}, \qquad \frac{d\lambda}{d\mathcal{D}} = \cos S.$$

On aura

$$\psi = \frac{d\lambda}{d\mathcal{D}} \psi' + \frac{d\lambda}{d\mathcal{A}} \pi',$$

$$\pi = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{D}} \psi' + \frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{A}} \pi'.$$

Et par suite, en posant

(10)

$$B = \frac{\lambda - A}{A} \frac{d\lambda}{d\mathcal{D}} + \frac{\mathcal{L} - \odot}{A} \frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{D}},$$

$$C = \frac{\lambda - A}{A} \frac{d\lambda}{d\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{L} - \odot}{A} \frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{A}},$$

on trouvera

$$\theta = B\psi' + C\pi'.$$

Soient encore : Δ et R les distances respectives de Mercure et du Soleil à la Terre, H la latitude terrestre du lieu de l'observation, et posons

(11)

$$M = (1 - 0{,}0033 \sin^2 H)\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{R}\right),$$

$$\mathcal{E} = H - 688'' \sin 2H.$$

On aura (Chapitre I[er], Tome I), Π désignant d'ailleurs la parallaxe horizontale du Soleil à la distance moyenne et à l'équateur, et H.S l'heure sidérale du lieu de l'observation :

$$\psi' = -\Pi M \sin\mathcal{E} \cos\mathcal{D} + \Pi M \cos\mathcal{E} \sin\mathcal{D} \cos(\mathcal{A} - H.S),$$

$$\pi = \Pi M \frac{\cos\mathcal{E}}{\cos\mathcal{D}} \sin(\mathcal{A} - H.S),$$

d'où l'on conclura enfin

$$(12)\qquad \theta = \Pi M \left\{ \frac{C\cos\delta}{\cos\Phi}\sin(\mathcal{A} - H.S) + B\cos\delta\sin\Phi\cos(\mathcal{A} - H.S) - B\sin\delta\cos\Phi \right\}.$$

Les formules (7), (9), (10), (11) et (12) résolvent complétement la question. On y mettra, pour les diverses coordonnées de Mercure et du Soleil, leurs valeurs à l'instant du phénomène ; et, quant à l'heure sidérale du lieu de l'observation, elle est égale à celle de Paris, augmentée de la longitude Est du lieu considéré.

Le coefficient de Π, dans la valeur de θ, est parfaitement connu. Si donc on a observé une même phase du phénomène, en des lieux de la terre suffisamment distants l'un de l'autre pour que la différence des temps observés soit très-notable, on se demandera si l'on ne pourrait pas en déduire la valeur de la parallaxe solaire. Ce n'est pas ici le lieu de répondre à cette question, dont la solution dépend essentiellement de l'exactitude des observations, et des situations respectives des observateurs. La grandeur de la parallaxe influe aussi sur la durée du passage, pour un lieu donné de la Terre. Mais son effet est alors mêlé aux erreurs provenant de l'incertitude des Tables.

Il nous reste à examiner, en supposant qu'on ait déterminé par l'observation le temps d'une phase, d'un contact intérieur par exemple, quelle équation de condition il en résultera entre les données de la théorie.

Soit $\lambda - \Lambda$ la différence des latitudes apparentes calculées pour le moment de l'observation. La latitude du Soleil peut être considérée comme exacte. Mais la latitude de Mercure peut avoir besoin de la correction $\partial\lambda$, en raison des erreurs des données employées dans la détermination du mouvement héliocentrique. En outre, si la parallaxe horizontale Π du Soleil, dont il a été fait usage, doit être multipliée par $1 + \mu$, la différence $\lambda - \Lambda$ doit recevoir la correction $\mu\psi$.

Nous admettons pareillement que la différence $\text{☾} - \odot$, calculée par les Tables pour le moment de l'observation, doive recevoir la correction $\partial\text{☾} - \partial\odot + \mu\pi$; et que la distance calculée des centres, c, doive recevoir la correction ∂c.

On en déduit, entre les données du calcul et les corrections cherchées, la relation

$$(\lambda - \Lambda)(\partial\lambda + \mu\psi) + (\text{☾} - \odot)(\partial\text{☾} - \partial\odot + \mu\pi) - c\,\partial c = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}(\lambda - \Lambda)^2 - \frac{1}{2}(\text{☾} - \odot)^2.$$

Examinons successivement les divers termes de cette formule.

En recourant aux formules de la précédente section, et remarquant qu'au moment d'un passage $\text{☾} - \nu_1$ est sensiblement égal à $180°$, tandis que $\text{☾} - \odot$

est à peu près nul, on trouvera, 1° qu'on peut remplacer $\partial\lambda$ par $\frac{r}{\Delta}\partial s$, ∂s étant la correction de la latitude héliocentrique; 2° que $\partial\mathcal{L}$ est sensiblement égal à $-\frac{r}{\Delta}\partial v + \frac{R}{\Delta}\partial\odot$, et que, par suite, $\partial\mathcal{L} - \partial\odot$ peut être remplacé par $-\frac{r}{\Delta}(\partial v - \partial\odot)$, ∂v étant la correction de la longitude héliocentrique de la planète.

Le coefficient de μ, savoir $(\lambda - \Lambda)\psi + (\mathcal{L} - \odot)\pi$, résulte du calcul antérieur de l'effet de la parallaxe, et est égal à $\mathbf{A}\theta$.

Le second membre de la formule, qui est toujours très-petit, peut d'ailleurs prendre une forme plus simple. Soit υ le temps de la phase, calculé et compté à partir de l'instant observé. On peut écrire

$$(\lambda - \Lambda + n'\upsilon)^2 + (\mathcal{L} - \odot + m'\upsilon)^2 = c^2,$$

et on en déduit, υ étant très-petit,

$$c^2 - (\lambda - \Lambda)^2 - (\mathcal{L} - \odot)^2 = 2[(\lambda - \Lambda)n' + (\mathcal{L} - \odot)m']\upsilon = -2\mathbf{A}\upsilon.$$

Par ces considérations, l'équation de condition devient

$$(13) \qquad \frac{r}{\Delta}(\lambda - \Lambda)\partial s - \frac{r}{\Delta}(\mathcal{L} - \odot)(\partial v - \partial\odot) - c\,\partial c + \mathbf{A}\theta.\mu + \mathbf{A}\upsilon = 0;$$

υ étant l'excès du temps calculé sur le temps observé. On divisera les termes de cette équation par c, afin qu'ils expriment tous des secondes d'arc comme la correction ∂c. Par là, toutes les formules de ce genre deviendront comparables entre elles.

Je n'emploierai, à la formation des équations de condition, que les observations des contacts intérieurs. Elles jouissent en général d'une grande précision, ainsi qu'on le reconnaît en comparant les observations d'un même passage faites par différents astronomes. Il est bien entendu que je ne parle que des observations faites directement au moyen des lunettes.

Plusieurs causes peuvent toutefois introduire quelque erreur. Lorsque l'observation a été faite dans un grand observatoire, on peut regarder l'heure de la pendule comme exacte. Mais en est-il toujours de même, quand le passage n'a été vu que dans une contrée lointaine, et par un observateur dont le nom n'est connu qu'à l'occasion de ce passage? En outre, on dépend complétement de la longitude du lieu de l'observateur, qui souvent ne l'a pas connue lui-même d'une manière exacte; et alors, en recourant aux observations modernes pour la déterminer, on peut s'exposer quelquefois, faute de renseignements suffisants, à appliquer à un lieu une longitude qui convient à un autre.

Nous attribuerons au Soleil un diamètre de 32′0″,00 à la distance moyenne, et à la planète un diamètre de 6″,68 à la même distance.

Prenons pour exemple de l'application des formules précédentes le passage du 8 mai 1845, pour lequel la conjonction écliptique a eu lieu vers 8 heures du soir, temps moyen de Paris.

Coordonnées héliocentriques de Mercure, le 8 mai 1845, à $8^h + t$, temps moyen de l'Observatoire de Paris.

Longitude héliocentrique.............	$v_1 =$	$228^\circ\ 1'\ 40'',22 + 433'',732\,t - 0'',1202\,t^2$,
Latitude héliocentrique..............	$s = -$	$0.11.15,54 - 53,249\,t + 0,0148\,t^2$,
Log. de la distance au Soleil..........	$r =$	$\bar{1},656\,9393 + 0,000\,10515\,t - 0,000\,0002\,28\,t^2$.

Coordonnées géocentriques du Soleil.

Longitude vraie du Soleil.............	$=$	$48^\circ\ 2'\ 3'',58 + 144'',942\,t - 0'',0015\,t^2$,
Aberration en longitude..............	$= -$	$20,05$
Latitude...........................	$\Lambda = -$	$0,22 - 0'',005\,t$
Log. de la distance à la Terre.........	$\log R =$	$0,004\,3708 + 0,000\,00405\,t$,
Demi-diamètre du Soleil..............	$=$	$950'',40 - 0'',009\,t$.

Coordonnées géocentriques de Mercure.

Long. géocentrique vraie de Mercure...	$=$	$48^\circ\,2'\,22'',64 - 90'',686\,t - 0'',0040\,t^2$,
Aberration en longitude..............	$= +$	$6,91$
Latitude géocentrique vraie de Mercure.	$= -$	$0.9.11,61 - 43'',687\,t - 0'',0057\,t^2$,
Aberration en latitude................	$= +$	$3,33$
Log. de la distance à la Terre.........	$=$	$\bar{1},745\,26 - 0,000\,079\,t$,
Demi-diamètre de Mercure............	$=$	$6'',005 + 0'',001\,t$.

On conclut de ces formules :

$$\mathcal{L} - \odot = 46'',02 - 235'',628\,t - 0'',0025\,t^2,$$
$$\lambda - \Lambda = -548'',06 - 43'',682\,t - 0'',0057\,t^2.$$

On calculera l'instant de la conjonction apparente en posant $\mathcal{L} - \odot = 0$, et l'on trouvera :

Temps de la conjonction apparente à............... $8^h\,11^m\,43^s,1$.

Les deux instants où les centres du Soleil et de la planète seront à la distance c l'un de l'autre, seront calculés par les formules suivantes, conformément aux relations de la page 63 :

$$k = -5,266\,64 + 0,174\,111\left(\frac{c}{100}\right)^2 - 0,000\,0292\,t^2,$$
$$t = -0,228\,03 \pm \sqrt{0,051\,997 + k};$$

le terme en t^2 de la valeur de k n'a presque pas d'influence sur le résultat; on le calculera au moyen d'une valeur approchée de t.

Si, conformément aux conclusions qui résultent de nos recherches, ainsi que des observations de Bessel, on ne tient aucun compte de l'influence d'une irradiation, on devra supposer $c = 944'',43$ au moment du premier contact intérieur, et $c = 944'',35$ au moment du second contact intérieur.

Le temps total τ, que le disque de la planète met à entrer sur le disque du Soleil ou à en sortir, s'obtiendra par les formules suivantes, où d désigne le diamètre de la planète :

$$A = 43,682\,(\lambda - \Lambda) + 235,628\,(\mathcal{L} - \odot),$$

$$\tau = -\frac{cd}{A}.$$

J'ai trouvé, à l'aide de ces nombres et de ces formules :

POUR L'ENTRÉE :		POUR LA SORTIE :	
$k =$	$10,26439$	$k =$	$10,25972$
$t =$	$-3^h,43994$	$t =$	$+2^h,98316$
$\log A =$	$5,26589$	$\log A =$	$5,26582$
1er contact interne à......	$4^h\,33^m\,36^s,2$	2e contact interne à.......	$10^h\,58^m\,59^s,4$
Durée de l'entrée.........	$3.41,2$	Durée de la sortie........	$3.41,6$
1er contact externe à......	$4.29.55,0$	2e contact externe à.......	$11.\ 2.41,0$

Cherchons actuellement la correction des instants des deux phases que nous venons de calculer, en raison de l'effet des parallaxes, et considérons spécialement le moment du *premier contact intérieur*. En suivant les formules ci-dessus, on trouvera successivement :

$$t = -3^h,440, \qquad \log A = 5,2659,$$
$$\lambda - \Lambda = -397'',8, \qquad \vartheta = -7,76\psi + 16,72\psi'.$$
$$\mathcal{L} - \odot = +856'',6,$$

(ϑ, correction de l'instant de la phase, est exprimée en secondes de temps.)

$\mathcal{L} = 48^\circ\ 8'$,	$\sin S = \bar{1},4441$,	$\dfrac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{A}} = 0,917$,
$\lambda = -\ 0^\circ\ 7'$,	$\cos S = \bar{1},9825$.	$\dfrac{d\mathcal{L}}{d\omega} = 0,279$,
$\mathcal{A} = 45^\circ 42' = (3^h\,2^m\,46^s)$,		$\dfrac{d\lambda}{d\mathcal{A}} = -0,267$,
$\omega = +17^\circ\ 8'$.		$\dfrac{d\lambda}{d\omega} = 0,960$.

$$\vartheta = B\psi' + C\varpi' = -2,79\psi' + 17,41\pi',$$

$$\Pi = 8'',58, \qquad \Pi M = 6'',93,$$

$$\theta = +(2,1012)\cos\beta \sin(3^h 2^m 46^s - \text{H.S}) - (0,7554)\cos\beta\cos(3^h 2^m 46^s - \text{H.S}) + (1,2665)\sin\beta\,;$$

ou bien encore

$$\theta = (1,2665)\sin\beta + (2,1016)\cos\beta\sin(3^h 2^m 46^s - \text{H.S} - 2^\circ 35')\,;$$

les coefficients étant, dans cette formule, ainsi que dans la précédente, représentés par leurs logarithmes.

A $4^h 33^m 36^s,2$ de temps moyen à Paris, l'heure sidérale H.S est égale à $7^h 39^m 1^s$: et dans le lieu dont la longitude *Est* est L, elle devient $7^h 39^m 1^s + L$. En substituant dans la formule précédente, on obtient définitivement, pour calculer la correction du temps du premier contact interne, l'expression :

$$\theta = (1,2665)\sin\beta - (2,1016)\cos\beta\sin(71^\circ 39' + L).$$

On trouvera pareillement, pour calculer la correction θ' du temps du *second contact interne*, la formule

$$\theta' = -(2,0338)\sin\beta - (1,8344)\cos\beta\sin(136^\circ 50' + L).$$

Rappelons que si H est la latitude du lieu, β est égal à $H - 688''\sin 2H$.

La première de ces formules étant appliquée aux positions géocentriques de Hambourg, Nienstedten, Genève et Bruxelles, fournit les corrections respectives -59^s, -59^s, -72^s et -62^s, lesquelles doivent être retranchées des temps observés. On trouve ainsi pour l'instant du premier contact interne, supposé vu du centre de la Terre :

Hambourg	Rumker	$4^h 32^m 53^s$
	Gotze	4.33.10
	Funk	4.33.13
	Olde	4.33.17
Genève	Plantamour	4.33.18
Nienstedten	Schumacher	$4^h 33^m 18^s$
	Petersen	4.33.19
	R. Schumacher	4.32.55
Bruxelles	Quetelet	4.33.21
	Houseau	4.33.21
	Bouvy	4.33.18
	Liagre	4.33.14

On peut rejeter les déterminations de Rumker à Hambourg et de R. Schumacher

à Nienstedten : elles paraissent un peu faibles. La moyenne des dix autres est égale à $4^h 33^m 17^s$. Le temps du premier contact interne, ainsi donné par l'observation, est plus faible de 19^s que le temps calculé ci-dessus.

L'équation de condition fournie par l'observation du premier contact interne est, conformément à la page 67,

$$0,739(\delta v - \delta \odot) + 0,343\,\delta s + \delta c - 0,0543\,\theta\mu - 0'',0543\,v = 0;$$

tandis que le second contact interne donne la relation

$$0,568(\delta v - \delta \odot) - 0,587\,\delta s - \delta c - 0,0543\,\theta'\mu - 0'',0543\,v' = 0,$$

v' étant l'excès du temps du calcul sur l'observation et θ' étant la correction du temps de la phase, en raison de l'effet des parallaxes.

On peut voir ici qu'il n'est pas nécessaire de conserver le terme en μ, et qu'il n'y a rien à conclure de cette observation pour l'estime de la parallaxe.

Les Tables du Soleil et de Mercure présenteront toujours, quoi qu'on fasse, quelques imperfections insignifiantes quant à la théorie de ces astres, mais qui ne permettraient pas de tirer aucune détermination relative à la parallaxe, de l'observation d'un contact unique, faite en un seul point de la surface de la Terre.

Lorsqu'une même phase est observée en deux stations fort éloignées l'une de l'autre, les erreurs des Tables disparaissent du calcul de la différence des temps; et, si cette différence était assez considérable, on en pourrait conclure la valeur de la parallaxe. En 1845, le second contact interne a été observé en Europe et à Cincinnati (Amérique) : mais la différence des temps, qui n'est que d'une minute environ, est trop faible relativement aux erreurs qui peuvent provenir de l'estime du temps et de l'imperfection de la connaissance des longitudes terrestres. Aucun des passages de Mercure, à l'exception de celui de 1832, n'a d'ailleurs fourni de déterminations plus favorables.

Lorsqu'on calcule la durée du passage de la planète sur le Soleil, on reconnaît que l'erreur qui peut provenir des incertitudes des données est la même pour toutes les stations. D'où il résulte que la différence des durées des passages, calculées pour deux stations différentes, n'a d'autre incertitude que celle qui résulterait de l'inexactitude de la grandeur de la parallaxe. Si donc on disposait d'observations complètes et exactes faites en des stations éloignées l'une de l'autre et telles que les durées des passages y eussent des valeurs suffisamment différentes, on en pourrait conclure la quantité de la parallaxe.

La durée du passage, observée en Europe en 1832, surpasse effectivement de *trois minutes et demie* la durée observée au cap de Bonne-Espérance; et assurément, si l'on ne possédait aucune donnée sur la valeur de la parallaxe solaire, on trouverait dans ce résultat un précieux élément. Mais, cette différence de $3^m\frac{1}{2}$ est encore assez courte, eu égard aux erreurs qu'elle peut comporter, surtout si l'on considère que l'observation n'a été faite au Cap que par Henderson, et qu'il arrive aux plus habiles observateurs de différer notablement entre eux sur l'instant d'une phase. Le résultat qu'on tirerait du calcul des observations de 1832, relativement à la valeur de la parallaxe du Soleil, ne pourrait donc être considéré comme propre à confirmer ou à contredire sérieusement celui qu'on a déduit des passages de Vénus, et dès lors il n'y a pas lieu de s'y arrêter.

En négligeant, dans la première des relations déduites du passage de 1845, le terme dépendant de la parallaxe, et en y remplaçant v par $+19^s$, excès du calcul sur l'observation, on obtient l'équation de condition

$$\text{(A)} \qquad 0,739\,(\delta v - \delta\odot) + 0,343\,\delta s + \delta c - 1'',03 = 0.$$

Le second contact interne a été observé à Cincinnati : mais il est à craindre qu'il ne se soit glissé quelque erreur dans le temps. L'heure du premier contact est trop faible de 38^s; et comme la durée du passage paraît avoir été observée exactement, la même erreur, quelle qu'en soit la source, se retrouve sans doute dans le temps du second contact, tel qu'il est rapporté dans la III[e] Section.

Les coordonnées héliocentriques de Mercure, employées dans l'exemple que nous venons de donner, doivent recevoir les corrections $\delta v = +0'',02$ et $\delta s = -0'',15$, pour coïncider rigoureusement avec nos Tables provisoires de Mercure. Pareillement, la longitude du Soleil doit recevoir la correction $\delta\odot = +1'',38$ pour concorder avec celle qu'on déduit de nos Tables. Tous les calculs ayant été primitivement faits avec les nombres rapportés, nous avons cru inutile de les reprendre, d'autant plus que l'équation de condition (A) montre suffisamment comment elle doit être corrigée pour s'adapter aux nouvelles positions de Mercure et du Soleil. En augmentant $\delta v - \delta\odot$ de $-1'',40$ et δs de $-0'',15$, cette équation devient

$$0,739\,(\delta v - \delta\odot) + 0,343\,\delta s + \delta c - 2'',10 = 0.$$

C'est ainsi qu'a été conduite la discussion par laquelle nous avons déduit des observations des passages, rapportées dans la précédente Section, une suite d'é-

quations de condition pareilles à celle que nous venons d'écrire. Sans donner tout le détail des opérations, comme pour le passage de 1845 qui nous a servi d'exemple, il sera sans doute utile de présenter ici les positions tabulaires de Mercure et du Soleil dont il a été fait usage : elles serviraient de jalons à celui qui voudrait reprendre les calculs. Les positions de Mercure sont déduites des éléments provisoires rassemblés dans la Section II de la présente théorie. Les positions du Soleil ont été obtenues au moyen des Tables contenues dans le Chapitre XIV (Tome IV).

Soient, l la longitude moyenne de Mercure, f l'équation du centre, v la longitude vraie dans l'orbite, p', p'', p^{iv}, p^{v} les perturbations de cette longitude, produites respectivement par Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne. On a trouvé :

Longitudes de Mercure dans son orbite.

TEMPS MOYENS.		l	f	p'	p''	p^{iv}	p^{v}	
	j h m s	° ′ ″	° ′ ″	″	″	″	″	° ′ ″
1661 Mai	3. 4.57.50	v = 210.35.33,88	+ 13. 0.10,13	− 4,74	− 0,45	− 2,19	− 0,04	= 223.35.36,59
1677 Nov.	6.21.11. 0	v = 54.29. 0,85	− 9.32.14,84	− 16,53	+ 1,18	− 0,76	− 0,05	= 44.56.29,85
1697 Nov.	2.19.53. 0	v = 52.42.20,70	− 10.32.55,82	+ 4,94	+ 1,34	+ 4,39	− 0,33	= 42. 9.35,22
1723 Nov.	9 2.36. 0	v = 55.31.26,91	− 9.22.29,34	− 9,83	+ 1,18	− 5,05	− 0,46	= 46. 8.43,41
1736 Nov.	10.21.22.30	v = 57.30.57,43	− 8.28.52,91	− 4,33	+ 1,09	− 2,61	− 0,05	= 49. 1.58,62
1743 Nov.	4.20.24.30	v = 52.54.44,19	− 10.47.19,74	+ 15,74	+ 1,31	+ 4,40	+ 0,10	= 42. 7.46,00
1753 Mai	5.22.15. 0	v = 213.46.27,24	+ 12.30. 2,71	− 4,47	− 0,42	+ 1,51	+ 0,26	= 226.16.26,83
1769 Nov.	9. 7.32. 0	v = 56.28.56,75	− 9.15. 8,27	− 9,46	+ 1,17	+ 0,91	− 0,59	= 47.13.40,51
1782 Nov.	12. 2.49. 0	v = 58.33.39,45	− 8.18.44,45	+ 16,81	+ 1,07	− 4,37	− 0,46	= 50.15. 8,05
1786 Mai	3.15. 7. 0	v = 209.47.32,11	+ 13.46. 8,79	− 5,10	− 0,46	− 2,05	+ 0,16	= 223.33.33,45
1789 Nov.	5. 1. 4. 0	v = 53.49.25,43	− 10.41.36,28	+ 4,42	+ 1,30	− 2,15	+ 0,47	= 43. 7.53,19
1799 Mai	6.21.20. 0	v = 213.44. 6,34	+ 12.42.56,12	+ 3,96	− 0,44	+ 0,29	+ 0,20	= 226.27. 6,47
1802 Nov.	8.23.51. 0	v = 56.29.56,68	− 9.29.44,20	− 3,78	+ 1,24	+ 3,16	+ 0,08	= 47. 0.13,18
1832 Mai	4.21.12. 0	v = 210.56.48,54	+ 13.38.45,40	− 3,14	− 0,45	− 0,99	− 0,22	= 224.35.29,14
1845 Mai	8. 4.32. 0	v = 215. 4.48,40	+ 12.32. 2,87	+ 3,17	− 0,43	− 2,35	+ 0,16	= 227.36.51,82
1848 Nov.	8.23.16. 0	v = 56.31. 0,91	− 9.50. 6,10	− 20,44	+ 1,23	− 3,62	+ 0,47	= 46.40.32,45

Soient pareillement, L la longitude moyenne du Soleil, augmentée de 20″,44, pour la corriger de la constante de l'aberration ; F l'équation du centre, calculée en augmentant la longitude du périgée de la même constante 20″,44 ; P☾ l'équation lunaire ; P, P′, P‴, P^{iv}, P^{v} les perturbations dues aux actions de Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. On a formé ces diverses quantités, pour des heures dont quelques-unes diffèrent un peu des précédentes, principalement quand on a observé l'entrée et la sortie. Ce changement tient à ce qu'on a déterminé directement plusieurs positions de Mercure, et nous n'en avons rapporté qu'une pour abréger ; tandis qu'on n'a calculé qu'un lieu du Soleil, vers l'époque de la conjonction, et les autres positions en ont été déduites par le mouvement connu des coordonnées.

Longitudes vraies du Soleil.

TEMPS MOYENS.		L	F	$P_{☾}$	P	P'	P''	P'''	P^{v}
1661 Mai	3ʲ. 4ʰ.57ᵐ.50ˢ	⊙ = 42°. 0'.10",10	+ 1°.33'.54",46	+ 5",79	+ 0",03	+ 9",50	− 0",47	− 2",02	− 0",24
1677 Nov.	7. 0. 0. 0	⊙ =227.13.24,10	− 1.30. 9,89	+ 2,64	− 0,06	− 3,81	+ 2,17	− 5,67	+ 0,22
1697 Nov.	2.19.53. 0	⊙ =223.15.54,46	− 1.35.22,57	− 5,62	− 0,07	+ 2,17	− 0,11	+ 3,67	− 0,31
1723 Nov.	9. 2.36. 0	⊙ =228.10.33,12	− 1.29.50,89	+ 3,98	− 0,06	+ 1,02	+ 2,62	− 7,70	− 0,21
1736 Nov.	10.23. 0. 0	⊙ =230.50.17,91	− 1.26.35,48	+ 6,73	− 0,05	− 6,59	+ 0,89	− 7,37	+ 0,21
1743 Nov.	4.22.40. 0	⊙ =224.13.30,79	− 1.35. 3,93	− 4,39	− 0,07	+ 3,70	+ 1,01	+ 7,34	+ 0,16
1753 Mai	6.16.23.30	⊙ = 44.24.15,23	+ 1.32.43,30	+ 4,00	+ 0,03	+ 2,88	+ 3,48	− 9,18	+ 0,29
1769 Nov.	9. 7.32. 0	⊙ =229.13.27,65	− 1.29.24,39	+ 5,19	− 0,06	+ 2,73	+ 1,78	− 0,02	+ 0,04
1782 Nov.	12. 3.25.30	⊙ =231.51.57,46	− 1.26. 9,89	+ 6,49	− 0,05	+ 6,66	− 1,72	− 6,32	− 0,40
1786 Mai	3.17.39. 0	⊙ = 42.15. 3,41	+ 1.35.46,55	+ 6,30	+ 0,02	−10,31	+ 0,86	+ 0,55	+ 0,71
1789 Nov.	5. 3.29. 0	⊙ =225.16. 8,36	− 1.34.39,36	− 3,39	− 0,07	− 7,49	+ 1,61	+ 4,28	+ 0,16
1799 Mai	7. 1. 0.30	⊙ = 45.21.48,63	+ 1.32.24,71	+ 3,14	+ 0,03	− 8,80	+ 2,63	− 6,94	− 0,50
1802 Nov.	8.23.51. 0	⊙ =227.55.48,51	− 1.31.41,24	+ 0,39	− 0,06	− 1,46	+ 2,70	+ 7,28	+ 0,16
1832 Mai	5. 0. 0. 0	⊙ = 43.21.28,42	+ 1.35.18,61	+ 5,60	+ 0,03	+ 8,86	+ 3,23	+10,44	− 0,74
1845 Mai	8. 4. 0. 0	⊙ = 46.19.57,37	+ 1.32. 5,41	+ 2,84	+ 0,03	− 1,34	+ 3,16	+ 3,86	+ 0,70
1848 Nov.	8.23.16. 0	⊙ =228.45. 8,76	− 1.31.32,25	+ 2,36	− 0,06	− 6,74	+ 1,93	+ 2,79	− 0,05

C'est au moyen de ces coordonnées principales, et en les complétant d'ailleurs comme on l'a exposé avec détail pour le passage de 1832, qu'on a formé les diverses relations que nous allons écrire. Pour plus de clarté, nous distinguons entre les passages de novembre et de mai, ainsi qu'entre les résultats fournis par l'entrée et par la sortie.

Équations de condition, déduites des passages observés en novembre.

ÉPOQUES.	ENTRÉE.	SORTIE.
1677,85	$0,46\,(\delta v - \delta\odot) - 0,06\,\delta s + \delta c + 3'',16 = 0$	$0,43\,(\delta v - \delta\odot) + 0,18\,\delta s - \delta c - 4'',59 = 0$
1697,84		$0,39\,(\delta v - \delta\odot) - 0,26\,\delta s - \delta c + 0,45 = 0$
1723,85	$0,45\,(\delta v - \delta\odot) - 0,10\,\delta s + \delta c - 0,86 = 0$	
1736,86	$0,28\,(\delta v - \delta\odot) - 0,37\,\delta s + \delta c + 0,75 = 0$	$0,16\,(\delta v - \delta\odot) + 0,43\,\delta s - \delta c + 0,13 = 0$
1743,84	$0,34\,(\delta v - \delta\odot) + 0,32\,\delta s + \delta c - 0,01 = 0$	$0,42\,(\delta v - \delta\odot) - 0,20\,\delta s - \delta c + 0,92 = 0$
1769,85	$0,44\,(\delta v - \delta\odot) - 0,15\,\delta s + \delta c + 0,99 = 0$	
1782,86	$0,17\,(\delta v - \delta\odot) - 0,45\,\delta s + \delta c - 0,92 = 0$	$0,03\,(\delta v - \delta\odot) + 0,46\,\delta s - \delta c + 0,23 = 0$
1789,84	$0,38\,(\delta v - \delta\odot) + 0,27\,\delta s + \delta c + 1,81 = 0$	$0,44\,(\delta v - \delta\odot) - 0,15\,\delta s - \delta c + 0,97 = 0$
1802,85		$0,46\,(\delta v - \delta\odot) + 0,10\,\delta s - \delta c + 1,47 = 0$
1848,86	$0,46\,(\delta v - \delta\odot) - 0,01\,\delta s + \delta c + 2,27 = 0$	

Équations de condition déduites des passages observés en mai.

ÉPOQUES.	ENTRÉE.	SORTIE.
1661,33	$0,81\,(\delta v - \delta\odot) - 0,18\,\delta s + 12'',7 = 0$	Observation des positions successives de Mercure, faites à la chambre obscure par Hévélius.
1753,34		$0,77\,(\delta v - \delta\odot) - 0,27\,\delta s - \delta c + 12'',05 = 0$
1786,34	$0,45\,(\delta v - \delta\odot) - 0,70\,\delta s + \delta c + 4'',84 = 0$	$0,65\,(\delta v - \delta\odot) + 0,47\,\delta s - \delta c + 5,11 = 0$
1799,34	$0,80\,(\delta v - \delta\odot) + 0,16\,\delta s + \delta c + 5,65 = 0$	$0,69\,(\delta v - \delta\odot) - 0,43\,\delta s - \delta c + 3,83 = 0$
1832,34	$0,61\,(\delta v - \delta\odot) - 0,53\,\delta s + \delta c + 0,17 = 0$	$0,77\,(\delta v - \delta\odot) + 0,28\,\delta s - \delta c - 0,58 = 0$
1845,35	$0,74\,(\delta v - \delta\odot) + 0,34\,\delta s + \delta c - 1,03 = 0$	

Nous avons dit, dans la précédente Section, et à l'occasion du passage de 1756, que l'observation complète qui en a été faite à Pékin était défectueuse. On tire des observations du premier et du second contact intérieurs les relations

$$\text{Entrée} \ldots\ldots \quad 0,453\,(\delta v - \delta\odot) + \delta c + 12'',86 = 0,$$
$$\text{Sortie} \ldots\ldots \quad 0,465\,(\delta v - \delta\odot) - \delta c - 5'',77 = 0;$$

la correction de la latitude, que nous reconnaîtrons plus tard être toujours fort petite, ne peut avoir ici aucune influence ni sur l'entrée ni sur la sortie, ce qui tient à ce que la latitude de Mercure est très-faible en ces deux instants. Or on déduit de ces relations

$$2\,\delta c = -18'',7;$$

en sorte que pour faire accorder entre elles les observations de l'entrée et de la sortie, il faudrait diminuer de 9'',35 la différence des deux demi-diamètres du Soleil et de Mercure. C'est un résultat inadmissible et dont je ne puis accuser que les observations, puisque de Lisle, qui s'est tant occupé de cette matière, trouvait que pour faire concorder les résultats il faudrait diminuer de 20 secondes le diamètre du Soleil.

Il se sera donc glissé quelque erreur dans les observations. L'instant du second contact, donné par les deux observateurs, mérite plus de confiance sans doute, et effectivement il s'accorde assez bien avec les passages de 1736 et 1743 observés à Paris. Je me suis toutefois décidé à ne faire aucun usage de cette observation. Il n'y aurait eu, il est vrai, aucun inconvénient à employer l'observation de la sortie en rejetant celle de l'entrée, mais on n'y aurait non plus rien gagné. Il serait en outre peu logique, parmi des résultats défectueux, d'en choisir un par cette considération qu'il s'accorde avec d'autres données que nous possédons déjà, et de prétendre ainsi ajouter à la certitude de ces dernières.

Nous ne ferons point non plus entrer dans notre discussion les conditions résultant des passages de 1661 et de 1677. Ainsi qu'on l'a vu, l'observation d'Hé-

10.

vélius en 1661 laisse trop à désirer. L'observation faite par Halley en 1677 vaut mieux. Toutefois les deux conditions données, l'une par l'observation de l'entrée, l'autre par l'observation de la sortie, ne concordent pas suffisamment entre elles. La moyenne seule paraît très-précise : ce qui semble indiquer que, par suite du mode d'appréciation de l'instant d'un contact interne, le temps de l'entrée aura été estimé trop fort, et le temps de la sortie trop faible d'une même quantité. Cette circonstance s'est rencontrée fréquemment dans les observations des passages : et elle dépend sans doute, non-seulement de l'observateur, mais de l'imperfection de son instrument.

Laissant donc de côté les observations de 1661 et de 1677, on remarquera, dès l'abord, que les observations des passages par le nœud ascendant (novembre) ne donnent lieu qu'à de faibles erreurs : tandis que les passages par le nœud descendant (mai) donnent lieu à une erreur de 12",05 en 1753, et qui, diminuant à peu près régulièrement à mesure que le temps augmente, se réduit à — 1",03 en 1845.

Ces *treize* secondes de variation, en 92 années, demandent à être prises en sérieuse considération, en raison de l'exactitude du mode d'observation dont elles résultent. Elles ne sauraient en effet être attribuées aux incertitudes des observations des passages, puisqu'il faudrait supposer que tous les astronomes auraient commis des inexactitudes considérables dans la mesure des temps des contacts : ces inexactitudes devraient en outre varier d'une manière progressive avec le temps, et différer de plusieurs minutes aux extrémités de la période de 92 ans. Circonstances tout à fait inadmissibles !

Cela étant, on aperçoit qu'on ne parviendra à détruire les erreurs signalées dans les passages de mai, sans en introduire dans les passages de novembre, qu'en modifiant les valeurs attribuées aux parties proportionnelles aux temps de deux des éléments de l'orbite. Les deux corrections devront se détruire à peu près dans les passages de novembre, tandis qu'en s'ajoutant elles rendront raison des écarts observés dans les passages du mois de mai. La considération du mouvement du nœud ne peut dès lors servir à résoudre la question : l'erreur de la longitude du nœud influe sur le calcul des temps des passages d'une manière toute différente, suivant la latitude de la planète.

La longitude moyenne, l'excentricité et le périhélie sont donc les principaux éléments dont nous allons avoir à étudier les variations. Il convient de le faire d'abord d'une manière approximative, qui ne laissera pas de fournir immédiatement une très-grande exactitude.

Les passages de novembre ayant tous lieu dans les environs du nœud ascen-

dant, la correction de la longitude peut, pour ces passages et dans une première approximation, être considérée comme variant proportionnellement avec le temps. Nous poserons donc

$$\delta v = a + bt,$$

a et b étant deux constantes liées aux corrections $\delta\varepsilon$, δe et $\delta\varpi$ de la longitude moyenne de l'époque, de l'excentricité et de la longitude du périhélie, ainsi qu'aux variations annuelles δn, e' et ϖ' de ces quantités, par les formules

$$1,492\,\delta\varepsilon - 1,044\,\delta e - 0,492\,\delta\varpi = a,$$
$$1,492\,\delta n - 1,044\,e' - 0,492\,\varpi' = b.$$

Les coefficients numériques qui entrent dans ces relations ont les valeurs qui conviennent, en moyenne, aux époques des passages qu'il s'agit de discuter.

En remplaçant δv par l'expression $a + bt$, dans les conditions relatives aux passages de novembre, négligeant les corrections $\delta\odot$ et δc, et tirant de ces conditions les valeurs de a et de b, on obtient

$$a = -4'',43, \qquad b = -0'',0310:$$

par là, les résidus des équations (excès du calcul sur l'observation) deviennent

1697	S	+ 0",56
1723	E	− 1,08
1736	E	+ 0,54
	S	− 0,06
1743	E	− 0",44
	S	+ 0,47
1769	E	+ 0,18
1782	E	− 1,20
	S	+ 0,02
1789	E	+ 0",77
	S	− 0,10
1802	S	+ 0,09
1848	E	+ 0,25

Lors des passages par le nœud descendant, nous poserons pareillement

$$\delta v = a' + b't,$$

a' et b' étant liées aux mêmes corrections des éléments que ci-dessus, par les formules

$$0,712\,\delta\varepsilon + 0,916\,\delta e + 0,284\,\delta\varpi = a',$$
$$0,712\,\delta n + 0,916\,e' + 0,284\,\varpi' = b';$$

et nous en conclurons

$$a' = 3'',22, \qquad b' = +0'',1884.$$

Les résidus des équations correspondantes deviennent alors

1753	S	+ 0",07
1786	E	+ 0,11
	S	− 0,06
1799	E	+ 0,71
	S	− 0,82
1832	E	+ 0",08
	S	− 0,67
1845	E	+ 0,60

Les erreurs notables qui existaient ont, comme on le voit, complètement disparu.

Connaissant les valeurs de a et a', on peut éliminer $\delta\varepsilon$ entre les équations dont ces quantités sont les seconds membres. On tombe ainsi sur la relation

$$2,72\,\delta e + \delta\varpi = + 10'',27.$$

Semblablement on tire, par l'élimination de δn entre les équations dont les seconds membres sont égaux à b et b',

$$2,72\,e' + \varpi' = + 0'',392.$$

On voit donc que la discussion des observations des passages de la planète sur le Soleil fournira une relation précise entre l'excentricité et la longitude du périhélie; mais que pour déterminer l'un de ces deux éléments, il sera indispensable de recourir à l'emploi des observations méridiennes.

Le mouvement annuel $2,72\,e' + \varpi' = + 0'',392$ doit fixer notre attention ; cette quantité étant essentiellement liée aux valeurs admises pour les masses des planètes. Les variations séculaires de l'excentricité et du périhélie de Mercure ont été calculées en attribuant aux masses des planètes les valeurs fournies par des considérations étrangères à la théorie de Mercure, mais qu'on avait lieu de croire fort exactes. On pouvait donc espérer que la discussion des observations de Mercure confirmerait simplement les recherches antérieures. Or il n'en est rien : nous voyons ici que le triple environ du mouvement séculaire de l'excentricité, ajouté au mouvement séculaire du périhélie, donnent une somme que les observations font plus grande de 39″ que celle qui résulte du calcul. La partie de cette somme, due à l'action de Vénus, est égale à 288″, par le calcul fondé sur la valeur 0,000 002 488 5 de la masse : et en conséquence, pour faire concorder la théorie avec les observations de Mercure, on devrait augmenter la masse, reçue pour Vénus, de près de *un septième* de sa valeur!

Avant de poursuivre cet examen, il est nécessaire de porter dans la discussion des équations de condition une plus grande rigueur. La connaissance de la nature du résultat final, que nous venons d'acquérir, nous permettra de nous diriger d'une manière utile.

Considérons l'une des équations de condition

$$A\,\delta v + B\,\delta s \pm \delta c - A\,\delta\odot + K = 0,$$

δc étant affecté du signe supérieur ou du signe inférieur, suivant que l'équation correspond à l'entrée ou à la sortie de la planète.

L'erreur très-petite qui peut exister sur l'inclinaison du plan de l'orbite, n'a aucune influence sur le calcul de la latitude, au moment d'un passage qui se produit toujours près de l'un des nœuds. On a dans ce cas, fort simplement,

$\partial s = \pm \operatorname{tang} \varphi\, (\partial v - \partial \theta)$, et ainsi l'équation qu'il s'agit de développer, devient

$$(\mathrm{A} \pm 0{,}122\,\mathrm{B})\,\partial v \mp 0{,}122\,\mathrm{B}\,\partial\theta \pm \partial c - \mathrm{A}\,\partial\odot + \mathrm{K} = 0.$$

Les deux premiers doubles signes sont relatifs aux passages par le nœud ascendant ou par le nœud descendant, et le troisième se rapporte à l'entrée ou à la sortie, comme il a été dit.

∂v dépend des corrections $\partial\varepsilon$, ∂n, ∂e et $\partial\varpi$ des éléments du mouvement de Mercure dans son orbite. $\partial\odot$ dépend des corrections correspondantes des éléments du mouvement du Soleil, corrections que nous désignerons par $\partial\varepsilon''$, $\partial n''$, $\partial e''$ et $\partial\varpi''$

D'un autre côté, la valeur adoptée pour la masse de Vénus influe de plusieurs manières. Elle entre dans les expressions des variations séculaires de e, ϖ, θ, e'' et ϖ'' : elle se retrouve dans les perturbations périodiques de la longitude de Mercure et de la longitude du Soleil. La discussion préliminaire, à laquelle nous nous sommes livrés, montre qu'il ne faut pas confondre toutes ces actions en une seule.

Les corrections e' et π' des mouvements annuels de l'excentricité et du périhélie de Mercure seront traitées comme deux inconnues immédiates et distinctes, indépendamment de toute considération de la cause qui peut les rendre nécessaires. Nous savons déjà que cela suffira pour satisfaire convenablement à toutes les équations. Mais, lorsqu'en vertu des valeurs ainsi trouvées pour e' et ϖ', on viendra à se demander s'il est effectivement nécessaire d'augmenter notablement la masse de Vénus, il importera de considérer l'effet qui en résulterait sur les termes proportionnels à cette masse et qui entrent dans les variations séculaires de θ, e'' et ϖ'', ainsi que dans les perturbations périodiques de Mercure et du Soleil. Nous introduirons donc dans les équations un terme proportionnel à la correction ν' de la masse de Vénus.

Nous tiendrons compte de la correction ν de la masse de Mercure.

Enfin, la correction ∂c n'a pas la même valeur en novembre et en mai, à cause de l'excentricité des orbites. Soient $\partial\frac{\mathrm{D}}{2}$ et $\partial\frac{d}{2}$ les corrections des demi-diamètres du Soleil et de Mercure, à la distance moyenne : x et x' les valeurs de ∂c, en novembre et en mai. L'on a, à très-peu près,

En novembre. $\quad x = 0{,}99\,\partial\frac{\mathrm{D}}{2} - 1{,}48\,\partial\frac{d}{2}$,

En mai...... $\quad x' = 1{,}01\,\partial\frac{\mathrm{D}}{2} - 1{,}80\,\partial\frac{d}{2}$.

Treize équations correspondent aux passages de novembre ; huit seulement aux passages de mai. Comme il convient de donner aux deux époques une même influence, nous multiplierons par le rapport $\frac{13}{8}$ toutes les équations relatives aux passages de mai, sauf à diviser ensuite les résidus définitifs par le même rapport.

Ensemble des équations de condition déduites de la discussion des observations des passages de Mercure sur le Soleil.

1697 S $0{,}53\,\delta\varepsilon - 81{,}0\,\delta n - 0{,}41\,\delta e - 0{,}172\,\delta\varpi + 62{,}3\,e' + 26{,}1\,\pi' - 0{,}40\,\delta\varepsilon''$
$+ 60{,}6\,\delta n'' + 0{,}63\,\delta e'' + 0{,}45\,e''\delta\varpi'' + 15{,}4\,\nu' + 0{,}85\,\nu + 0{,}032\,\delta\theta - 1{,}00\,x + 0'',45 = 0$

1723 E $0{,}66\,\delta\varepsilon - 82{,}9\,\delta n - 0{,}45\,\delta e - 0{,}217\,\delta\varpi + 56{,}7\,e' + 27{,}3\,\pi' - 0{,}46\,\delta\varepsilon''$
$+ 57{,}9\,\delta n'' + 0{,}69\,\delta e'' + 0{,}58\,e''\delta\varpi'' - 3{,}9\,\nu' + 0{,}58\,\nu + 0{,}012\,\delta\theta + 1{,}60\,x - 0{,}86 = 0$

1736 E $0{,}35\,\delta\varepsilon - 40{,}0\,\delta n - 0{,}22\,\delta e - 0{,}119\,\delta\varpi + 24{,}9\,e' + 13{,}4\,\pi' - 0{,}29\,\delta\varepsilon''$
$+ 31{,}2\,\delta n'' + 0{,}40\,\delta e'' + 0{,}36\,e''\delta\varpi'' + 18{,}5\,\nu' + 0{,}61\,\nu + 0{,}045\,\delta\theta + 1{,}00\,x + 0{,}75 = 0$

1736 S $0{,}32\,\delta\varepsilon - 36{,}1\,\delta n - 0{,}19\,\delta e - 0{,}107\,\delta\varpi + 21{,}5\,e' + 12{,}1\,\pi' - 0{,}16\,\delta\varepsilon''$
$+ 18{,}5\,\delta n'' + 0{,}24\,\delta e'' + 0{,}21\,e''\delta\varpi'' - 25{,}7\,\nu' - 0{,}23\,\nu - 0{,}052\,\delta\theta - 1{,}00\,x + 0{,}13 = 0$

1743 E $0{,}56\,\delta\varepsilon - 59{,}4\,\delta n - 0{,}44\,\delta e - 0{,}181\,\delta\varpi + 46{,}6\,e' + 19{,}2\,\pi' - 0{,}35\,\delta\varepsilon''$
$+ 36{,}8\,\delta n'' + 0{,}55\,\delta e'' + 0{,}40\,e''\delta\varpi'' - 15{,}5\,\nu' + 0{,}02\,\nu - 0{,}039\,\delta\theta + 1{,}00\,x - 0{,}01 = 0$

1743 S $0{,}59\,\delta\varepsilon - 62{,}2\,\delta n - 0{,}45\,\delta e - 0{,}190\,\delta\varpi + 47{,}7\,e' + 20{,}1\,\pi' - 0{,}43\,\delta\varepsilon''$
$+ 45{,}5\,\delta n'' + 0{,}68\,\delta e'' + 0{,}49\,e''\delta\varpi'' + 11{,}4\,\nu' + 0{,}55\,\nu + 0{,}024\,\delta\theta - 1{,}00\,x + 0{,}92 = 0$

1769 E $0{,}63\,\delta\varepsilon - 50{,}3\,\delta n - 0{,}43\,\delta e - 0{,}208\,\delta\varpi + 34{,}4\,e' + 16{,}6\,\pi' - 0{,}45\,\delta\varepsilon''$
$+ 36{,}0\,\delta n'' + 0{,}68\,\delta e'' + 0{,}56\,e''\delta\varpi'' - 2{,}5\,\nu' + 0{,}37\,\nu + 0{,}018\,\delta\theta + 1{,}00\,x + 0{,}99 = 0$

1782 E $0{,}17\,\delta\varepsilon - 11{,}6\,\delta n - 0{,}11\,\delta e - 0{,}058\,\delta\varpi + 7{,}4\,e' + 3{,}9\,\pi' - 0{,}17\,\delta\varepsilon''$
$+ 11{,}6\,\delta n'' + 0{,}25\,\delta e'' + 0{,}23\,e''\delta\varpi'' + 14{,}9\,\nu' + 0{,}32\,\nu + 0{,}055\,\delta\theta + 1{,}00\,x - 0{,}92 = 0$

1782 S $0{,}13\,\delta\varepsilon - 8{,}7\,\delta n - 0{,}08\,\delta e - 0{,}044\,\delta\varpi + 5{,}4\,e' + 2{,}9\,\pi' - 0{,}03\,\delta\varepsilon''$
$+ 2{,}1\,\delta n'' + 0{,}04\,\delta e'' + 0{,}04\,e''\delta\varpi'' - 14{,}2\,\nu' - 0{,}24\,\nu - 0{,}056\,\delta\theta - 1{,}00\,x + 0{,}23 = 0$

1789 E $0{,}61\,\delta\varepsilon - 36{,}4\,\delta n - 0{,}48\,\delta e - 0{,}196\,\delta\varpi + 28{,}8\,e' + 11{,}7\,\pi' - 0{,}39\,\delta\varepsilon''$
$+ 23{,}3\,\delta n'' + 0{,}62\,\delta e'' + 0{,}44\,e''\delta\varpi'' - 5{,}4\,\nu' + 0{,}03\,\nu - 0{,}033\,\delta\theta + 1{,}00\,x + 1{,}81 = 0$

1789 S $0{,}62\,\delta\varepsilon - 37{,}4\,\delta n - 0{,}47\,\delta e - 0{,}202\,\delta\varpi + 28{,}2\,e' + 12{,}1\,\pi' - 0{,}45\,\delta\varepsilon''$
$+ 27{,}0\,\delta n'' + 0{,}71\,\delta e'' + 0{,}51\,e''\delta\varpi'' + 7{,}3\,\nu' + 0{,}26\,\nu + 0{,}018\,\delta\theta - 1{,}00\,x + 0{,}97 = 0$

1802 S $0{,}70\,\delta\varepsilon - 33{,}1\,\delta n - 0{,}49\,\delta e - 0{,}232\,\delta\varpi + 23{,}0\,e' + 11{,}1\,\pi' - 0{,}47\,\delta\varepsilon''$
$+ 22{,}1\,\delta n'' + 0{,}71\,\delta e'' + 0{,}57\,e''\delta\varpi'' - 5{,}4\,\nu' - 0{,}04\,\nu - 0{,}012\,\delta\theta - 1{,}00\,x + 1{,}47 = 0$

1848 E $0{,}68\,\delta\varepsilon - 0{,}8\,\delta n - 0{,}50\,\delta e - 0{,}224\,\delta\varpi + 0{,}6\,e' + 0{,}2\,\pi' - 0{,}47\,\delta\varepsilon''$
$+ 0{,}5\,\delta n'' + 0{,}71\,\delta e'' + 0{,}57\,e''\delta\varpi'' - 6{,}3\,\nu' + 0{,}00\,\nu + 0{,}001\,\delta\theta + 1{,}00\,x + 2{,}27 = 0$

1753 S $0{,}93\,\delta\varepsilon - 89{,}9\,\delta n + 1{,}14\,\delta e + 0{,}374\,\delta\varpi - 110{,}2\,e' - 36{,}2\,\varpi' - 1{,}22\,\delta\varepsilon''$
$+ 118{,}1\,\delta n'' - 2{,}03\,\delta e'' - 1{,}44\,e''\delta\varpi'' - 19{,}4\,\nu' - 1{,}09\,\nu - 0{,}054\,\delta\theta - 1{,}62\,x' + 19'',52 = 0$

1786 E $0{,}63\,\delta\varepsilon - 40{,}1\,\delta n + 0{,}85\,\delta e + 0{,}241\,\delta\varpi - 54{,}1\,e' - 15{,}3\,\varpi' - 0{,}71\,\delta\varepsilon''$
$+ 45{,}5\,\delta n'' - 1{,}23\,\delta e'' - 0{,}79\,e''\delta\varpi'' - 29{,}0\,\nu' - 0{,}81\,\nu - 0{,}138\,\delta\theta + 1{,}62\,x' + 7{,}84 = 0$

1786 S $0{,}69\,\delta\varepsilon - 44{,}0\,\delta n + 0{,}92\,\delta e + 0{,}269\,\delta\varpi - 58{,}6\,e' - 17{,}1\,\varpi' - 1{,}04\,\delta\varepsilon''$
$+ 65{,}8\,\delta n'' - 1{,}77\,\delta e'' - 1{,}13\,e''\delta\varpi'' + 36{,}3\,\nu' + 0{,}05\,\nu + 0{,}093\,\delta\theta - 1{,}62\,x' + 8{,}28 = 0$

1799 E $0{,}90\,\delta\varepsilon - 45{,}6\,\delta n + 1{,}12\,\delta e + 0{,}362\,\delta\varpi - 56{,}7\,e' - 18{,}4\,\varpi' - 1{,}26\,\delta\varepsilon''$
$+ 64{,}5\,\delta n'' - 2{,}11\,\delta e'' - 1{,}52\,e''\delta\varpi'' + 29{,}3\,\nu' - 0{,}19\,\nu + 0{,}032\,\delta\theta + 1{,}62\,x' + 9{,}15 = 0$

1799 S $0{,}85\,\delta\varepsilon - 43{,}1\,\delta n + 1{,}04\,\delta e + 0{,}347\,\delta\varpi - 52{,}7\,e' - 17{,}6\,\varpi' - 1{,}10\,\delta\varepsilon''$
$+ 55{,}6\,\delta n'' - 1{,}81\,\delta e'' - 1{,}31\,e''\delta\varpi'' + 2{,}6\,\nu' - 0{,}57\,\nu - 0{,}085\,\delta\theta - 1{,}62\,x' + 6{,}20 = 0$

1832 E $0{,}79\,\delta\varepsilon - 14{,}0\,\delta n + 1{,}05\,\delta e + 0{,}304\,\delta\varpi - 18{,}6\,e' - 5{,}4\,\varpi' - 0{,}97\,\delta\varepsilon''$
$+ 17{,}2\,\delta n'' - 1{,}64\,\delta e'' - 1{,}10\,e''\delta\varpi'' - 18{,}0\,\nu' - 0{,}08\,\nu - 0{,}105\,\delta\theta + 1{,}62\,x' + 0{,}27 = 0$

1832 S $0{,}86\,\delta\varepsilon - 15{,}2\,\delta n + 1{,}13\,\delta e + 0{,}337\,\delta\varpi - 19{,}9\,e' - 6{,}0\,\varpi' - 1{,}22\,\delta\varepsilon''$
$+ 21{,}5\,\delta n'' - 2{,}07\,\delta e'' - 1{,}39\,e''\delta\varpi'' - 8{,}6\,\nu' + 0{,}11\,\nu + 0{,}055\,\delta\theta - 1{,}62\,x' - 0{,}94 = 0$

1845 E $0{,}80\,\delta\varepsilon - 3{,}7\,\delta n + 0{,}99\,\delta e + 0{,}325\,\delta\varpi - 4{,}7\,e' - 1{,}5\,\varpi' - 1{,}18\,\delta\varepsilon''$
$+ 5{,}5\,\delta n'' - 1{,}94\,\delta e'' - 1{,}41\,e''\delta\varpi'' + 7{,}1\,\nu' + 0{,}19\,\nu + 0{,}067\,\delta\theta + 1{,}62\,x' - 1{,}67 = 0$

Pour trouver les valeurs des inconnues en fonctions de celles qui resteront arbitraires, nous aurons recours à l'une des méthodes d'élimination précédemment exposées.

Voici d'abord les valeurs de $\partial\varepsilon$, ∂n, et de la fonction $\partial\varpi + 2,72\,\partial e$:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}\partial\varepsilon = -4'',37 + 64,27\,\partial n - 0,077\,\varkappa + 1,02\,\partial\varepsilon'' + 0'',85\,\nu' \\ - 0,271\,\partial e - 0,92\,e' - 59,0\,\partial n'' - 0'',033\,\nu \\ - 0,0315\,\partial\varpi - 4,55\,\varpi' + 0,59\,\partial e'' \\ + 0,0094\,\partial\theta + 0,36\,e''\partial\varpi'',\end{aligned}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}\partial n = -0'',00055 - 0,0141\,\partial e + 0,918\,e' + 0,0047\,\partial\varepsilon'' - 0'',0804\,\nu' \\ - 0,00513\,\partial\varpi + 0,398\,\varpi' + 0,629\,\partial n'' + 0'',0071\,\nu \\ + 0,00014\,\partial\theta + 0,0028\,\varkappa + 0,0239\,\partial e'' \\ - 0,0078\,\varkappa' + 0,0174\,e''\partial\varpi''.\end{aligned}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned}\partial\varpi + 2,72\,\partial e = -10'',30 + 140,2\,e' + 0,015\,\partial\theta + 0,92\,\partial\varepsilon'' - 8'',80\,\nu' \\ + 52,3\,\pi' + 0,74\,\varkappa - 48,8\,\partial n'' + 0,78\,\nu \\ + 0,34\,\varkappa' + 4,50\,\partial e'' \\ + 3,26\,e''\partial\varpi''.\end{aligned}$$

La fonction $\partial\varpi + 2,72\,\partial e$ se présente quand on forme l'équation propre à la détermination de $\partial\varpi$: et lorsqu'on s'en sert pour éliminer $\partial\varpi$ des équations de condition, ∂e lui-même disparaît à très-peu près. Les très-petits termes en ∂e qui subsistent encore dans les équations résultantes, ne permettent pas de déterminer cette inconnue : en outre, ∂e n'influe pas sur les valeurs des autres inconnues ; il se retrouve seulement dans les résidus définitifs des équations, pour les compléter.

L'élimination de $\partial\varepsilon$, ∂n et $\partial\varpi$ entraîne d'ailleurs, à très-peu près, la disparition de $\partial\varepsilon''$, $\partial e''$, et $e''\partial\varpi''$: en sorte que ces indéterminées ne figureront pas dans les expressions des autres inconnues.

En formant actuellement l'équation propre à la plus exacte détermination de π', nous trouverons la relation

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned}\varpi' + 2,72\,e' = +0'',387 - 0,00127\,\partial\theta + 0'',866\,\partial n'' + 0'',174\,\nu' \\ + 0,0081\,\varkappa - 0'',031\,\nu \\ - 0,0303\,\varkappa'.\end{aligned}$$

De même que l'élimination de $\partial\varpi$ avait entraîné sensiblement celle de ∂e, celle de ϖ' entraîne à son tour la disparition de e', à très-peu près. Les coefficients de $\partial n''$ deviennent en même temps fort petits : et en conséquence les équations restantes font connaître les valeurs de $\varkappa$, $\varkappa'$ et ν', en fonctions de θ et ν,

comme il suit :

(V) $\varkappa = +0'',16 \quad -0,007\,\delta\theta - 0'',05\,\nu,$

(VI) $\varkappa' = -0'',44 \quad +0,014\,\delta\theta - 0'',03\,\nu,$

(VII) $\nu' = -0'',0073 - 0,00282\,\delta\theta - 0,0132\,\nu.$

Enfin, par la substitution de ces valeurs, on trouve ce qui suit pour les résidus des équations de condition, ceux relatifs aux passages de mai étant divisés par le facteur 1,62, par lequel on avait multiplié les équations elles-mêmes :

Résidus des équations de condition.

1697	$+0'',22 - 0,028\,\delta\theta + 0'',07\,\nu - 0,03\,\delta e - 0,03\,\delta\varepsilon'' + 0,05\,\delta e'' - 0,01\,e''\delta\varpi'' + 3,9\,\delta n'' + 5,1\,e'$
1723	$-0,79 - 0,004\,\delta\theta - 0,03\,\nu + 0,02\,\delta e - 0,01\,\delta\varepsilon'' - 0,03\,\delta e'' + 0,02\,e''\delta\varpi'' + 0,7\,\delta n'' - 3,3\,e'$
1736	$+0,65 - 0,023\,\delta\theta + 0,03\,\nu + 0,05\,\delta e - 0,05\,\delta\varepsilon'' + 0,01\,\delta e'' + 0,06\,e''\delta\varpi'' + 3,8\,\delta n'' - 4,5\,e'$
	$+0,09 + 0,019\,\delta\theta - 0,11\,\nu + 0,04\,\delta e + 0,07\,\delta\varepsilon'' - 0,11\,\delta e'' - 0,06\,e''\delta\varpi'' - 6,2\,\delta n'' - 5,2\,e'$
1743	$-0,20 - 0,014\,\delta\theta - 0,22\,\nu - 0,04\,\delta e + 0,04\,\delta\varepsilon'' - 0,04\,\delta e'' - 0,07\,e''\delta\varpi'' - 4,2\,\delta n'' + 4,7\,e'$
	$+0,18 - 0,012\,\delta\theta + 0,04\,\nu - 0,04\,\delta e - 0,02\,\delta\varepsilon'' + 0,07\,\delta e'' + 0,00\,e''\delta\varpi'' + 2,4\,\delta n'' + 3,9\,e'$
1769	$+0,37 + 0,012\,\delta\theta + 0,06\,\nu + 0,02\,\delta e - 0,02\,\delta\varepsilon'' + 0,01\,\delta e'' + 0,04\,e''\delta\varpi'' + 1,7\,\delta n'' - 1,6\,e'$
1782	$-1,16 + 0,005\,\delta\theta + 0,01\,\nu + 0,01\,\delta e - 0,05\,\delta\varepsilon'' + 0,06\,\delta e'' + 0,09\,e''\delta\varpi'' + 3,8\,\delta n'' - 0,9\,e'$
	$-0,05 - 0,009\,\delta\theta - 0,05\,\nu + 0,02\,\delta e + 0,06\,\delta\varepsilon'' - 0,10\,\delta e'' - 0,07\,e''\delta\varpi'' - 4,0\,\delta n'' - 0,7\,e'$
1789	$+0,88 - 0,023\,\delta\theta - 0,10\,\nu - 0,06\,\delta e + 0,03\,\delta\varepsilon'' + 0,02\,\delta e'' - 0,04\,e''\delta\varpi'' - 1,4\,\delta n'' + 4,1\,e'$
	$-0,30 + 0,002\,\delta\theta + 0,07\,\nu - 0,03\,\delta e - 0,03\,\delta\varepsilon'' + 0,09\,\delta e'' + 0,01\,e''\delta\varpi'' + 1,6\,\delta n'' + 2,2\,e'$
1802	$+0,02 + 0,015\,\delta\theta - 0,02\,\nu + 0,01\,\delta e + 0,01\,\delta\varepsilon'' - 0,02\,\delta e'' + 0,00\,e''\delta\varpi'' + 0,3\,\delta n'' - 0,2\,e'$
1848	$+0,37 + 0,033\,\delta\theta + 0,28\,\nu - 0,02\,\delta e - 0,01\,\delta\varepsilon'' + 0,05\,\delta e'' + 0,05\,e''\delta\varpi'' + 1,3\,\delta n'' + 1,7\,e'$
1753	$+0,33 + 0,034\,\delta\theta + 0,12\,\nu - 0,03\,\delta e + 0,02\,\delta\varepsilon'' + 0,02\,\delta e'' + 0,00\,e''\delta\varpi'' - 1,6\,\delta n'' + 1,7\,e'$
1786	$-0,21 - 0,003\,\delta\theta - 0,06\,\nu + 0,05\,\delta e + 0,08\,\delta\varepsilon'' + 0,09\,\delta e'' + 0,10\,e''\delta\varpi'' - 5,0\,\delta n'' - 3,4\,e'$
	$+0,15 + 0,001\,\delta\theta + 0,02\,\nu + 0,03\,\delta e - 0,07\,\delta\varepsilon'' - 0,15\,\delta e'' - 0,05\,e''\delta\varpi'' + 4,7\,\delta n'' - 2,9\,e'$
1799	$+0,11 + 0,000\,\delta\theta - 0,14\,\nu - 0,02\,\delta e - 0,01\,\delta\varepsilon'' - 0,04\,\delta e'' - 0,06\,e''\delta\varpi'' + 1,4\,\delta n'' + 0,7\,e'$
	$-0,50 - 0,055\,\delta\theta - 0,12\,\nu - 0,04\,\delta e + 0,04\,\delta\varepsilon'' + 0,09\,\delta e'' + 0,03\,e''\delta\varpi'' - 2,1\,\delta n'' + 1,7\,e'$
1832	$-0,24 - 0,022\,\delta\theta + 0,06\,\nu + 0,04\,\delta e + 0,05\,\delta\varepsilon'' + 0,07\,\delta e'' + 0,07\,e''\delta\varpi'' - 0,6\,\delta n'' - 0,6\,e'$
	$-0,14 + 0,032\,\delta\theta + 0,16\,\nu + 0,02\,\delta e - 0,03\,\delta\varepsilon'' - 0,08\,\delta e'' - 0,02\,e''\delta\varpi'' + 0,7\,\delta n'' - 0,4\,e'$
1845	$+0,29 + 0,032\,\delta\theta - 0,07\,\nu - 0,05\,\delta e - 0,04\,\delta\varepsilon'' - 0,01\,\delta e'' - 0,04\,e''\delta\varpi'' - 0,2\,\delta n'' + 0,6\,e'$

Tels sont les résultats qu'on deduit de la discussion des observations des passages de la planète sur le Soleil. Ils consistent dans leur ensemble en ce que, si l'on suppose données l'excentricité à l'origine du temps, sa variation séculaire et la longitude du nœud, les autres éléments, ainsi que la variation séculaire du périhélie et la masse de Vénus, considérées comme des inconnues indépendantes, en découlent, avec une précision à laquelle on ne pourrait prétendre par l'emploi des observations méridiennes.

Nous devons même remarquer que si nous n'avons pas tiré des équations précédentes les valeurs de δe et $\delta\theta$, ce n'est pas qu'il soit permis de faire varier ces quantités dans de notables limites sans altérer la précision avec laquelle sont

satisfaites les observations. Loin de là : un changement de *dix* secondes dans l'excentricité ou dans la longitude du nœud altérerait cette précision. Les valeurs $\delta e = +1'',9$ et $\delta\theta = -1'',5$ sont celles qui paraissent le mieux convenir à l'exacte représentation des observations des passages. Toutefois il est indispensable de s'assurer si ces résultats permettront de représenter convenablement les observations méridiennes.

Nous avons, dans la Section II, donné toutes les formules nécessaires pour établir les équations de condition résultant de la discussion des observations méridiennes. Ces équations se rapportent à la comparaison des longitudes géocentriques, déduites de l'observation, avec celles qu'on tire du calcul.

L'inclinaison de l'orbite et la longitude du nœud étant à très-peu près connues, il n'est pas nécessaire d'avoir égard à leurs corrections dans la formation des conditions correspondant aux erreurs des Tables en longitude.

Ces dernières erreurs sont elles-mêmes assez petites pour qu'on puisse les considérer, pendant plusieurs jours consécutifs, comme variant proportionnellement au temps; et l'approximation qui suffit pour les coefficients des équations de condition, autorise à les regarder aussi comme variant proportionnellement au temps pendant les mêmes jours. Cette remarque permet, quand on a plusieurs observations consécutives, d'en déduire l'erreur moyenne correspondante à la moyenne des temps des observations, et ainsi de n'avoir qu'une seule équation de condition, qu'on calcule avec la position moyenne de la planète. On donne ensuite à l'équation dont la constante a été déterminée par plusieurs observations, une influence proportionnelle au nombre de ces observations.

Les accolades qui, dans les tableaux des pages 51-61, embrassent plusieurs erreurs consécutives en longitude, indiquent celles de ces erreurs qui correspondent à une même équation de condition. Le numéro d'ordre placé en face de chaque accolade, dans la dernière colonne de ces tableaux, a été répété en avant de chacune des équations de condition suivantes.

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en longitude géocentrique.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
1	1	$-6,9\,\delta n + 0,142\,\delta\varepsilon - 0,343\,\delta e - 0,053\,\delta\varpi + 0'',0 = 0$
2	3	$-11,9\,\delta n + 0,246\,\delta\varepsilon + 0,348\,\delta e - 0,073\,\delta\varpi - 1,7 = 0$
3	5	$-5,7\,\delta n + 0,118\,\delta\varepsilon + 0,343\,\delta e - 0,049\,\delta\varpi - 0,2 = 0$
4	2	$-0,7\,\delta n + 0,014\,\delta\varepsilon + 0,353\,\delta e - 0,056\,\delta\varpi + 5,0 = 0$
5	6	$+7,2\,\delta n - 0,149\,\delta\varepsilon + 0,547\,\delta e - 0,026\,\delta\varpi - 0,5 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en longitude géocentrique. (Suite.)

N^os d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
6	5	$-4{,}0\,\delta n + 0{,}082\,\delta\epsilon + 0{,}330\,\delta e - 0{,}048\,\delta\varpi + 0'',6 = 0$
7	2	$-8{,}9\,\delta n + 0{,}183\,\delta\epsilon + 0{,}331\,\delta e - 0{,}063\,\delta\varpi + 1{,}0 = 0$
8	2	$-12{,}5\,\delta n + 0{,}259\,\delta\epsilon + 0{,}431\,\delta e - 0{,}062\,\delta\varpi + 1{,}0 = 0$
9	3	$-5{,}7\,\delta n + 0{,}120\,\delta\epsilon + 0{,}242\,\delta e - 0{,}071\,\delta\varpi - 0{,}3 = 0$
10	2	$-3{,}3\,\delta n + 0{,}070\,\delta\epsilon + 0{,}229\,\delta e - 0{,}072\,\delta\varpi - 1{,}0 = 0$
11	4	$+0{,}6\,\delta n - 0{,}013\,\delta\epsilon + 0{,}226\,\delta e - 0{,}085\,\delta\varpi + 1{,}2 = 0$
12	2	$+7{,}9\,\delta n - 0{,}167\,\delta\epsilon + 0{,}295\,\delta e - 0{,}121\,\delta\varpi - 1{,}0 = 0$
13	4	$+10{,}4\,\delta n - 0{,}220\,\delta\epsilon + 0{,}047\,\delta e + 0{,}111\,\delta\varpi - 0{,}2 = 0$
14	4	$-9{,}7\,\delta n + 0{,}205\,\delta\epsilon + 0{,}253\,\delta e - 0{,}079\,\delta\varpi + 0{,}8 = 0$
15	4	$-13{,}4\,\delta n + 0{,}282\,\delta\epsilon + 0{,}367\,\delta e - 0{,}083\,\delta\varpi + 1{,}0 = 0$
16	4	$-10{,}5\,\delta n + 0{,}223\,\delta\epsilon + 0{,}424\,\delta e + 0{,}057\,\delta\varpi - 0{,}2 = 0$
17	3	$-9{,}2\,\delta n + 0{,}194\,\delta\epsilon + 0{,}314\,\delta e + 0{,}075\,\delta\varpi - 1{,}7 = 0$
18	3	$-7{,}8\,\delta n + 0{,}165\,\delta\epsilon + 0{,}212\,\delta e + 0{,}083\,\delta\varpi + 0{,}0 = 0$
19	2	$-1{,}7\,\delta n + 0{,}037\,\delta\epsilon + 0{,}081\,\delta e + 0{,}079\,\delta\varpi + 1{,}5 = 0$
20	1	$+3{,}2\,\delta n - 0{,}067\,\delta\epsilon + 0{,}143\,\delta e + 0{,}082\,\delta\varpi + 4{,}0 = 0$
21	2	$-12{,}4\,\delta n + 0{,}267\,\delta\epsilon + 0{,}208\,\delta e - 0{,}098\,\delta\varpi - 1{,}5 = 0$
22	1	$-9{,}5\,\delta n + 0{,}204\,\delta\epsilon + 0{,}418\,\delta e + 0{,}051\,\delta\varpi - 3{,}0 = 0$
23	3	$-11{,}7\,\delta n + 0{,}258\,\delta\epsilon + 0{,}057\,\delta e - 0{,}103\,\delta\varpi - 1{,}0 = 0$
24	1	$-7{,}7\,\delta n + 0{,}170\,\delta\epsilon + 0{,}407\,\delta e + 0{,}043\,\delta\varpi - 1{,}0 = 0$
25	2	$-2{,}9\,\delta n + 0{,}064\,\delta\iota + 0{,}314\,\delta e + 0{,}053\,\delta\varpi + 1{,}0 = 0$
26	2	$+0{,}9\,\delta n - 0{,}019\,\delta\epsilon + 0{,}331\,\delta e + 0{,}052\,\delta\varpi - 1{,}5 = 0$
27	4	$-13{,}2\,\delta n + 0{,}296\,\delta\epsilon - 0{,}211\,\delta e - 0{,}105\,\delta\varpi - 1{,}0 = 0$
28	2	$-9{,}8\,\delta n + 0{,}221\,\delta\epsilon + 0{,}485\,\delta e - 0{,}005\,\delta\varpi - 3{,}0 = 0$
29	1	$-6{,}9\,\delta n + 0{,}155\,\delta\epsilon + 0{,}432\,\delta e + 0{,}020\,\delta\varpi - 4{,}0 = 0$
30	2	$+0{,}1\,\delta n - 0{,}003\,\delta\epsilon + 0{,}400\,\delta e + 0{,}027\,\delta\varpi + 2{,}5 = 0$
31	1	$-7{,}5\,\delta n + 0{,}169\,\delta\epsilon + 0{,}454\,\delta e - 0{,}007\,\delta\varpi - 2{,}0 = 0$
32	2	$-10{,}1\,\delta n + 0{,}228\,\delta\epsilon + 0{,}508\,\delta e + 0{,}021\,\delta\varpi + 2{,}0 = 0$
33	2	$-1{,}5\,\delta n + 0{,}034\,\delta\epsilon - 0{,}319\,\delta e - 0{,}097\,\delta\varpi - 1{,}5 = 0$
34	1	$-13{,}3\,\delta n + 0{,}305\,\delta\epsilon - 0{,}139\,\delta e - 0{,}112\,\delta\varpi + 2{,}0 = 0$
35	1	$-9{,}4\,\delta n + 0{,}217\,\delta\epsilon + 0{,}456\,\delta e - 0{,}028\,\delta\varpi - 2{,}0 = 0$
36	1	$-3{,}8\,\delta n + 0{,}087\,\delta\epsilon + 0{,}390\,\delta e - 0{,}022\,\delta\varpi - 2{,}0 = 0$
37	2	$-8{,}6\,\delta n + 0{,}199\,\delta\epsilon + 0{,}043\,\delta e + 0{,}100\,\delta\varpi - 4{,}0 = 0$
38	2	$+1{,}9\,\delta n - 0{,}044\,\delta\epsilon - 0{,}427\,\delta e - 0{,}039\,\delta\varpi + 0{,}0 = 0$
39	5	$-7{,}8\,\delta n + 0{,}184\,\delta\epsilon - 0{,}324\,\delta e - 0{,}060\,\delta\varpi - 1{,}2 = 0$
40	1	$-12{,}5\,\delta n + 0{,}293\,\delta\epsilon + 0{,}365\,\delta e - 0{,}084\,\delta\varpi + 2{,}0 = 0$
41	2	$-10{,}2\,\delta n + 0{,}240\,\delta\epsilon + 0{,}399\,\delta e - 0{,}060\,\delta\varpi + 0{,}0 = 0$
42	5	$-5{,}0\,\delta n + 0{,}118\,\delta\epsilon + 0{,}387\,\delta e - 0{,}035\,\delta\varpi - 1{,}8 = 0$
43	3	$-0{,}2\,\delta n + 0{,}005\,\delta\epsilon + 0{,}402\,\delta e - 0{,}038\,\delta\varpi - 2{,}7 = 0$
45	4	$+3{,}7\,\delta n - 0{,}088\,\delta\epsilon - 0{,}482\,\delta e - 0{,}010\,\delta\varpi - 3{,}0 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en longitude géocentrique. (Suite.)

Nos d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
46	2	$-6,6\,\delta n + 0,158\,\delta\iota - 0,402\,\delta e - 0,036\,\delta\varpi - 3'',5 = 0$
47	4	$-11,9\,\delta n + 0,286\,\delta\iota - 0,397\,\delta e - 0,077\,\delta\varpi - 0,7 = 0$
48	3	$+8,7\,\delta n - 0,209\,\delta\iota + 0,443\,\delta e - 0,110\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
49	1	$-9,3\,\delta n + 0,225\,\delta\iota + 0,409\,\delta e + 0,065\,\delta\varpi - 1,0 = 0$
50	1	$-7,8\,\delta n + 0,188\,\delta\iota + 0,226\,\delta e + 0,086\,\delta\varpi - 2,0 = 0$
51	1	$-10,4\,\delta n + 0,257\,\delta\iota + 0,186\,\delta e - 0,096\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
52	1	$-6,4\,\delta n + 0,159\,\delta\iota + 0,201\,\delta e - 0,079\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
53	1	$-10,3\,\delta n + 0,259\,\delta\iota + 0,059\,\delta e - 0,104\,\delta\varpi - 1,0 = 0$
54	1	$-3,4\,\delta n + 0,086\,\delta\iota + 0,045\,\delta e - 0,086\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
55	1	$+5,1\,\delta n - 0,130\,\delta\iota - 0,057\,\delta e - 0,125\,\delta\varpi - 7,0 = 0$
56	4	$-9,6\,\delta n + 0,244\,\delta\iota + 0,509\,\delta e + 0,015\,\delta\varpi - 3,8 = 0$
57	2	$-3,9\,\delta n + 0,100\,\delta\iota - 0,407\,\delta e + 0,023\,\delta\varpi - 1,5 = 0$
58	1	$-7,8\,\delta n + 0,200\,\delta\iota - 0,449\,\delta e + 0,036\,\delta\varpi - 7,0 = 0$
59	2	$-9,3\,\delta n + 0,240\,\delta\iota - 0,511\,\delta e + 0,011\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
60	2	$-9,8\,\delta n + 0,254\,\delta\iota - 0,524\,\delta e + 0,001\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
61	4	$-0,1\,\delta n + 0,002\,\delta\iota + 0,360\,\delta e + 0,043\,\delta\varpi - 0,2 = 0$
62	3	$+3,0\,\delta n - 0,078\,\delta\iota + 0,411\,\delta e + 0,041\,\delta\varpi - 1,3 = 0$
63	1	$-8,6\,\delta n + 0,231\,\delta\iota + 0,485\,\delta e - 0,020\,\delta\varpi - 3,0 = 0$
64	1	$-6,6\,\delta n + 0,176\,\delta\iota + 0,452\,\delta e + 0,002\,\delta\varpi + 1,0 = 0$
65	2	$+4,7\,\delta n - 0,125\,\delta\iota + 0,517\,\delta e + 0,007\,\delta\varpi + 4,5 = 0$
66	1	$-9,1\,\delta n + 0,251\,\delta\iota + 0,436\,\delta e - 0,053\,\delta\varpi - 1,0 = 0$
67	3	$0,0\,\delta n - 0,001\,\delta\iota + 0,427\,\delta e - 0,019\,\delta\varpi - 0,3 = 0$
68	1	$+2,7\,\delta n - 0,073\,\delta\iota + 0,471\,\delta e - 0,022\,\delta\varpi - 1,0 = 0$
69	1	$-7,0\,\delta n + 0,193\,\delta\iota + 0,420\,\delta e - 0,041\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
70	1	$-6,1\,\delta n + 0,188\,\delta\iota + 0,031\,\delta e - 0,091\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
71	1	$+4,0\,\delta n - 0,126\,\delta\iota + 0,490\,\delta e + 0,028\,\delta\varpi - 6,0 = 0$
72	4	$-2,9\,\delta n + 0,093\,\delta\iota - 0,227\,\delta e - 0,071\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
73	1	$-4,2\,\delta n + 0,140\,\delta\iota - 0,292\,\delta e - 0,064\,\delta\varpi - 3,0 = 0$
74	1	$-4,7\,\delta n + 0,160\,\delta\iota - 0,306\,\delta e - 0,063\,\delta\varpi - 2,0 = 0$
75	2	$-7,9\,\delta n + 0,267\,\delta\iota + 0,401\,\delta e - 0,069\,\delta\varpi + 2,0 = 0$
76	2	$-3,3\,\delta n + 0,112\,\delta\iota + 0,396\,\delta e - 0,030\,\delta\varpi - 0,5 = 0$
77	1	$-5,6\,\delta n + 0,195\,\delta\iota + 0,328\,\delta e - 0,064\,\delta\varpi + 8,0 = 0$
78	3	$-1,8\,\delta n + 0,064\,\delta\iota + 0,323\,\delta e - 0,049\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
79	1	$-1,6\,\delta n + 0,058\,\delta\iota + 0,238\,\delta e + 0,067\,\delta\varpi + 2,0 = 0$
80	1	$-4,0\,\delta n + 0,142\,\delta\iota - 0,412\,\delta e - 0,028\,\delta\varpi + 1,0 = 0$
81	1	$+2,6\,\delta n - 0,092\,\delta\iota - 0,468\,\delta e + 0,011\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
82	1	$-5,9\,\delta n + 0,215\,\delta\iota + 0,223\,\delta e - 0,084\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
83	3	$-3,4\,\delta n + 0,123\,\delta\iota + 0,209\,\delta e - 0,075\,\delta\varpi + 2,3 = 0$
84	2	$+0,4\,\delta n - 0,014\,\delta\iota + 0,183\,\delta e - 0,090\,\delta\varpi + 1,0 = 0$
85	2	$-6,2\,\delta n + 0,232\,\delta\iota - 0,496\,\delta e - 0,010\,\delta\varpi - 0,5 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en longitude géocentrique. (Suite.).

Nos d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
86	2	$-0,5\,\delta n + 0,019\,\delta\varepsilon + 0,031\,\delta e - 0,092\,\delta\varpi + 1'',0 = 0$
87	2	$-6,7\,\delta n + 0,254\,\delta\varepsilon + 0,525\,\delta e + 0,009\,\delta\varpi - 0,5 = 0$
88	2	$-6,3\,\delta n + 0,238\,\delta\varepsilon + 0,502\,\delta e + 0,023\,\delta\varpi + 0,5 = 0$
89	3	$-5,2\,\delta n + 0,198\,\delta\varepsilon + 0,418\,\delta e + 0,048\,\delta\varpi - 0,7 = 0$
90	3	$-4,4\,\delta n + 0,166\,\delta\varepsilon + 0,349\,\delta e + 0,059\,\delta\varpi - 0,3 = 0$
91	2	$-8,2\,\delta n + 0,319\,\delta\varepsilon - 0,176\,\delta e - 0,113\,\delta\varpi - 6,5 = 0$
92	2	$-5,0\,\delta n + 0,194\,\delta\varepsilon - 0,021\,\delta e - 0,093\,\delta\varpi + 0,5 = 0$
93	1	$-6,6\,\delta n + 0,259\,\delta\varepsilon + 0,023\,\delta e - 0,104\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
94	2	$-8,3\,\delta n + 0,326\,\delta\varepsilon + 0,188\,\delta e - 0,113\,\delta\varpi + 1,0 = 0$
95	2	$-6,6\,\delta n + 0,258\,\delta\varepsilon + 0,519\,\delta e - 0,013\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
96	2	$-3,3\,\delta n + 0,131\,\delta\varepsilon + 0,374\,\delta e + 0,044\,\delta\varpi - 2,5 = 0$
97	3	$-7,8\,\delta n + 0,314\,\delta\varepsilon - 0,324\,\delta e - 0,098\,\delta\varpi - 3,7 = 0$
98	3	$-6,8\,\delta n + 0,277\,\delta\varepsilon - 0,213\,\delta e - 0,099\,\delta\varpi - 2,3 = 0$
99	2	$+1,2\,\delta n - 0,050\,\delta\varepsilon + 0,447\,\delta e + 0,014\,\delta\varpi + 2,0 = 0$
100	3	$-7,4\,\delta n + 0,317\,\delta\varepsilon + 0,383\,\delta e - 0,089\,\delta\varpi - 2,7 = 0$
101	1	$-4,1\,\delta n + 0,177\,\delta\varepsilon + 0,434\,\delta e - 0,023\,\delta\varpi - 1,0 = 0$
102	2	$-1,8\,\delta n + 0,076\,\delta\varepsilon + 0,412\,\delta e - 0,011\,\delta\varpi - 6,5 = 0$
103	1	$0,0\,\delta n + 0,001\,\delta\varepsilon + 0,430\,\delta e - 0,014\,\delta\varpi - 7,0 = 0$
104	1	$-1,3\,\delta n + 0,054\,\delta\varepsilon + 0,387\,\delta e - 0,022\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
105	2	$-4,3\,\delta n + 0,187\,\delta\varepsilon + 0,422\,\delta e - 0,038\,\delta\varpi - 0,5 = 0$
106	1	$+2,0\,\delta n - 0,086\,\delta\varepsilon - 0,401\,\delta e - 0,073\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
107	1	$-7,4\,\delta n + 0,329\,\delta\varepsilon - 0,232\,\delta e - 0,111\,\delta\varpi + 5,0 = 0$
108	1	$-2,4\,\delta n + 0,107\,\delta\varepsilon + 0,367\,\delta e - 0,042\,\delta\varpi - 4,0 = 0$
109	1	$+1,3\,\delta n - 0,058\,\delta\varepsilon + 0,414\,\delta e - 0,056\,\delta\varpi + 3,0 = 0$
110	1	$-4,4\,\delta n + 0,197\,\delta\varepsilon + 0,185\,\delta e + 0,092\,\delta\varpi - 2,0 = 0$
111	3	$-1,0\,\delta n + 0,048\,\delta\varepsilon + 0,042\,\delta e + 0,081\,\delta\varpi + 4,0 = 0$
112	1	$-4,0\,\delta n + 0,289\,\delta\varepsilon - 0,497\,\delta e - 0,051\,\delta\varpi + 3,3 = 0$
113	4	$-3,7\,\delta n + 0,273\,\delta\varepsilon + 0,085\,\delta e - 0,106\,\delta\varpi + 0,2 = 0$
114	4	$-2,5\,\delta n + 0,183\,\delta\varepsilon + 0,105\,\delta e - 0,089\,\delta\varpi + 5,2 = 0$
115	1	$+0,1\,\delta n - 0,005\,\delta\varepsilon + 0,245\,\delta e - 0,078\,\delta\varpi + 1,0 = 0$
116	1	$-2,8\,\delta n + 0,210\,\delta\varepsilon + 0,134\,\delta e - 0,092\,\delta\varpi + 3,6 = 0$
117	2	$-3,1\,\delta n + 0,230\,\delta\varepsilon + 0,485\,\delta e + 0,031\,\delta\varpi + 0,6 = 0$
118	1	$-0,4\,\delta n + 0,033\,\delta\varepsilon + 0,218\,\delta e + 0,070\,\delta\varpi - 0,3 = 0$
119	2	$-1,9\,\delta n + 0,148\,\delta\varepsilon + 0,409\,\delta e + 0,038\,\delta\varpi - 2,8 = 0$
120	1	$-1,4\,\delta n + 0,106\,\delta\varepsilon - 0,342\,\delta e + 0,051\,\delta\varpi - 1,2 = 0$
121	2	$-3,3\,\delta n + 0,260\,\delta\varepsilon - 0,526\,\delta e - 0,009\,\delta\varpi + 1,1 = 0$
122	1	$+1,8\,\delta n - 0,141\,\delta\varepsilon - 0,212\,\delta e - 0,119\,\delta\varpi - 0,9 = 0$
123	2	$-0,5\,\delta n + 0,040\,\delta\varepsilon + 0,084\,\delta e - 0,086\,\delta\varpi - 2,2 = 0$
124	1	$-3,5\,\delta n + 0,281\,\delta\varepsilon + 0,530\,\delta e - 0,030\,\delta\varpi - 0,7 = 0$
125	3	$-2,7\,\delta n + 0,219\,\delta\varepsilon + 0,485\,\delta e + 0,017\,\delta\varpi + 2,6 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en longitude géocentrique. (Suite)

Nos d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
126	4	$-2{,}0\,\delta n + 0{,}164\,\delta\varepsilon + 0{,}404\,\delta e + 0{,}041\,\delta\varpi - 0''{,}4 = 0$
127	2	$-0{,}2\,\delta n + 0{,}015\,\delta\varepsilon + 0{,}329\,\delta e + 0{,}050\,\delta\varpi - 0{,}3 = 0$
128	2	$+3{,}1\,\delta n - 0{,}257\,\delta\varepsilon + 0{,}583\,\delta e + 0{,}053\,\delta\varpi + 5{,}4 = 0$
129	1	$+5{,}2\,\delta n - 0{,}425\,\delta\varepsilon + 0{,}616\,\delta e + 0{,}122\,\delta\varpi - 0{,}6 = 0$
130	2	$-2{,}6\,\delta n + 0{,}211\,\delta\varepsilon + 0{,}465\,\delta e + 0{,}039\,\delta\varpi + 0{,}2 = 0$
131	1	$-2{,}1\,\delta n + 0{,}175\,\delta\varepsilon - 0{,}245\,\delta e + 0{,}080\,\delta\varpi + 1{,}4 = 0$
132	2	$-1{,}0\,\delta n + 0{,}087\,\delta\varepsilon - 0{,}373\,\delta e + 0{,}038\,\delta\varpi + 0{,}0 = 0$
133	1	$+0{,}9\,\delta n - 0{,}076\,\delta\varepsilon - 0{,}269\,\delta e + 0{,}071\,\delta\varpi - 4{,}7 = 0$
134	1	$-2{,}0\,\delta n + 0{,}170\,\delta\varepsilon - 0{,}336\,\delta e + 0{,}064\,\delta\varpi - 3{,}6 = 0$
135	1	$-3{,}3\,\delta n + 0{,}277\,\delta\varepsilon - 0{,}550\,\delta e - 0{,}010\,\delta\varpi + 8{,}5 = 0$
136	1	$-3{,}4\,\delta n + 0{,}288\,\delta\varepsilon - 0{,}214\,\delta e - 0{,}103\,\delta\varpi + 1{,}9 = 0$
137	1	$+3{,}6\,\delta n - 0{,}313\,\delta\varepsilon - 0{,}034\,\delta e - 0{,}184\,\delta\varpi + 3{,}8 = 0$
138	1	$+1{,}5\,\delta n - 0{,}132\,\delta\varepsilon + 0{,}005\,\delta e - 0{,}125\,\delta\varpi - 3{,}9 = 0$
139	3	$-1{,}5\,\delta n + 0{,}132\,\delta\varepsilon + 0{,}417\,\delta e + 0{,}020\,\delta\varpi + 0{,}2 = 0$
140	3	$-1{,}2\,\delta n + 0{,}104\,\delta\varepsilon + 0{,}405\,\delta e + 0{,}023\,\delta\varpi + 1{,}9 = 0$
141	1	$-0{,}2\,\delta n + 0{,}020\,\delta\varepsilon + 0{,}397\,\delta e + 0{,}025\,\delta\varpi + 1{,}0 = 0$
142	2	$+1{,}3\,\delta n - 0{,}112\,\delta\varepsilon + 0{,}492\,\delta e + 0{,}018\,\delta\varpi + 1{,}7 = 0$
143	2	$+2{,}4\,\delta n - 0{,}211\,\delta\varepsilon + 0{,}604\,\delta e + 0{,}015\,\delta\varpi + 0{,}6 = 0$
144	2	$+0{,}4\,\delta n - 0{,}037\,\delta\varepsilon + 0{,}410\,\delta e + 0{,}017\,\delta\varpi + 0{,}3 = 0$
145	2	$-2{,}0\,\delta n + 0{,}180\,\delta\varepsilon + 0{,}463\,\delta e - 0{,}010\,\delta\varpi + 0{,}1 = 0$
146	2	$-2{,}6\,\delta n + 0{,}233\,\delta\varepsilon + 0{,}510\,\delta e + 0{,}020\,\delta\varpi + 1{,}3 = 0$
147	2	$-0{,}7\,\delta n + 0{,}064\,\delta\varepsilon - 0{,}297\,\delta e + 0{,}058\,\delta\varpi + 2{,}1 = 0$
148	2	$+2{,}0\,\delta n - 0{,}183\,\delta\varepsilon - 0{,}247\,\delta e + 0{,}094\,\delta\varpi - 5{,}1 = 0$
149	1	$-2{,}6\,\delta n + 0{,}239\,\delta\varepsilon - 0{,}477\,\delta e + 0{,}044\,\delta\varpi - 4{,}2 = 0$
150	5	$-2{,}8\,\delta n + 0{,}257\,\delta\varepsilon - 0{,}522\,\delta e + 0{,}026\,\delta\varpi + 0{,}1 = 0$
151	2	$+0{,}8\,\delta n - 0{,}077\,\delta\varepsilon - 0{,}455\,\delta e - 0{,}069\,\delta\varpi + 0{,}6 = 0$
152	3	$-0{,}4\,\delta n + 0{,}040\,\delta\varepsilon - 0{,}196\,\delta e - 0{,}081\,\delta\varpi + 0{,}2 = 0$
153	1	$-1{,}9\,\delta n + 0{,}182\,\delta\varepsilon - 0{,}233\,\delta e - 0{,}077\,\delta\varpi - 2{,}9 = 0$
154	3	$-2{,}8\,\delta n + 0{,}265\,\delta\varepsilon - 0{,}213\,\delta e - 0{,}097\,\delta\varpi + 1{,}4 = 0$
155	2	$-3{,}5\,\delta n + 0{,}326\,\delta\varepsilon - 0{,}106\,\delta e - 0{,}118\,\delta\varpi + 4{,}8 = 0$
156	2	$-2{,}3\,\delta n + 0{,}216\,\delta\varepsilon + 0{,}451\,\delta e - 0{,}031\,\delta\varpi + 1{,}8 = 0$
157	1	$-0{,}5\,\delta n + 0{,}045\,\delta\varepsilon + 0{,}417\,\delta e - 0{,}006\,\delta\varpi + 1{,}5 = 0$
158	2	$+0{,}2\,\delta n - 0{,}022\,\delta\varepsilon + 0{,}443\,\delta e - 0{,}010\,\delta\varpi + 2{,}2 = 0$
159	1	$+1{,}5\,\delta n - 0{,}147\,\delta\varepsilon + 0{,}550\,\delta e - 0{,}022\,\delta\varpi + 4{,}7 = 0$
160	1	$+0{,}9\,\delta n - 0{,}092\,\delta\varepsilon + 0{,}467\,\delta e + 0{,}008\,\delta\varpi + 0{,}6 = 0$
161	1	$+2{,}0\,\delta n - 0{,}201\,\delta\varepsilon - 0{,}065\,\delta e + 0{,}198\,\delta\varpi - 3{,}2 = 0$
162	1	$+2{,}5\,\delta n - 0{,}254\,\delta\varepsilon - 0{,}536\,\delta e - 0{,}109\,\delta\varpi + 2{,}4 = 0$
163	3	$+1{,}3\,\delta n - 0{,}134\,\delta\varepsilon - 0{,}414\,\delta e - 0{,}085\,\delta\varpi + 1{,}0 = 0$
164	2	$-3{,}2\,\delta n + 0{,}336\,\delta\varepsilon - 0{,}178\,\delta e - 0{,}125\,\delta\varpi + 5{,}5 = 0$
165	2	$-3{,}1\,\delta n + 0{,}327\,\delta\varepsilon + 0{,}294\,\delta e - 0{,}105\,\delta\varpi + 5{,}3 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en longitude géocentrique. (Suite.)

N^os d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
166	3	$-2,7\,\delta n + 0,288\,\delta\varepsilon + 0,358\,\delta e - 0,084\,\delta\varpi + 5'',6 = 0$
167	2	$-0,2\,\delta n + 0,020\,\delta\varepsilon + 0,386\,\delta e - 0,041\,\delta\varpi + 2,1 = 0$
168	1	$+0,3\,\delta n - 0,036\,\delta\varepsilon + 0,425\,\delta e - 0,023\,\delta\varpi - 5,1 = 0$
169	1	$-1,4\,\delta n + 0,152\,\delta\varepsilon + 0,350\,\delta e - 0,053\,\delta\varpi - 1,7 = 0$
170	2	$-2,1\,\delta n + 0,225\,\delta\varepsilon + 0,358\,\delta e + 0,076\,\delta\varpi + 1,5 = 0$
171	1	$-2.0\,\delta n + 0,211\,\delta\varepsilon + 0,267\,\delta e + 0,087\,\delta\varpi + 1,7 = 0$
172	1	$-1,0\,\delta n + 0,113\,\delta\varepsilon + 0,176\,\delta e + 0,069\,\delta\varpi + 5,3 = 0$
173	1	$-1,4\,\delta n + 0,152\,\delta\varepsilon - 0,031\,\delta e + 0,093\,\delta\varpi - 0,6 = 0$
174	1	$+2,8\,\delta n - 0,321\,\delta\varepsilon - 0,778\,\delta e + 0,014\,\delta\varpi + 2,9 = 0$
175	4	$-1.2\,\delta n + 0,139\,\delta\varepsilon - 0,407\,\delta e - 0,030\,\delta\varpi + 0,0 = 0$
176	1	$-2,2\,\delta n + 0,258\,\delta\varepsilon - 0,416\,\delta e - 0,062\,\delta\varpi + 1,8 = 0$
177	2	$-2,5\,\delta n + 0,294\,\delta\varepsilon - 0,393\,\delta e - 0,077\,\delta\varpi + 5,1 = 0$
178	1	$-1,4\,\delta n + 0,163\,\delta\varepsilon + 0,297\,\delta e - 0,065\,\delta\varpi + 1,5 = 0$
179	1	$0,0\,\delta n + 0,004\,\delta\varepsilon + 0,290\,\delta e - 0,072\,\delta\varpi - 2,2 = 0$
180	2	$-1.0\,\delta n + 0,120\,\delta\varepsilon + 0,282\,\delta e - 0,062\,\delta\varpi - 0,6 = 0$
181	1	$-2,8\,\delta n + 0.336\,\delta\varepsilon + 0,470\,\delta e - 0,048\,\delta\varpi - 2,8 = 0$
182	1	$+0,1\,\delta n - 0,019\,\delta\varepsilon + 0,219\,\delta e + 0,069\,\delta\varpi + 4,5 = 0$
183	1	$-1,1\,\delta n + 0,134\,\delta\varepsilon + 0,280\,\delta e + 0,069\,\delta\varpi - 1,1 = 0$
184	2	$-1,6\,\delta n + 0,200\,\delta\varepsilon - 0,470\,\delta e - 0,023\,\delta\varpi + 1,1 = 0$
185	1	$-0.1\,\delta n + 0,014\,\delta\varepsilon - 0,407\,\delta e - 0,004\,\delta\varpi + 1,6 = 0$
186	4	$-0.9\,\delta n + 0,121\,\delta\varepsilon - 0,427\,\delta e + 0,002\,\delta\varpi - 4,4 = 0$
187	4	$-1,6\,\delta n + 0,202\,\delta\varepsilon - 0,464\,\delta e - 0,015\,\delta\varpi - 1,8 = 0$
188	2	$-1,8\,\delta n + 0,236\,\delta\varepsilon - 0,474\,\delta e - 0,030\,\delta\varpi + 0,1 = 0$
189	1	$-2.4\,\delta n + 0,311\,\delta\varepsilon - 0,439\,\delta e - 0,077\,\delta\varpi - 0,3 = 0$
190	3	$-2,5\,\delta n + 0,328\,\delta\varepsilon + 0,038\,\delta e - 0,119\,\delta\varpi + 2.5 = 0$
191	1	$-0,9\,\delta n + 0,117\,\delta\varepsilon + 0,173\,\delta e - 0,079\,\delta\varpi + 5,9 = 0$
192	2	$-0.4\,\delta n + 0,057\,\delta\varepsilon + 0,151\,\delta e - 0,081\,\delta\varpi + 4,3 = 0$
193	2	$+0,3\,\delta n - 0,046\,\delta\varepsilon + 0,134\,\delta e - 0,099\,\delta\varpi + 3,3 = 0$
194	3	$-2,1\,\delta n + 0,280\,\delta\varepsilon + 0,288\,\delta e - 0,093\,\delta\varpi + 2,9 = 0$
195	4	$-2,3\,\delta n + 0,309\,\delta\varepsilon + 0.408\,\delta e - 0,084\,\delta\varpi + 4,0 = 0$

On a formé de même les équations de condition relatives à la latitude géocentrique. Le terme en δv qui entre dans ces équations n'est pas toujours négligeable; en sorte qu'en remplaçant δv par sa valeur algébrique, on aurait à considérer simultanément les corrections des six arbitraires ε, n, e, π, φ et θ. Il est préférable de ne tenir d'abord compte que des termes en $\delta\varphi$ et $\delta\vartheta$: d'y remplacer $\delta\vartheta$ par $\delta\vartheta - \delta v$; puis de mettre à la place de δv la valeur numérique correspondante aux corrections des éléments, déduites des équations de condition relatives à la longitude.

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en latitude géocentrique.

N^{os} d'ordre.	NOMBRE d'obs.		N^{os} d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
1	1	$0,152\,\delta\varphi - 0,031\,\delta\theta - 5,8 = 0$	42	5	$0,105\,\delta\varphi - 0,052\,\delta\theta + 1,9 = 0$
2	3	$0,281\,\delta\varphi + 0,016\,\delta\theta + 4,2 = 0$	43	3	$-0,100\,\delta\varphi + 0,063\,\delta\theta + 0,9 = 0$
3	5	$0,167\,\delta\varphi + 0,048\,\delta\theta - 0,6 = 0$	44	3	$-0,092\,\delta\varphi - 0,031\,\delta\theta + 2,6 = 0$
4	2	$0,000\,\delta\varphi + 0,064\,\delta\theta - 2,6 = 0$	45	4	$0,333\,\delta\varphi - 0,019\,\delta\theta + 2,6 = 0$
5	6	$-0,214\,\delta\varphi - 0,043\,\delta\theta - 0,7 = 0$	46	2	$-0,394\,\delta\varphi + 0,008\,\delta\theta + 9,0 = 0$
6	5	$0,033\,\delta\varphi - 0,038\,\delta\theta - 3,3 = 0$	47	4	$-0,204\,\delta\varphi - 0,024\,\delta\theta + 2,3 = 0$
7	1	$0,143\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta - 3,3 = 0$	48	3	$-0,279\,\delta\varphi + 0,073\,\delta\theta - 0,4 = 0$
8	2	$0,233\,\delta\varphi - 0,013\,\delta\theta + 1,0 = 0$	49	1	$0,023\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta - 5,0 = 0$
9	3	$0,255\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta - 1,4 = 0$	50	1	$-0,144\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta - 2,9 = 0$
10	2	$0,209\,\delta\varphi + 0,050\,\delta\theta - 0,5 = 0$	51	1	$0,289\,\delta\varphi + 0,001\,\delta\theta + 2,5 = 0$
11	4	$0,101\,\delta\varphi + 0,063\,\delta\theta - 2,3 = 0$	52	1	$0,303\,\delta\varphi + 0,025\,\delta\theta + 1,7 = 0$
12	2	$-0,122\,\delta\varphi + 0,077\,\delta\theta - 4,9 = 0$	53	1	$0,270\,\delta\varphi - 0,009\,\delta\theta + 1,7 = 0$
13	4	$-0,243\,\delta\varphi - 0,038\,\delta\theta - 4,9 = 0$	54	1	$0,333\,\delta\varphi + 0,028\,\delta\theta + 3,7 = 0$
14	4	$0,086\,\delta\varphi - 0,032\,\delta\theta - 2,3 = 0$	56	4	$0,141\,\delta\varphi + 0,035\,\delta\theta - 2,1 = 0$
15	4	$0,202\,\delta\varphi - 0,019\,\delta\theta - 4,3 = 0$	57	1	$-0,157\,\delta\varphi - 0,033\,\delta\theta + 2,2 = 0$
16	4	$0,029\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta - 4,5 = 0$	58	1	$-0,319\,\delta\varphi + 0,022\,\delta\theta - 2,2 = 0$
17	3	$-0,086\,\delta\varphi + 0,042\,\delta\theta - 0,3 = 0$	59	2	$-0,324\,\delta\varphi + 0,006\,\delta\theta - 0,7 = 0$
18	3	$-0,192\,\delta\varphi + 0,039\,\delta\theta + 1,6 = 0$	60	2	$-0,310\,\delta\varphi - 0,002\,\delta\theta - 1,2 = 0$
19	2	$-0,405\,\delta\varphi + 0,012\,\delta\theta - 3,5 = 0$	61	4	$-0,362\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta - 2,3 = 0$
20	1	$-0,435\,\delta\varphi - 0,004\,\delta\theta + 4,7 = 0$	62	3	$-0,448\,\delta\varphi + 0,031\,\delta\theta - 1,4 = 0$
21	2	$0,097\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta - 3,4 = 0$	63	1	$0,191\,\delta\varphi + 0,033\,\delta\theta - 2,8 = 0$
22	1	$0,000\,\delta\varphi + 0,043\,\delta\theta - 0,8 = 0$	64	1	$0,080\,\delta\varphi + 0,046\,\delta\theta - 1,5 = 0$
23	3	$-0,009\,\delta\varphi - 0,033\,\delta\theta - 0,1 = 0$	65	2	$-0,452\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta - 2,5 = 0$
24	1	$-0,040\,\delta\varphi + 0,047\,\delta\theta - 1,7 = 0$	66	1	$0,252\,\delta\varphi + 0,023\,\delta\theta + 2,2 = 0$
25	2	$-0,291\,\delta\varphi + 0,043\,\delta\theta + 1,7 = 0$	67	3	$-0,180\,\delta\varphi + 0,061\,\delta\theta - 0,4 = 0$
26	2	$-0,409\,\delta\varphi + 0,031\,\delta\theta + 0,8 = 0$	68	1	$-0,290\,\delta\varphi + 0,059\,\delta\theta - 2,3 = 0$
27	4	$0,119\,\delta\varphi - 0,028\,\delta\theta - 2,3 = 0$	69	1	$0,236\,\delta\varphi - 0,017\,\delta\theta - 2,4 = 0$
28	2	$0,151\,\delta\varphi + 0,038\,\delta\theta - 5,7 = 0$	70	1	$0,316\,\delta\varphi + 0,001\,\delta\theta + 1,3 = 0$
29	1	$0,000\,\delta\varphi + 0,050\,\delta\theta - 4,6 = 0$	71	1	$-0,475\,\delta\varphi + 0,031\,\delta\theta + 4,2 = 0$
30	2	$-0,330\,\delta\varphi + 0,047\,\delta\theta - 0,0 = 0$	72	4	$0,326\,\delta\varphi - 0,009\,\delta\theta + 0,7 = 0$
31	1	$0,284\,\delta\varphi - 0,005\,\delta\theta - 4,6 = 0$	74	1	$-0,377\,\delta\varphi - 0,007\,\delta\theta + 0,9 = 0$
32	2	$0,246\,\delta\varphi + 0,018\,\delta\theta - 2,9 = 0$	75	2	$0,271\,\delta\varphi + 0,015\,\delta\theta - 2,4 = 0$
33	2	$0,379\,\delta\varphi + 0,001\,\delta\theta - 0,7 = 0$	76	2	$0,080\,\delta\varphi + 0,053\,\delta\theta + 2,2 = 0$
34	1	$-0,063\,\delta\varphi - 0,031\,\delta\theta - 2,2 = 0$	77	1	$0,269\,\delta\varphi + 0,028\,\delta\theta + 1,7 = 0$
35	1	$0,194\,\delta\varphi + 0,035\,\delta\theta - 0,2 = 0$	78	3	$-0,017\,\delta\varphi - 0,040\,\delta\theta - 4,3 = 0$
36	1	$0,185\,\delta\varphi - 0,029\,\delta\theta - 4,1 = 0$	80	1	$0,020\,\delta\varphi - 0,036\,\delta\theta + 2,6 = 0$
37	2	$-0,211\,\delta\varphi + 0,032\,\delta\theta - 4,6 = 0$	81	1	$0,264\,\delta\varphi - 0,029\,\delta\theta - 1,6 = 0$
38	3	$0,364\,\delta\varphi - 0,010\,\delta\theta - 1,6 = 0$	82	1	$0,306\,\delta\varphi + 0,013\,\delta\theta + 3,0 = 0$
39	5	$-0,348\,\delta\varphi - 0,011\,\delta\theta + 0,9 = 0$	83	3	$0,270\,\delta\varphi + 0,037\,\delta\theta + 3,1 = 0$
41	2	$0,262\,\delta\varphi + 0,023\,\delta\theta + 4,7 = 0$	84	2	$0,143\,\delta\varphi + 0,061\,\delta\theta - 0,2 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en latitude géocentrique. (Suite.)

N°s d'ordre.	NOMBRE d'obs.	Équation
85	2	$-0,337\,\delta\varphi + 0,001\,\delta\theta + 0'',7 = 0$
86	2	$0,293\,\delta\varphi + 0,043\,\delta\theta + 2,0 = 0$
87	2	$0,163\,\delta\varphi + 0,032\,\delta\theta - 1,4 = 0$
88	2	$0,121\,\delta\varphi + 0,037\,\delta\theta - 0,4 = 0$
89	3	$-0,003\,\delta\varphi + 0,044\,\delta\theta - 0,3 = 0$
90	4	$-0,113\,\delta\varphi + 0,045\,\delta\theta + 1,8 = 0$
91	2	$0,116\,\delta\varphi - 0,027\,\delta\theta + 6,1 = 0$
92	2	$0,306\,\delta\varphi - 0,005\,\delta\theta - 2,7 = 0$
93	1	$-0,033\,\delta\varphi - 0,033\,\delta\theta + 1,2 = 0$
94	2	$0,135\,\delta\varphi - 0,025\,\delta\theta + 1,4 = 0$
95	2	$0,187\,\delta\varphi + 0,031\,\delta\theta + 1,8 = 0$
96	2	$-0,122\,\delta\varphi + 0,049\,\delta\theta + 4,2 = 0$
97	3	$0,030\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta + 6,5 = 0$
98	3	$0,137\,\delta\varphi - 0,027\,\delta\theta + 5,2 = 0$
99	2	$-0,374\,\delta\varphi + 0,046\,\delta\theta + 2,9 = 0$
100	4	$0,260\,\delta\varphi + 0,001\,\delta\theta + 1,2 = 0$
101	1	$0,144\,\delta\varphi + 0,044\,\delta\theta - 2,2 = 0$
102	2	$-0,058\,\delta\varphi + 0,058\,\delta\theta + 0,5 = 0$
103	1	$-0,196\,\delta\varphi + 0,060\,\delta\theta + 5,9 = 0$
104	1	$0,136\,\delta\varphi - 0,034\,\delta\theta + 0,0 = 0$
105	2	$0,240\,\delta\varphi - 0,017\,\delta\theta - 1,6 = 0$
106	1	$-0,388\,\delta\varphi + 0,055\,\delta\theta + 1,6 = 0$
107	1	$-0,070\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta + 6,0 = 0$
108	1	$0,114\,\delta\varphi + 0,052\,\delta\theta - 0,8 = 0$
109	1	$-0,166\,\delta\varphi + 0,067\,\delta\theta - 2,2 = 0$
110	1	$-0,146\,\delta\varphi + 0,038\,\delta\theta - 3,9 = 0$
111	3	$-0,398\,\delta\varphi + 0,011\,\delta\theta + 1,3 = 0$
112	1	$-0,249\,\delta\varphi - 0,017\,\delta\theta + 3,8 = 0$
113	4	$0,264\,\delta\varphi - 0,009\,\delta\theta + 1,9 = 0$
114	4	$0,321\,\delta\varphi + 0,011\,\delta\theta - 1,0 = 0$
115	1	$-0,319\,\delta\varphi - 0,031\,\delta\theta + 2,6 = 0$
116	1	$-0,015\,\delta\varphi - 0,035\,\delta\theta + 5,1 = 0$
117	2	$0,091\,\delta\varphi + 0,039\,\delta\theta + 0,1 = 0$
118	1	$-0,386\,\delta\varphi + 0,027\,\delta\theta + 0,3 = 0$
119	2	$0,285\,\delta\varphi + 0,016\,\delta\theta + 0,4 = 0$
120	1	$-0,207\,\delta\varphi + 0,048\,\delta\theta - 1,6 = 0$
121	2	$-0,303\,\delta\varphi - 0,005\,\delta\theta + 1,0 = 0$
122	1	$0,284\,\delta\varphi + 0,058\,\delta\theta + 2,1 = 0$
123	2	$-0,364\,\delta\varphi - 0,023\,\delta\theta - 0,8 = 0$
124	1	$0,230\,\delta\varphi + 0,021\,\delta\theta + 0,1 = 0$
125	3	$0,106\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta + 0'',0 = 0$
126	4	$-0,048\,\delta\varphi + 0,048\,\delta\theta - 2,4 = 0$
127	2	$-0,364\,\delta\varphi + 0,038\,\delta\theta + 0,5 = 0$
128	2	$-0,533\,\delta\varphi + 0,003\,\delta\theta + 1,2 = 0$
129	1	$0,029\,\delta\varphi - 0,051\,\delta\theta + 2,6 = 0$
130	2	$0,229\,\delta\varphi + 0,024\,\delta\theta + 0,6 = 0$
131	4	$-0,308\,\delta\varphi + 0,010\,\delta\theta - 3,6 = 0$
132	2	$-0,213\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta - 1,7 = 0$
133	1	$0,194\,\delta\varphi + 0,053\,\delta\theta + 0,4 = 0$
134	1	$-0,248\,\delta\varphi + 0,036\,\delta\theta + 6,3 = 0$
135	1	$-0,280\,\delta\varphi - 0,009\,\delta\theta - 3,4 = 0$
136	1	$0,128\,\delta\varphi - 0,027\,\delta\theta + 1,7 = 0$
137	1	$-0,552\,\delta\varphi + 0,055\,\delta\theta - 3,4 = 0$
138	1	$-0,551\,\delta\varphi + 0,022\,\delta\theta + 2,7 = 0$
139	3	$-0,052\,\delta\varphi + 0,052\,\delta\theta + 0,9 = 0$
140	3	$-0,115\,\delta\varphi + 0,053\,\delta\theta - 1,7 = 0$
141	1	$-0,284\,\delta\varphi + 0,050\,\delta\theta - 0,7 = 0$
142	2	$-0,452\,\delta\varphi + 0,037\,\delta\theta - 1,4 = 0$
143	2	$-0,526\,\delta\varphi + 0,026\,\delta\theta + 1,7 = 0$
144	2	$0,179\,\delta\varphi - 0,034\,\delta\theta + 2,5 = 0$
145	3	$0,283\,\delta\varphi - 0,004\,\delta\theta - 1,0 = 0$
146	2	$0,242\,\delta\varphi + 0,019\,\delta\theta + 2,1 = 0$
147	2	$-0,277\,\delta\varphi - 0,025\,\delta\theta - 0,3 = 0$
148	2	$0,367\,\delta\varphi + 0,033\,\delta\theta - 1,3 = 0$
149	1	$-0,306\,\delta\varphi + 0,011\,\delta\theta + 1,4 = 0$
150	5	$-0,303\,\delta\varphi + 0,003\,\delta\theta + 0,4 = 0$
151	2	$0,362\,\delta\varphi + 0,008\,\delta\theta + 2,1 = 0$
152	3	$-0,470\,\delta\varphi + 0,008\,\delta\theta - 0,7 = 0$
153	1	$-0,314\,\delta\varphi - 0,019\,\delta\theta - 5,3 = 0$
154	3	$-0,166\,\delta\varphi - 0,029\,\delta\theta + 1,2 = 0$
155	2	$-0,018\,\delta\varphi - 0,031\,\delta\theta + 0,7 = 0$
156	2	$0,199\,\delta\varphi + 0,035\,\delta\theta + 1,5 = 0$
157	1	$-0,136\,\delta\varphi + 0,058\,\delta\theta - 5,5 = 0$
158	2	$-0,250\,\delta\varphi + 0,058\,\delta\theta - 3,0 = 0$
159	1	$-0,424\,\delta\varphi + 0,050\,\delta\theta - 2,5 = 0$
160	1	$0,031\,\delta\varphi - 0,043\,\delta\theta + 3,5 = 0$
161	1	$-0,190\,\delta\varphi - 0,042\,\delta\theta + 0,2 = 0$
162	1	$-0,279\,\delta\varphi + 0,077\,\delta\theta + 1,0 = 0$
163	4	$-0,382\,\delta\varphi + 0,060\,\delta\theta - 0,5 = 0$
164	2	$-0,092\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta + 2,4 = 0$

Équations de condition déduites des erreurs des Tables provisoires en latitude géocentrique. (Suite.)

N^{os} d'ordre.	NOMBRE d'obs.		N^{os} d'ordre.	NOMBRE d'obs.	
165	2	$0,250\,\delta\varphi - 0,006\,\delta\theta + 1'',5 = 0$	181	1	$0,086\,\delta\varphi + 0,037\,\delta\theta + 1'',7 \quad 0$
166	3	$0,274\,\delta\varphi + 0,007\,\delta\theta + 0,6 = 0$	182	1	$0,351\,\delta\varphi + 0,008\,\delta\theta - 1,3 = 0$
167	2	$-0,054\,\delta\varphi + 0,063\,\delta\theta - 0,0 = 0$	183	1	$0,220\,\delta\varphi + 0,032\,\delta\theta + 1,2 = 0$
168	1	$-0,037\,\delta\varphi - 0,043\,\delta\theta + 0,8 = 0$	184	2	$-0,106\,\delta\varphi - 0,032\,\delta\theta + 2,8 = 0$
169	1	$0,148\,\delta\varphi - 0,030\,\delta\theta - 0,8 = 0$	185	1	$0,147\,\delta\varphi - 0,035\,\delta\theta - 1,6 = 0$
170	2	$0,000\,\delta\varphi + 0,039\,\delta\theta - 1,4 = 0$	186	4	$-0,356\,\delta\varphi + 0,032\,\delta\theta - 2,3 = 0$
171	1	$-0,075\,\delta\varphi + 0,040\,\delta\theta + 0,5 = 0$	187	4	$-0,361\,\delta\varphi + 0,006\,\delta\theta - 0,2 = 0$
172	1	$-0,232\,\delta\varphi + 0,033\,\delta\theta - 1,9 = 0$	188	2	$-0,330\,\delta\varphi - 0,004\,\delta\theta + 1,2 = 0$
173	1	$-0,308\,\delta\varphi + 0,024\,\delta\theta + 1,6 = 0$	189	1	$-0,182\,\delta\varphi - 0,024\,\delta\theta - 6,4 = 0$
175	4	$-0,401\,\delta\varphi + 0,015\,\delta\theta + 1,2 = 0$	190	3	$0,194\,\delta\varphi - 0,019\,\delta\theta + 2,9 = 0$
176	1	$-0,270\,\delta\varphi - 0,018\,\delta\theta + 0,8 = 0$	191	1	$0,292\,\delta\varphi + 0,033\,\delta\theta + 2,1 = 0$
177	2	$-0,180\,\delta\varphi - 0,025\,\delta\theta + 1,7 = 0$	192	2	$0,252\,\delta\varphi + 0,046\,\delta\theta - 1,4 = 0$
178	1	$0,262\,\delta\varphi + 0,033\,\delta\varphi + 1,7 = 0$	193	2	$0,148\,\delta\varphi + 0,064\,\delta\theta + 2,9 = 0$
179	1	$0,063\,\delta\varphi + 0,063\,\delta\theta + 0,9 = 0$	194	3	$0,159\,\delta\varphi - 0,024\,\delta\theta + 1,5 = 0$
180	2	$0,021\,\delta\varphi - 0,037\,\delta\theta + 4,0 = 0$	195	4	$0,226\,\delta\varphi - 0,012\,\delta\theta + 1,6 = 0$

Reprenons, avec le secours de ces nouvelles conditions, la recherche des valeurs les plus exactes des éléments de l'orbite et de leurs variations.

Les conditions correspondantes aux latitudes peuvent se partager en deux groupes, suivant que le coefficient de $\delta\theta$, divisé par le sinus de l'inclinaison de l'orbite, surpasse le coefficient de $\delta\varphi$ ou lui est inférieur. Dans le premier cas, l'équation est surtout propre à déterminer $\delta\theta$; dans le second cas, elle se rapporte à la détermination de $\delta\varphi$. Si l'on a égard, dans les équations respectives, à la correction de la longitude héliocentrique, ainsi que nous l'avons dit, et si l'on somme les équations de chaque groupe, suivant l'usage, en tenant compte du nombre des observations, on tombe sur les équations

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} 60,50\,\delta\varphi - 1,021\,\delta\theta + \ 38'',7 &= 0,\\ 0,63\,\delta\varphi + 8,61\ \ \delta\theta - 106'',8 &= 0; \end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\delta\varphi = -0'',45, \qquad \delta\theta = +12'',43.$$

Pour juger de l'exactitude sur laquelle on peut compter, relativement à la dé-

termination de l'inclinaison, nous remarquerons que l'équation correspondante à $\delta\varphi$ résulte de la somme de 92 équations, dans lesquelles la somme des *huit* dernières constantes est égale à 40",5, c'est-à-dire à très-peu près à la constante 38",7 de la première des équations (A) : en sorte que si l'on n'eût pas employé les dernières conditions, on eût trouvé $\delta\varphi = 0$. On ne saurait donc répondre que les observations méridiennes déterminent l'inclinaison à une demi-seconde près : ce qu'on explique en considérant que la plupart du temps l'erreur de la latitude géocentrique n'est que le tiers de l'erreur de la latitude héliocentrique. Toutefois, comme l'inclinaison de l'orbite ne peut être déterminée que par les observations méridiennes, nous accepterons le résultat qu'elles fournissent et qui comporte la précision dont elles peuvent jouir.

La correction $\delta\theta$ de la longitude du nœud résulte aussi de l'ensemble de 92 équations. Lorsqu'on les partage en *neuf* groupes, de 10 ou 11 équations chacun, suivant l'ordre des dates des observations, on reconnait que tous les groupes, le 4ᵉ excepté, s'accordent à donner pour $\delta\theta$ une valeur positive. La correction $\delta\theta = + 12'',4$ paraît donc découler de la discussion des observations méridiennes, tandis que la représentation des conditions déduites de l'observation des passages serait plus précise, ainsi que nous l'avons vu, page 83, en supposant $\delta\theta = - 1'', 5$. N'ayant aucune raison de choisir entre ces deux quantités, nous accepterons la valeur moyenne $\delta\theta = + 5'',5$.

En recourant aux équations de condition conclues des passages de la planète sur le Soleil, page 80, on reconnait qu'en 1786, par exemple, l'erreur de la longitude du nœud entre dans les équations déduites de l'entrée et de la sortie avec des coefficients notables et différents; et l'on pourrait croire que ces conditions devraient permettre de déterminer avec plus de rigueur la longitude du nœud. On sera désabusé par l'examen des résidus des équations, page 82, où l'on voit qu'en 1786 un changement dans le nœud n'a presque aucune influence sur l'exactitude définitive de la comparaison.

Loin d'être contradictoires, ces résultats donnent lieu à une remarque importante. Celles des corrections des éléments de l'orbite de Mercure, que nous avons tirées des passages de la planète sur le Soleil, sont toutes obtenues en fonctions de la correction du nœud : et c'est par la substitution de ces fonctions dans les équations de condition, que l'influence de la correction du nœud sur les résidus s'est atténuée. Les valeurs numériques auxquelles nous arriverons pour les corrections des autres éléments, dépendront de celle adoptée pour la correction du nœud; et c'est en conservant avec soin cette dépendance des éléments entre eux, que l'ensemble des observations sera exactement représenté. Il faudrait donc bien se garder, considérant la petite incertitude de la longitude du nœud,

de changer ultérieurement cette longitude, sans avoir grand soin d'introduire dans les autres éléments les modifications correspondantes, et qui résultent des conditions (I) à (VII), pages 81 et 82.

En conséquence, nous poserons définitivement

$$\delta\theta = +5'',5 + \tau,$$

τ étant une indéterminée dont tous les autres éléments seront des fonctions.

Les équations (V) et (VI), page 82, en y négligeant ν et en y remplaçant θ par sa valeur, donnent, entre les corrections D et d des diamètres du Soleil et de la planète, à la distance moyenne, les relations

$$0,99\,\frac{D}{2} - 1,48\,\frac{d}{2} = +0'',12 - 0,007\,\tau,$$

$$1,01\,\frac{D}{2} - 1,80\,\frac{d}{2} = -0'',36 + 0,014\,\tau.$$

On pourrait faire concorder les résultats de deux manières : 1° en ne changeant rien aux diamètres des astres, mais en augmentant la longitude du nœud de 23″; 2° en ne changeant rien au nœud, mais augmentant le demi-diamètre du Soleil de 2″,61, et celui de la planète de 1″,67. Il paraît préférable de faire la part de l'incertitude des observations, en tirant des deux conditions une relation unique et moyenne entre les corrections des deux diamètres, savoir :

$$\frac{d}{2} = +0'',073 + 0,61\,\frac{D}{2} - 0,00213\,\tau.$$

Nous avons admis que le demi-diamètre du Soleil était de 960″ à la distance moyenne. Si l'on veut lui ajouter la correction $\frac{D}{2}$, on voit quelle doit être la correction correspondante $\frac{d}{2}$ du demi-diamètre de Mercure qui convient le mieux aux observations des passages.

Les corrections x et x', relatives aux passages de novembre et de mai, deviennent ainsi :

$$x = -0'',11 + 0,09\left(\frac{D}{2}\right) - 0,0032\,\tau,$$

$$x' = -0'',14 - 0,09\left(\frac{D}{2}\right) - 0,0038\,\tau.$$

L'équation VII, en y remplaçant de même θ par sa valeur, donne à son tour,

$$\nu' = -0,0228 - 0,00282\,\tau - 0,0132\,\nu.$$

Cette valeur de ν', déduite de la considération de tous les termes qui proviennent de l'action de Vénus, le mouvement du périhélie et celui de l'excentricité exceptés, est contraire à la supposition que la masse de Vénus admise jusqu'ici serait beaucoup trop petite ; à moins qu'on ne diminuât la longitude du nœud d'une quantité qui est inadmissible. Nous nous bornerons ici à cette remarque.

Ces divers points étant établis, les formules (IV), (III), (II) et (I), deviennent successivement, et avec une exactitude suffisante,

$$\text{(IV)}' \quad \pi' + 2{,}72\, e' = 0'',3794 - 0{,}00167\,\tau - 0{,}032\,\nu + 0'',875\,\partial n'',$$

$$\text{(III)}' \quad \partial\pi + 2{,}72\,\partial e = +9'',70 - 2{,}1\,e' - 0{,}0512\,\tau - 0{,}83\,\nu + 0{,}92\,\partial\varepsilon'' + 4{,}5\,\partial e'' + 3{,}3\,e''\partial\varpi'',$$

$$\text{(II)}' \quad \partial n = +0'',10407 - 0{,}154\,e' - 0{,}0002\,\partial e + \partial n'',$$

$$\text{(I)}' \quad \partial\varepsilon = +0'',327 + 1{,}6\,e' - 0{,}198\,\partial e + 0{,}015\,\tau + \partial\varepsilon''.$$

Voyons si les observations méridiennes pourront nous fixer sur les deux arbitraires e' et ∂e, qui seules restent indéterminées, mais qui, comme nous l'avons fait remarquer, ne peuvent varier que dans de très-étroites limites.

Les équations de condition relatives à la longitude peuvent se partager en deux classes : suivant que le coefficient de la correction du périhélie, divisé par l'excentricité, surpasse le coefficient de la correction de l'excentricité ou lui est inférieur. La première classe d'équations fixe surtout la position du périhélie : la seconde classe détermine principalement la grandeur de l'excentricité.

Comme il est indispensable de considérer les mouvements séculaires de l'excentricité et du périhélie, on devra, dans les équations écrites pages 83 et suivantes, remplacer ∂e par $\partial e + e't$, et $\partial\varpi$ par $\partial\varpi + \varpi' t$. Mais alors, afin de pouvoir déduire les valeurs de e' et ϖ', s'il y a lieu, on divisera chacune des classes d'équations en deux groupes : l'un correspondant aux observations effectuées depuis 1801 jusqu'en 1828, l'autre aux observations faites en 1836-1842. Enfin, pour mieux juger de la valeur réelle des renseignements qu'on devait obtenir par cette voie, on a divisé chaque groupe en deux sections distinctes : chacune d'elles embrassant la moitié des équations de condition, prises au hasard à toutes les époques.

Ayant d'ailleurs égard au nombre des observations sur lesquelles est fondée chacune des équations de condition, on a ainsi formé les deux systèmes des équations suivantes :

Premier système.

$$5{,}49\,\partial\varepsilon - 227{,}2\,\partial n + 25{,}58\,\partial e - 0{,}280\,\partial\varpi - 990{,}2\,e' + 12{,}8\,\pi' - 23'',0 = 0$$
$$0{,}79\,\partial\varepsilon - 12{,}9\,\partial n + 17{,}75\,\partial e + 0{,}406\,\partial\varpi - 186{,}9\,e' - 4{,}5\,\pi' + 5{,}8 = 0$$
$$6{,}79\,\partial\varepsilon + 271{,}3\,\partial n + 3{,}95\,\partial e + 4{,}955\,\partial\varpi - 107{,}5\,e' - 186{,}7\,\pi' + 22{,}7 = 0$$
$$-5{,}05\,\partial\varepsilon + 49{,}6\,\partial n - 0{,}52\,\partial e + 3{,}416\,\partial\varpi + 13{,}3\,e' - 35{,}4\,\pi' - 116{,}5 = 0$$

Deuxième système.

$$\begin{aligned}
3{,}44\,\delta\varepsilon - 127{,}8\,\delta n + 32{,}66\,\delta e - 0{,}699\,\delta\varpi - 1272{,}9\,e' + 31{,}5\,\pi' - 16'',0 &= 0\\
-2{,}60\,\delta\varepsilon + 23{,}5\,\delta n + 21{,}30\,\delta e + 0{,}478\,\delta\varpi - 225{,}4\,e' - 5{,}0\,\pi' + 32{,}5 &= 0\\
-4{,}79\,\delta\varepsilon + 150{,}8\,\delta n - 1{,}75\,\delta e + 3{,}477\,\delta\varpi + 64{,}0\,e' - 128{,}1\,\pi' + 35{,}7 &= 0\\
-4{,}32\,\delta\varepsilon + 43{,}1\,\delta n - 1{,}45\,\delta e + 3{,}060\,\delta\varpi + 13{,}7\,e' - 32{,}7\,\pi' - 26{,}7 &= 0
\end{aligned}$$

Nous remplacerons, dans ces équations, $\delta\varepsilon$ et δn par leurs valeurs en fonctions de δe et e', et omettant d'ailleurs les petits termes dépendants des indéterminées, lesquels n'ont point ici d'objet, nous trouverons :

Premier système.

$$\begin{aligned}
24{,}54\,\delta e - 946{,}4\,e' - 0{,}280\,\delta\varpi + 12{,}8\,\pi' - 44'',8 &= 0\\
17{,}59\,\delta e - 183{,}6\,e' + 0{,}406\,\delta\varpi - 4{,}5\,\pi' + 4{,}7 &= 0\\
5{,}25\,\delta e - 160{,}1\,e' + 4{,}955\,\delta\varpi - 186{,}7\,\pi' + 48{,}7 &= 0\\
0{,}47\,\delta e - 2{,}5\,e' + 3{,}416\,\delta\varpi - 35{,}4\,\pi' - 113{,}0 &= 0
\end{aligned}$$

Deuxième système.

$$\begin{aligned}
32{,}01\,\delta e - 1247{,}7\,e' - 0{,}699\,\delta\varpi + 31{,}5\,\pi' - 28'',2 &= 0\\
21{,}81\,\delta e - 233{,}0\,e' + 0{,}478\,\delta\varpi - 5{,}0\,\pi' + 34{,}1 &= 0\\
-0{,}83\,\delta e + 33{,}0\,e' + 3{,}477\,\delta\varpi - 128{,}1\,\pi' + 49{,}8 &= 0\\
-0{,}61\,\delta e + 0{,}2\,e' + 3{,}060\,\delta\varpi - 32{,}7\,\pi' - 23{,}6 &= 0
\end{aligned}$$

On peut, dans les deux premières équations, soit du premier, soit du second système, où $\delta\pi$ et π' ont de petits coefficients, remplacer ces inconnues par leurs valeurs en δe et e' tirées des relations (IV)' et (III)'. Et dès lors on arrive aux valeurs suivantes de e' et δe :

$$1^{\text{er}}\text{ système.}\ \begin{cases} e' = -0'',0743,\\ \delta e = -1'',19.\end{cases}\qquad 2^{\text{e}}\text{ système.}\ \begin{cases} e' = -0'',0869,\\ \delta e = -2'',73.\end{cases}$$

L'accord est aussi grand qu'on pût l'attendre; et l'on doit remarquer qu'en acceptant la valeur moyenne $e' = -0'',0806$, on en conclurait, par la condition très-précise déduite de la discussion des passages, $\pi' = +0'',60$, valeur annuelle considérable!

La détermination de la correction du périhélie et de sa variation annuelle, par les deux dernières équations de chacun des systèmes, ne donne pas des résultats aussi concordants. L'ensemble de toutes les équations méridiennes conduit toutefois à une valeur de π' positive et supérieure encore à la précédente.

Cette circonstance, que la détermination du périhélie et de sa variation annuelle au moyen des observations méridiennes ne sont pas satisfaisantes, doit nous rendre circonspects, même à l'égard des résultats relatifs à l'excentricité, malgré leur ap-

parente précision. Et en conséquence, laissant e' indéterminé, nous nous bornerons à emprunter aux observations méridiennes la formule assez exacte :

$$\delta e = -1'',18 + 10,61\, e'.$$

De ce résultat, rapproché de ceux obtenus ci-dessus, nous concluons avec une exactitude suffisante l'ensemble des corrections :

$$\delta\varphi = -0'',45,$$
$$\delta\theta = +5'',5 + \tau,$$
$$\frac{d}{2} = +0'',073 + 0,61\,\frac{D}{2} - 0,002\,13\,\tau,$$
$$\kappa = -0'',11 + 0,09\,\frac{D}{2} - 0,003\,2\,\tau,$$
$$\kappa' = -0'',14 - 0,09\,\frac{D}{2} - 0,003\,8\,\tau,$$
$$\nu' = -0,022\,8 - 0,002\,82\,\tau - 0,013\,2\,\nu;$$

puis, en négligeant la partie constante de ν',

$$\pi' = +0'',383 - 2,72\,e' - 0,001\,67\,\tau - 0'',033\,\nu + 0,87\,\delta n'',$$
$$\delta e = -1'',18 + 10,61\,e',$$
$$\delta\varpi = +12'',90 - 31,0\,e' - 0,051\,\tau - 0'',83\,\nu + 0,92\,\delta\varepsilon'' + 4,5\,\delta e'' + 3,3\,e''\,\delta\varpi'',$$
$$\delta n = +0'',103\,9 - 0,156\,e' + \delta n'',$$
$$\delta\varepsilon = +0'',54 + \delta\varepsilon''.$$

Telles sont les corrections qui, étant ajoutées aux valeurs des éléments, prises pour point de départ dans la IIe Section, fourniront les données les plus précises sur lesquelles nous baserons les Tables définitives du mouvement de la planète. Elles comprennent le résultat remarquable déjà signalé plus haut, c'est-à-dire la valeur considérable de la fonction $\varpi' + 2,72\,e'$: valeur qui semble incompatible avec les grandeurs adoptées jusqu'ici pour les masses des planètes, et notamment pour la masse de Vénus. Cette conséquence de la discussion des observations de Mercure et de leur comparaison avec la théorie étant des plus graves au point de vue de la constitution physique de notre système planétaire, il sera bon de revenir sur nos pas, afin de jeter un coup d'œil attentif sur la route déjà parcourue, de voir si rien ne peut infirmer la conséquence à laquelle nous venons de parvenir et de fixer ainsi la signification qu'on doit lui attribuer.

Il y a trente ans, Bessel, frappé des écarts qui se manifestaient souvent entre les Tables et les observations, s'exprimait ainsi :

« Præsens cognitio motuum Systematis Solaris non eos fecit progressus, quos polliceri videbatur et ingens numerus et bonitas observationum, quæ indè à Bradleji temporibus circà Solem et Lunam et Planetas sunt institutæ..... Ac tantum abest, ut Tabulæ observationum præcisioni semper respondeant, ut ipsæ Tabulæ Solis, quas initio hujus sæculi *de Lambre* et *de Zach* dederunt, à Tabulis meis anno 1828 editis, quæ *nunc* cum observationibus consentiunt, 10″ sæpe discrepent :.....

» Incertum est, quæ caussa sit horum errorum. Ab ipsis observationibus non possunt originem habere, dummodo eæ cum Tabulis comparentur, quæ in Speculis et benè instructis et recte administratis sint institutæ, eoque sint numero, ut consensus earum mutuus à fortuitis vitiis eas liberas esse doceat. Quarè tribuendi sunt aut rationi observationes reducendi aut Tabulis, quæ vel in Elementis ellipticis, vel in positis planetarum perturbantium massis, vel in formulis perturbationes ad calculum revocantibus minus perfectæ esse possunt, aut obscuras significant caussas, motum perturbantes, ad quas theoriæ lumen nondum accesserit. Sed profecto summum debet videri Astronomiæ problema, illud sæpe dictum neque tamen in unoquoque casu satis confirmatum, quam diligentissime examinare, an theoria cum experientia semper consentiat. »

A l'époque où Bessel écrivait ce passage remarquable, on attribuait aux observations méridiennes une précision trop absolue. Assurément, dès qu'elles sont un peu nombreuses, l'effet des erreurs accidentelles disparaît : mais par cela même la mauvaise influence des erreurs systématiques se fait sentir d'une manière plus sûre. C'est cette dernière considération à laquelle on n'avait peut-être pas donné une attention suffisante, du moins dans la discussion des anciennes observations.

Déjà Maskelyne avait reconnu que ses Assistants n'observaient pas toujours les passages des étoiles, à la lunette méridienne, d'une manière identique avec la sienne. Plus tard on s'aperçut que l'existence de différences systématiques entre les observateurs constituait un fait général. Et toutefois il n'y a pas plus de 25 ans qu'on a pris l'habitude de compléter chaque observation en lui adjoignant le nom de l'astronome auquel elle est due.

Ce n'est pas tout. L'équation personnelle peut varier d'une manière notable avec le temps, et même très-probablement d'un jour à l'autre. Sans aucun doute elle n'est pas la même pour les étoiles de première grandeur et pour les étoiles difficiles à observer dans une lunette donnée, à cause de leur faiblesse. On sait peu de chose sur la manière dont elle varie avec la déclinaison des étoiles, et surtout dans le voisinage du pôle de l'équateur.

Les observations des bords du Soleil et de la Lune, des bords ou du centre des planètes, sont en outre sujettes à des incertitudes spéciales, différentes selon l'observateur, selon l'astre, et même suivant la partie de l'astre à laquelle se rapporte l'observation. C'est ce qui résulte d'une manière évidente de la discussion des observations méridiennes sur laquelle nous avons, dans le Chapitre précédent, fondé les Tables du Soleil.

Nous avons vu les écarts entre la théorie et l'observation marcher régulièrement quand on les déduisait du travail effectué dans un même observatoire, avec un même instrument; et de manière à faire croire à l'inexactitude de la théorie. Il nous a fallu discuter un nombre considérable d'observations, recueillies dans trois observatoires différents, pour reconnaître que les prétendues incertitudes de la théorie n'étaient qu'une illusion, et qu'il n'existait plus entre les Tables et la théorie aucun écart qui ne pût, qui ne dût même être attribué aux incertitudes des observations.

Les conditions dans lesquelles nous nous trouvons à l'égard de la théorie de Mercure sont différentes. La nécessité d'un accroissement considérable du mouvement séculaire du périhélie résulte exclusivement des observations des passages de la planète sur le disque du Soleil; nous n'avons fait usage d'ailleurs que des temps des contacts internes qui s'observent avec une grande exactitude. Pour échapper à cette nécessité, il faudrait admettre que des erreurs de plusieurs minutes dans l'estime des temps des phases auraient été commises dans de grands observatoires, par exemple en 1743 ou en 1753 à Paris, et par des observateurs tels que La Caille, de Lisle, Bouguer, les Cassini. Hypothèse inacceptable! d'autant plus qu'il faudrait encore ajouter que ces erreurs grossières dans l'estime du temps d'un phénomène physique se seraient reproduites à diverses époques et d'une manière progressive et régulière!

L'exactitude des observations dont il a été fait usage étant mise hors de cause, on peut se demander si les masses des planètes perturbatrices étant données, les mouvements séculaires du périhélie et de l'excentricité de l'orbite de Mercure en ont été exactement déduits.

Nous ferons remarquer à cet égard, qu'outre la détermination comprise dans le travail actuel, nous disposons de celle qu'on trouve dans un Mémoire publié en 1841, sur les variations séculaires des éléments des orbites des planètes, en ayant égard aux termes du premier et du troisième ordre. Nous allons rapprocher les deux déterminations, en séparant, comme dans le Mémoire de 1841, les termes des divers ordres, et en ramenant d'ailleurs toutes les masses aux valeurs adoptées dans le travail actuel.



Mouvement séculaire du périhélie de Mercure.

	MÉMOIRE DE 1841.	TRAVAIL ACTUEL.
Action de Vénus..........	287″ — 6″ = 281″	280″,6
Action de la Terre.......	86 — 3 = 83	83,6
Action de Mars...........	3 — 0 = 3	2,6
Action de Jupiter.........	158 — 6 = 152	152,6
Action de Saturne........	8 — 0 = 8	7,2
Action d'Uranus..........		0,1
Totaux.......	542 — 15 = 527	526,7

Mouvement séculaire de l'excentricité de Mercure.

	MÉMOIRE DE 1841.	TRAVAIL ACTUEL.
Action de Vénus..........	+ 1″,1 + 1″,7 = 2″,8	+ 2″,8
Action de la Terre........	+ 0,3 + 0,8 = 1,1	+ 1,1
Action de Mars...........	+ 0,0 + 0,0 = 0,0	0,0
Action de Jupiter.........	— 0,7 + 1,0 = 0,3	+ 0,3
Totaux.......	+ 0,7 + 3,5 = 4,2	+ 4,2

On voit qu'il y a identité entre les résultats, bien que dans le second travail nous n'ayons rien emprunté au premier.

On remarquera sans doute que les termes du premier ordre ne donnent que 0″,7 pour le mouvement de l'excentricité en un siècle, tandis que les termes du troisième ordre donnent + 3″,5. Cela n'empêche pas la série, dont il a été fait usage, d'être convergente. Les termes du premier ordre sont plus considérables en réalité et se détruisent les uns les autres en raison des positions relatives des périhélies. Au reste, nous avons déterminé les mouvements séculaires de l'excentricité et du périhélie par des formules d'interpolation, indépendantes du développement des coefficients des séries suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons, et nous sommes parvenus au même résultat que ci-dessus. Il ne paraît donc pas que, sous le rapport de l'exactitude de la théorie, aucun doute puisse subsister ici.

Ces divers points étant établis, et si nous mentionnons d'ailleurs qu'on a donné une attention particulière à ne laisser s'introduire dans les Tables aucune erreur progressive, il suffira de considérer la faiblesse des résidus des 21 équations de condition (page 82) pour demeurer convaincu qu'aucune erreur notable ne s'est glissée ni dans l'emploi des Tables du Soleil et de Mercure, ni dans le calcul des

passages de la planète sur le Soleil. Et dès lors, la nécessité d'augmenter notablement les mouvements séculaires du périhélie et de l'excentricité étant acquise, il reste à examiner si l'on peut y parvenir en donnant aux valeurs primitivement attribuées aux masses perturbatrices un accroissement convenable; ou bien s'il faudra recourir à l'hypothèse de causes perturbatrices « ad quas theoriæ lumen nondum accesserit. »

Les masses de Jupiter et de Saturne étant bien connues et l'action de Mars étant très-faible, on ne pourrait accroître sensiblement les mouvements calculés du périhélie et de l'excentricité de Mercure, qu'en changeant les masses de Vénus et de la Terre; ce qui fournit entre les coefficients ν' et ν'' dont dépendent ces masses, la relation

$$\text{(A)} \qquad 288'' \nu' + 87'' \nu'' = 38'',3.$$

Il résulte des mesures de l'obliquité de l'écliptique, faites pendant un siècle, que sa diminution séculaire est égale à 45″,76, tandis qu'en la calculant au moyen des masses adoptées pour les planètes, on la trouve de 47″,48. Il en découle la condition

$$\text{(B)} \qquad 0'',53\,\nu + 28'',88\,\nu' + 0'',75\,\nu''' + 1'',72 = 0.$$

Cette condition est celle qui est rapportée dans le Chapitre XIV (Tome IV, p. 52), et dans laquelle on a diminué la masse de Mars du *dixième* de la valeur qui lui avait été provisoirement attribuée dans la théorie du Soleil.

La discussion des observations des ascensions droites du Soleil nous a encore fourni entre les coefficients ν' et ν'' (Chapitre XIV, Tome IV, page 95), les quatre relations (IV), (V), (VI) et (VII), déduites de la considération des inégalités périodiques. Les équations (V) et (VII) s'accordent à fournir pour ν'' la valeur qui nous a conduits à la masse de Mars, à laquelle nous nous sommes arrêtés. Au moyen de cette valeur de ν'', les équations (IV) et (VI) qui dépendent fort peu de la masse de Mars, deviennent simplement

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} 8'',00\,\nu' + 0'',00 &= 0,\\ 8'',00\,\nu' - 0'',07 &= 0. \end{aligned}$$

Dans ces relations, le coefficient de ν' a été ramené à la valeur moyenne des perturbations périodiques produites par Vénus. La première a été tirée de la discussion des observations du Soleil faites depuis 1750 jusqu'en 1810, la seconde de la discussion des observations faites depuis 1811 jusqu'en 1850.

Telles sont les conditions qu'on possède pour la détermination de la masse

de Vénus. On peut y joindre la valeur

(D) $$\nu' = -0,0228,$$

trouvée par la discussion même des observations de Mercure, en ayant égard à tous les termes que Vénus introduit dans les théories de Mercure et de la Terre, ceux des mouvements séculaires du périhélie et de l'excentricité de Mercure étant exceptés.

Or pourrait-on, en tenant compte des incertitudes des observations, considérer ces diverses conditions comme compatibles entre elles?

En faisant à l'incertitude de ν' la part la plus forte possible dans l'équation (A), et rejetant une légère partie des erreurs sur les observations des passages de Mercure sur le Soleil, on peut se borner à poser $\nu' = +0,1$, c'est-à-dire à augmenter la masse de Vénus du *dixième* de sa valeur; mais on ne saurait faire moins.

Or dans cette hypothèse, la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique, déduite des observations, se trouve, par l'équation (B), inférieure de $4'',61 + 0'',53\nu$ à celle qu'on tire de la théorie; et même en supposant $\nu = -\frac{1}{2}$, cet excès est encore de $4'',34$. Lorsqu'on cherche à représenter les mesures de l'obliquité de l'écliptique, en y introduisant la diminution séculaire $50'',10$, au lieu de celle $45'',76$, qui résulte des observations elles-mêmes, on trouve ce qui suit :

ANNÉES.	OBLIQUITÉ MOYENNE suivant l'observation.	OBLIQUITÉ MOYENNE suivant le calcul.	OBSERVATION moins calcul.	OBSERVATOIRES.
1755	23°.28'.15",22	23°.28'.17",72	— 2",50	Greenwich.
1795	23.27.57,66	23.27.57,68	— 0,02	Id.
1798	23.27.55,05	23.27.56,17	— 1,12	Palerme.
1815	23.27.47,48	23.27.47,65	— 0,17	Kœnigsberg.
1825	23.27.43,78	23.27.42,64	+ 1,14	Id.
1841	23.27.35,56	23.27.34,63	+ 0,93	Paris.
1846	23.27.33,88	23.27.32,12	+ 1,76	Greenwich.

Chaque astronome pourra porter sur ce résultat un jugement dont nous avons cherché à réunir tous les éléments de la manière la plus claire. On considérera sans doute que les erreurs dont il faudrait supposer entachées les mesures de l'obliquité, sont peu acceptables, en raison surtout de la marche assez régulière qu'elles suivent, bien que les observations aient été faites dans des lieux et par des astronomes divers.

Dans la même hypothèse ($\nu' = +0,1$), les deux conditions tirées de la considération des inégalités périodiques du mouvement de la Terre, conditions si précises parce

qu'on a pu les affranchir des incertitudes systématiques des observations, se trouveraient en erreur, la première de 0",80, et la seconde de 0",73. Comme elles ont été déduites l'une et l'autre d'un très-grand nombre d'observations, et qu'elles s'accordent parfaitement, il y a lieu de croire que de telles erreurs sont peu probables.

Ajoutons enfin que la théorie de Mercure elle-même fournit, équation (D), $\nu' = -0{,}0228$, et que, si l'on substituait $\nu' = +0{,}1$ à cette valeur, on n'arriverait pas, dans la représentation des passages de la planète sur le Soleil, à une précision aussi grande que celle que nous avons obtenue, et que comporte la nature des observations (*).

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations, attendu, nous le répétons, qu'ayant réuni tous les éléments de la discussion, chacun pourra se prononcer en connaissance de cause, et adopter les conclusions qui lui paraîtront les plus sûres. Il nous reste donc seulement, pour le cas où l'on croirait que la masse de Vénus ne peut pas être augmentée, à examiner à quelles conséquences on serait conduit par la nécessité de faire résulter l'accroissement du mouvement du périhélie de Mercure de l'action de masses encore inconnues. Au reste, nous ne nous livrerons pas à la recherche de toutes les causes qui pourraient produire ce résultat. Nous nous contenterons d'indiquer celle qui paraîtrait la plus probable, en raison de nos connaissances actuelles sur la constitution physique de notre système planétaire.

Une planète, ou, si on le veut, un groupe de petites planètes circulant dans les parages de l'orbite de Mercure, serait susceptible de produire la perturbation anormale éprouvée par ce dernier astre. Examinons d'abord l'effet d'une seule masse perturbatrice : on en conclura aisément celui d'un ensemble de corps.

La masse troublante, si elle existe, n'a point d'effet sensible sur la marche de la Terre. Nous ignorons si elle aurait quelque action sur Vénus; et, en attendant que ce point ait pu être éclairci, nous admettrons que cette action soit insensible ou du moins plus faible que sur Mercure. Dans cette hypothèse, la masse cherchée devrait se trouver au-dessous de l'orbite de Mercure. Si de plus on veut que son orbite ne s'enchevêtre point avec celle de Mercure, il faudra que sa distance aphélie n'excède point les *huit dixièmes* de la distance moyenne de Mercure, c'est-à-dire les *trois dixièmes* de la distance moyenne de la Terre au Soleil.

(*) Le demi-diamètre de Vénus étant de 8",27 à la distance moyenne et celui de la Terre de 8",58, il résulte des valeurs des masses attribuées à ces deux planètes qu'elles auraient rigoureusement la même densité moyenne.

Les observations de Mercure ne nous ont, il est vrai, indiqué aucune inégalité de l'inclinaison de l'orbite, ou de la position du nœud, qui ne résulte des valeurs reçues pour les masses des planètes connues. Mais ceci n'est point une difficulté. Si la perturbation du périhélie ne nous a pas échappé, nous le devons à la grandeur de l'excentricité de l'orbite, et à ce que cette circonstance à rendu très appréciable le changement de la valeur de l'équation du centre. Or, rien de pareil n'a lieu pour les latitudes, dès qu'on ne suppose pas que l'orbite de la masse troublante soit fort inclinée sur l'orbite de Mercure.

Cela posé, attribuons un accent aux éléments de l'orbite de Mercure : désignons par les mêmes lettres, mais non accentuées, les éléments de l'orbite de la masse hypothétique m; et cherchons les variations séculaires que cette masse produit dans le périhélie et dans l'excentricité de Mercure. On les déterminera par les formules du Chapitre VI (Tome II, page 32), auxquelles il faut joindre la partie constante du développement de la fonction perturbatrice, donnée en tête du Chapitre IX (Tome II, page 87).

En se bornant aux termes qui sont du premier ordre par rapport aux excentricités, on trouve

$$\frac{d\varpi'}{dt} = \frac{1}{2}\left[B + C\frac{e}{e'}\cos(\varpi' - \varpi) \right] mn',$$

$$\frac{de'}{dt} = \frac{1}{2} C e \sin(\varpi' - \varpi) m n'.$$

B et C sont deux coefficients qui dépendent uniquement du rapport α des grands axes des orbites, et qui, conformément aux notations des Chapitres IV et V, ont pour expressions

$$B = b_1^{(0)} + \frac{1}{2} b_2^{(0)},$$

$$C = b^{(1)} - b_1^{(1)} - \frac{1}{2} b_2^{(1)}.$$

D'ailleurs $\frac{d\varpi'}{dt}$ et $\frac{de'}{dt}$ doivent satisfaire à la condition unique

$$\text{(E)} \qquad \frac{d\varpi'}{dt} + 2{,}72\,\frac{de'}{dt} = 0'',383.$$

En raison de l'indétermination du problème, nous supposerons encore que l'orbite de la masse troublante n'ait qu'une très-petite excentricité, ce qui nous permettra de négliger la valeur de $\frac{de'}{dt}$, ainsi que le second terme de la valeur de $\frac{d\varpi'}{dt}$.

D'ailleurs, s'il s'agit d'un groupe d'astéroïdes, on doit croire que leurs périhélies occupent des positions variées dans l'espace, et qu'ainsi les termes en $\sin(\varpi' - \varpi)$ et $\cos(\varpi' - \varpi)$ peuvent se détruire les uns les autres : tandis que le premier terme de la valeur de $\frac{d\varpi'}{dt}$ est toujours positif, quelle que soit l'orientation de l'orbite. Par là, la condition (E) deviendra simplement

$$\text{(F)} \qquad B m . n' = 0'',766.$$

Soit actuellement

$$6^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2};$$

nous pouvons, en vertu des transformations expliquées dans le Chapitre V, poser, avec une suffisante approximation,

$$b_1^{(0)} = 6^2,$$

$$b_2^{(0)} = 6^2 + 2,375\, 6^4.$$

Substituant dans (F), et divisant les deux membres par $n' = 5\,381\,016''$, on trouvera, entre les inconnues m et 6^2, la relation

$$(6^2 + 0,8\, 6^4)\, m = 0,000\,000\,095.$$

Cette relation fera connaître la valeur de la masse répondant à chaque hypothèse faite sur α, et, par suite, sur la distance de la masse troublante au Soleil.

On peut, à cet égard, consulter le tableau suivant, dans lequel nous donnons le rapport de la masse m à la masse m' de Mercure, cette dernière étant supposée égale au *trois-millionième* de la masse du Soleil :

α	DEMI-GRAND AXE de l'orbite.	$\frac{m}{m'}$	PLUS GRANDE ÉLONGATION au Soleil.
0,8	0,310	0,065	18° 4'
0,7	0,271	0,167	15.43
0,6	0,232	0,35	13.25
0,5	0,194	0,68	11.11
0,4	0,155	1,29	8.55
0,3	0,116	2,66	6.40

On voit, ainsi qu'on devait s'y attendre, que la masse troublante est d'autant plus considérable qu'elle est plus voisine du Soleil. Dans le voisinage de cet astre, elle varie, à très-peu près, en raison inverse du carré de la distance au Soleil.

Ainsi donc, à ne prendre que le point de vue mécanique, on peut, par l'hypothèse d'une masse troublante, dont la situation reste indéterminée, rendre compte des phénomènes observés. Il est toutefois indispensable d'examiner en outre si, sous le rapport physique, toutes les solutions sont également admissibles.

A la distance moyenne 0,17, la masse troublante serait précisément égale à la masse de Mercure. La plus grande élongation à laquelle elle pût atteindre, serait un peu inférieure à 10 degrés. Doit-on croire qu'une planète qui brillerait d'un éclat plus vif que Mercure, aurait nécessairement été aperçue après le coucher ou avant le lever du Soleil, rasant l'horizon? Ou bien serait-il possible que l'intensité de la lumière dispersée du Soleil eût permis à un tel astre d'échapper à nos regards?

Plus loin du Soleil, la masse troublante est plus faible, et il en est de même de son volume sans doute; mais l'élongation est plus grande. Plus près du Soleil, c'est l'inverse; et si l'éclat du corps troublant est augmenté par la dimension de ce corps et par le voisinage du Soleil, l'élongation devient si petite, qu'il serait possible qu'un astre, dont la position est inconnue, n'eût pas été aperçu dans les circonstances ordinaires.

Mais, dans ce cas même, comment un astre qui serait doué d'un très-vif éclat et qui se trouverait toujours très-près du Soleil, n'eût-il point été entrevu durant quelqu'une des éclipses totales? Un tel astre enfin ne passerait-il point entre le disque du Soleil et la Terre, et n'eût-on pas dû en avoir ainsi connaissance?

Telles sont les objections qu'on peut faire à l'hypothèse de l'existence d'une planète unique, comparable à Mercure pour ses dimensions, et circulant en dedans de l'orbite de cette dernière planète. Ceux à qui ces objections paraîtront trop graves, seront conduits à remplacer cette planète unique par une série d'astéroïdes dont les actions produiront en somme le même effet total sur le périhélie de Mercure. Outre que ces astéroïdes ne seront pas visibles dans les circonstances ordinaires, leur répartition autour du Soleil sera cause qu'ils n'introduiront dans le mouvement de Mercure aucune inégalité périodique de quelque importance.

L'hypothèse à laquelle nous nous trouvons ainsi amenés n'a plus rien d'excessif. Un groupe d'astéroïdes se trouve entre Jupiter et Mars, et sans doute on n'a pu en signaler que les principaux individus. Il y a lieu de croire même que l'espace planétaire contient de très-petits corps en nombre illimité, circulant autour du Soleil. Pour la région qui avoisine l'orbite de la Terre, cela est certain.

La suite des observations de Mercure montrera s'il faut définitivement admettre que de tels groupes d'astéroïdes existent aussi plus près du Soleil. Peut-être la

discussion des observations de Vénus portera-t-elle, de son côté, quelque lumière sur le même sujet, bien que la petitesse de l'excentricité de l'orbite de cette planète ne permette guère de l'espérer. Dans tous les cas, comme il se pourrait qu'au milieu de ces astéroïdes il en existât quelques-uns de plus gros que les autres, et qu'on n'aurait d'autre moyen d'en constater l'existence que par l'observation de leurs passages devant le disque solaire, la discussion présente devra confirmer les astronomes dans le zèle qu'ils mettent à étudier chaque jour les apparences de la surface du Soleil. Il est fort important que toute tache régulière, quelque minime qu'elle soit, et qui viendrait à paraître sur le disque du Soleil, soit suivie pendant quelques instants avec la plus grande attention, afin de s'assurer de sa nature par la connaissance de son mouvement.

SECTION V.

TABLES GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DE MERCURE.

En appliquant aux valeurs provisoires des éléments du mouvement, rapportées dans la Section II, les corrections que nous venons d'obtenir, on aura les valeurs définitives sur lesquelles sont fondées les Tables. Présentons d'abord l'ensemble des valeurs des éléments ainsi rectifiées. Le temps y est compté en années juliennes de $365^{j}\frac{1}{4}$, et il commence au midi moyen du 1er janvier 1850.

L'étude des mouvements de Mercure ne nous ayant fourni aucune lumière certaine sur les valeurs des masses des planètes perturbatrices, nous ne changerons rien à celles qui ont été rapportées dans la seconde Section.

Longitude moyenne L. Longitudes ϖ et θ du périhélie et du nœud ascendant.

$$L = 327^\circ 15' 20'',43 + 5\,381\,066'',544\,9\,t + 0'',000\,112\,89\,t^2,$$

$$\varpi = 75^\circ 7' 13'',93 + 55'',913\,8\,t + 0'',000\,111\,1\,t^2,$$

$$\theta = 46^\circ 33' 8'',75 + 42'',643\,0\,t + 0'',000\,083\,5\,t^2.$$

Excentricité e, et équation du centre f.

ζ étant l'anomalie moyenne, laquelle est égale à $L - \varpi$, on a :

$$e = 0,205\,604\,78 + 0'',041\,95\,t - 0'',000\,000\,9\,t^2$$

$$\begin{aligned}
f = {} & (84\,373'',889 + 0'',082\,59\,t - 0'',000\,001\,8\,t^2) \sin\zeta \\
& + (10\,731'',815 + 0'',020\,89\,t - 0'',000\,000\,4\,t^2) \sin 2\zeta \\
& + (\ 1\,891'',841 + 0'',005\,51\,t) \sin 3\zeta \\
& + (\ \ 381'',075 + 0'',001\,50\,t) \sin 4\zeta \\
& + (\ \ \ 82'',548 + 0'',000\,40\,t) \sin 5\zeta \\
& + (\ \ \ 18'',716 + 0'',000\,11\,t) \sin 6\zeta \\
& + (\ \ \ \ 4'',378 + 0'',000\,03\,t) \sin 7\zeta \\
& + (\ \ \ \ 1'',048 \sin 8\zeta) \\
& + (\ \ \ \ 0'',255 \sin 9\zeta) \\
& + (\ \ \ \ 0'',063 \sin 10\zeta) \\
& + (\ \ \ \ 0'',016 \sin 11\zeta) \\
& + (\ \ \ \ 0'',004 \sin 12\zeta).
\end{aligned}$$

Longitude dans l'orbite.

Les expressions des perturbations périodiques de la longitude ont été données dans la Ire Section. En ajoutant leur somme P_0, ainsi que l'équation du centre f, à la longitude moyenne L, on obtiendra la longitude dans l'orbite, $v = L + f + P_0$.

Inclinaison φ de l'orbite sur l'écliptique, et réduction ρ de la longitude à l'écliptique. Longitude héliocentrique v_1.

$$\varphi = 7^\circ\, 0'\, 7'',71 + 0'',063\,14\,t - 0'',000\,005\,6\,t^2,$$
$$\rho = -(772'',082 + 0'',003\,88\,t)\sin 2(v-\theta) + 1'',445\sin 4(v-\theta),$$
$$v_1 = v + \rho.$$

Latitude héliocentrique s.

On a, pour en calculer la partie principale s, la formule

$$\sin s = \sin\varphi \sin(v-\theta).$$

En outre, la planète éprouve de la part de Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne de très-petites perturbations en latitude, auxquelles il conviendra d'avoir égard aux époques des passages de la planète sur le Soleil. Nous avons donné, dans la Section I, les formules nécessaires à cet objet.

Rayon vecteur.

On obtiendra le rayon vecteur au moyen de l'une des formules rapportées dans la seconde Section, en y diminuant l'excentricité de 1'',18 conformément à la correction qu'elle vient de recevoir.

Il nous reste à faire connaître la disposition et l'usage des Tables.

Les nos I à V concernent les arguments.

Les nos VI à XX concernent la longitude.

Les nos XXI à XXVI concernent la latitude.

Les nos XXVII à XXXIV concernent le rayon vecteur.

ARGUMENTS.

I. — *Arguments. — Table des époques des longitudes moyennes de Mercure et des arguments des inégalités, au commencement de chacune des années du XIXe siècle.*

Longitude moyenne..........	$L = 327^\circ\,15'20'',43 + 5\,381\,066'',544\,9\,t.$	
Longitude du périhélie.......	$\varpi = 75^\circ\ 7'13'',93 +$	$55'',913\,8\,t,$
Longitude du nœud ascendant.	$\theta = 46^\circ 33'\ 8'',75 +$	$42'',643\,0\,t.$

On conclut pour les mouvements de ces arguments :

	LONGITUDE moyenne L.	LONGITUDE du périhélie ϖ.	LONGITUDE du nœud ☊.
En 1 jour	4°. 5′.32″,5573	0″,153	0″,117
En 365 jours	53.43. 3,4056	55,876	42,614
En 366 jours	57.48.35,9629	56,029	42,731
En 4 années, dont 1 bissextile	218.57.46,1796	3′43,655	2′50,572
En 20 années, dont 5 bissextiles	14.48.50,8980	18.38,276	14.12,860
En 100 années juliennes	74. 4.14,4900	1°33.11,380	1°11. 4,300
En 100 années juliennes, moins 1 jour.	69.58.41,9327	1.33.11,227	1.11. 4,183

Les arguments des perturbations planétaires sont les longitudes moyennes des planètes, l (Mercure), l' (Vénus), l'' (la Terre), l^{iv} (Jupiter), l^{v} (Saturne), mais comptées, à toute époque, à partir de l'équinoxe de 1850. Les valeurs de ces arguments sont rapportées au quart de la circonférence, divisé en 1000 parties. Elles sont les mêmes que pour les Tables du Soleil, auxquelles on les a empruntées.

II. — *Arguments. — Table des changements qu'il faut apporter aux époques du* XIXe *siècle,* 1801 *à* 1900 *inclus, pour avoir les époques des années correspondantes des autres siècles.*

Les règles à suivre pour former cette Table ont été exposées dans le Chapitre XII (*Annales*, Tome III, page 274).

Les siècles postérieurs au XIXe siècle sont désignés par le signe +; les siècles antérieurs le sont par le signe —.

Relativement à ces derniers, on doit opérer différemment avant le 4 octobre ou après le 15 octobre de l'année 1582. De là vient que la Table II contient deux corrections pour l'année 1582 : l'une applicable au 4 octobre et aux époques antérieures; l'autre applicable au 15 octobre et aux époques postérieures.

III. — *Arguments. — Mouvements pour les jours de l'année.*

IV. — *Arguments. — Mouvements pour les heures, minutes et secondes.*

Ces deux Tables n'ont besoin d'aucune explication. Elles ne comprennent que les arguments dont le mouvement est sensible en vingt-quatre heures.

V. — *Arguments. — Termes séculaires.*

La Table V comprend les termes de la longitude moyenne, des longitudes du périhélie et du nœud, qui varient proportionnellement au carré du temps,

savoir :

$$L = +0'',000\,112\,89\,t^2,$$
$$\varpi_1 = +0'',000\,111\,1\,t^2,$$
$$\theta_1 = +0'',000\,083\,5\,t^2.$$

Ces termes prennent la même valeur à des époques également distantes de 1850, antérieures ou postérieures à cette époque. Nous les donnons de 10 en 10 ans et pour ± 200 ans. En dehors de ces limites on les calculerait directement, chacun au moyen de sa formule, ce qui n'offrirait aucune difficulté.

LONGITUDE.

VI. — *Longitude.* — Équation du centre.

La réunion des nombres compris sous les n^{os} I, II, III, IV et V fait connaître la longitude moyenne, la longitude du périhélie et par suite l'anomalie moyenne.

La Table VI, dans laquelle on entre avec l'anomalie moyenne pour argument, fournit l'équation du centre et la partie de sa variation séculaire qui est proportionnelle au temps.

VII. — *Longitude.* — Équation du centre.

Sous ce numéro est mentionné l'ensemble des deux termes

$$-\left\{0'',000\,001\,8 \sin \zeta + 0'',000\,000\,4 \sin 2\zeta\right\} t^2,$$

de l'équation du centre. On les calculerait directement dans le cas exceptionnel où l'on en aurait besoin.

VIII à XIII. — *Longitude.* — Perturbation produite par Vénus.

Les Tables des arguments ont donné les valeurs de l et de l'.

Les Tables VIII à XII fournissent les valeurs individuelles des parties des perturbations qui dépendent des arguments :

$$\begin{aligned} \delta' &= l' - l, && \text{Table VIII},\\ 3\delta' + l &= 3l' - 2l, && \text{Table IX},\\ 5\delta' + 2l &= 5l' - 3l, && \text{Table X},\\ 5\delta' + 3l &= 5l' - 2l, && \text{Table XI},\\ 5\delta' + 4l &= 5l' - l, && \text{Table XII}. \end{aligned}$$

La Table XIII est à double entrée. Elle dépend des arguments δ' et l', et fournit la somme de tous les termes qui n'ont pas été considérés individuellement.

XIV et XV. — *Longitude.* — Perturbation produite par la Terre.

La Table XIV donne la valeur du terme dépendant de l'argument $\delta'' = l'' - l$.

La Table XV, à double entrée, donne, avec les arguments δ'' et l'', la valeur de l'ensemble des autres termes.

XVI et XVII. — *Longitude.* — Perturbation produite par Jupiter.

XVIII et XIX. — *Longitude.* — Perturbation produite par Saturne.

Ces Tables, analogues aux précédentes, ne demandent aucune explication.

En ajoutant à la longitude moyenne les nombres fournis par les Tables VI à XIX, on obtiendra la longitude v de Mercure dans l'orbite.

XX. — *Longitude.* — Réduction à l'écliptique.

En retranchant la longitude θ du nœud ascendant de la longitude v dans l'orbite, on obtient la distance $v - \theta$ de la planète au nœud ascendant.

La Table XX, dans laquelle on entre avec l'argument $v - \theta$, fournit la réduction à l'écliptique et sa variation séculaire.

La longitude héliocentrique v_1, réduite à l'écliptique, est égale à la longitude v dans l'orbite, augmentée de la réduction à l'écliptique.

La longitude ainsi obtenue est comptée à partir de l'équinoxe moyen. En lui ajoutant la nutation luni-solaire, donnée dans les Tables du Soleil, on la rapportera à l'équinoxe vrai. Il serait inutile de reproduire ici les Tables de nutation, puisqu'on ne saurait faire aucun usage de la longitude héliocentrique de Mercure sans recourir aux Tables du Soleil.

LATITUDE.

XXI. — *Latitude.* — Terme principal.

Cette Table, dans laquelle on entre avec l'argument $v - \theta$, donne la latitude résultant de l'inclinaison de l'orbite en 1850, ainsi que la partie de la variation séculaire qui est proportionnelle au temps.

XXII. — *Latitude.*

$$\text{Seconde partie} = -0'',000\,005\,6\,t^2 \sin(v - \theta).$$

On calculera directement ce terme quand on le croira utile.

XXIII à XXVI. — *Latitude*.

Ces Tables font connaître, aux époques des passages de Mercure sur le Soleil, les très-petites perturbations en latitude qui sont produites par les actions de Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne.

RAYON VECTEUR.

XXVII. — *Rayon vecteur*. — Partie elliptique.

Cette Table, dont l'argument est l'anomalie moyenne, donne la partie elliptique du rayon vecteur et sa variation séculaire.

XXVIII à XXX. — *Rayon vecteur*.

Ces trois Tables font connaître, par la réunion des nombres qu'elles fournissent, la perturbation due à l'action de Vénus. La 7e décimale est prise pour unité.

XXXI à XXXIII. — *Rayon vecteur*.

Les perturbations produites par la Terre, Jupiter et Saturne sont données chacune par une Table à double entrée.

XXXIV. — *Diamètre apparent de la planète*.

Ce diamètre est de 6",68 à la distance moyenne.

I. — ARGUMENTS. — *Époques des longitudes moyennes de Mercure et des arguments des inégalités, au commencement de chacune des années du* XIXe *siècle.*

ANNÉE.	LONGITUDE MOYENNE L.	LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE ϖ.	LONGITUDE DU NŒUD θ.	l	l'	l''	l'''	l^{iv}
1801	165°.59′. 2″,87	74°.21′.34″,19	45°.58′.19″,27	1852	136	1126	1255	1511
1802	219.42. 6,27	74.22.30,07	45.59. 1,89	2449	2633	1123	1592	1647
1803	273.25. 9,68	74.23.25,94	45.59.44,50	3045	1131	1120	1929	1783
1804 B	327. 8.13,09	74.24.21,82	46. 0.27,11	3642	3628	1117	2266	1918
1805	24.56.49,05	74.25.17,85	46. 1. 9,84	284	2144	1126	2604	2054
1806	78.39.52,45	74.26.13,72	46. 1.52,46	881	641	1123	2941	2190
1807	132.22.55,86	74.27. 9,60	46. 2.35,07	1478	3139	1120	3278	2326
1808 B	186. 5.59,27	74.28. 5,47	46. 3.17,69	2074	1636	1117	3615	2462
1809	243.54.35,23	74.29. 1,50	46. 4. 0,42	2716	152	1125	3953	2598
1810	297.37.38,63	74.29.57,38	46. 4.43,03	3313	2649	1123	290	2733
1811	351.20.42,04	74.30.53,25	46. 5.25,64	3910	1147	1120	627	2869
1812 B	45. 3.45,45	74.31.49,13	46. 6. 8,26	507	3644	1117	964	3005
1813	102.52.21,41	74.32.45,16	46. 6.50,99	1149	2160	1125	1301	3141
1814	156.35.24,81	74.33.41,03	46. 7.33,60	1745	657	1122	1638	3276
1815	210.18.28,22	74.34.36,91	46. 8.16,22	2342	3155	1119	1975	3412
1816 B	264. 1.31,62	74.35.32,78	46. 8.58,83	2939	1652	1117	2312	3548
1817	321.50. 7,59	74.36.28,81	46. 9.41,56	3581	167	1125	2650	3684
1818	15.33.10,99	74.37.24,69	46.10.24,17	178	2665	1122	2987	3820
1819	69.16.14,40	74.38.20,56	46.11. 6,79	774	1163	1119	3324	3955
1820 B	122.59.17,80	74.39.16,44	46.11.49,40	1371	3660	1116	3661	91
1821	180.47.53,77	74.40.12,47	46.12.32,13	2013	2175	1125	3999	227
1822	234.30.57,17	74.41. 8,34	46.13.14,75	2610	673	1122	336	363
1823	288.14. 0,58	74.42. 4,22	46.13.57,36	3207	3170	1119	673	499
1824 B	341.57. 3,98	74.43. 0,09	46.14.39,97	3803	1668	1116	1010	634
1825	39.45.39,95	74.43.56,12	46.15.22,70	446	183	1124	1348	770
1826	93.28.43,35	74.44.52,00	46.16. 5,32	1042	2681	1121	1685	906
1827	147.11.46,76	74.45.47,87	46.16.47,93	1639	1178	1119	2022	1042
1828 B	200.54.50,16	74.46.43,75	46.17.30,55	2236	3676	1116	2359	1177
1829	258.43.26,13	74.47.39,78	46.18.13,28	2878	2191	1124	2697	1313
1830	312.26.29,53	74.48.35,65	46.18.55,89	3475	689	1121	3034	1449
1831	6. 9.32,94	74.49.31,53	46.19.38,50	71	3186	1118	3371	1585
1832 B	59.52.36,34	74.50.27,41	46.20.21,12	668	1684	1116	3708	1721
1833	117.41.12,31	74.51.23,43	46.21. 3,85	1310	199	1124	46	1857
1834	171.24.15,71	74.52.19,31	46.21.46,46	1907	2697	1121	383	1992
1835	225. 7.19,12	74.53.15,18	46.22.29,08	2504	1194	1118	720	2128

I. — Arguments. — *Époques des longitudes moyennes de Mercure et des arguments des inégalités, au commencement de chacune des années du* XIX*e siècle.* (Suite.)

ANNÉE.	LONGITUDE MOYENNE L.	LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE ϖ.	LONGITUDE DU NOEUD θ.	l	l'	l''	l'''	l^{iv}
1836 B	278°.50′.22″,52	74°.54′.11″,06	46°.23′.11″,69	3100	3692	1115	1057	2264
1837	336.38.58,49	74.55. 7,09	46.23.54,42	3743	2207	1123	1395	2400
1838	30.22. 1,89	74.56. 2,96	46.24.37,03	339	705	1121	1731	2535
1839	84. 5. 5,30	74.56.58,84	46.25.19,65	936	3202	1118	2068	2671
1840 B	137.48. 8,70	74.57.54,72	46.26. 2,26	1533	1700	1115	2405	2807
1841	195.36.44,67	74.58.50,74	46.26.44,99	2175	215	1123	2743	2943
1842	249.19.48,07	74.59.46,62	46.27.27,61	2772	2713	1120	3080	3079
1843	303. 2.51,48	75. 0.42,50	46.28.10,22	3368	1210	1117	3417	3214
1844 B	356.45.54,88	75. 1.38,37	46.28.52,83	3965	3708	1115	3754	3350
1845	54.34.30,84	75. 2.34,40	46.29.35,56	607	2223	1123	92	3486
1846	108.17.34,25	75. 3.30,27	46.30.18,18	1204	720	1120	429	3622
1847	162. 0.37,66	75. 4.26,15	46.31. 0,79	1801	3218	1117	766	3757
1848 B	215.43.41,06	75. 5.22,03	46.31.43,41	2397	1716	1114	1103	3893
1849	273.32.17,02	75. 6.18,05	46.32.26,14	3039	231	1123	1441	29
1850	327.15.20,43	75. 7.13,93	46.33. 8,75	3636	2728	1120	1778	165
1851	20.58.23,84	75. 8. 9,81	46.33.51,36	233	1226	1117	2115	301
1852 B	74.41.27,24	75. 9. 5,68	46.34.33,98	830	3723	1114	2452	436
1853	132.30. 3,20	75.10. 1,71	46.35.16,71	1472	2239	1122	2790	572
1854	186.13. 6,61	75.10.57,59	46.35.59,32	2068	736	1119	3127	708
1855	239.56.10,02	75.11.53,46	46.36.41,94	2665	3234	1117	3464	844
1856 B	293.39.13,42	75.12.49,34	46.37.24,55	3262	1731	1114	3801	979
1857	351.27.49,38	75.13.45,36	46.38. 7,28	3904	247	1122	139	1116
1858	45.10.52,79	75.14.41,24	46.38.49,89	501	2744	1119	476	1251
1859	98.53.56,19	75.15.37,12	46.39.32,51	1097	1242	1116	813	1387
1860 B	152.36.59,60	75.16.32,99	46.40.15,12	1694	3739	1114	1150	1523
1861	210.25.35,56	75.17.29,02	46.40.57,85	2336	2255	1122	1488	1659
1862	264. 8.38,97	75.18.24,90	46.41.40,47	2933	752	1119	1825	1794
1863	317.51.42,37	75.19.20,77	46.42.23,08	3530	3250	1116	2162	1930
1864 B	11.34.45,78	75.20.16,65	46.43. 5,69	126	1747	1113	2499	2066
1865	69.23.21,74	75.21.12,68	46.43.48,42	769	263	1121	2836	2202
1866	123. 6.25,15	75.22. 8,55	46.44.31,04	1365	2760	1119	3173	2338
1867	176.49.28,55	75.23. 4,43	46.45.13,65	1962	1258	1116	3510	2473
1868 B	230.32.31,96	75.24. 0,30	46.45.56,27	2559	3755	1113	3847	2609
1869	288.21. 7,92	75.24.56,33	46.46.39,00	3201	2270	1121	185	2745
1870	342. 4.11,33	75.25.52,21	46.47.21,61	3798	768	1118	522	2881

I. — Arguments. — *Époques des longitudes moyennes de Mercure et des arguments des inégalités, au commencement de chacune des années du* XIXe *siècle.* (Suite.)

ANNÉE.	LONGITUDE MOYENNE L.	LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE ϖ.	LONGITUDE DU NŒUD ☊.	l	l'	l''	l'''	l
1871	35°.47′.14″,73	75°.26′.48″,08	46°.48′. 4″,22	394	3266	1116	859	3016
1872 B	89.30.18,14	75.27.43,96	46.48.46,84	991	1763	1113	1196	3152
1873	147.18.54,10	75.28.39,99	46.49.29,57	1633	278	1121	1534	3288
1874	201. 1.57,51	75.29.35,86	46.50.12,18	2230	2776	1118	1871	3424
1875	254.45. 0,91	75.30.31,74	46.50.54,80	2827	1273	1115	2208	3560
1876 B	308.28. 4,32	75.31.27,61	46.51.37,41	3423	3771	1112	2545	3695
1877	6.16.40,28	75.32.23,64	46.52.20,14	66	2286	1121	2883	3831
1878	59.59.43,69	75.33.19,52	46.53. 2,75	662	784	1118	3220	3967
1879	113.42.47,09	75.34.15,39	46.53.45,37	1259	3281	1115	3557	103
1880 B	167.25.50,50	75.35.11,27	46.54.27,98	1856	1779	1112	3894	238
1881	225.14.26,46	75.36. 7,30	46.55.10,71	2498	294	1120	232	375
1882	278.57.29,87	75.37. 3,17	46.55.53,33	3095	2792	1118	569	510
1883	332.40.33,28	75.37.59,05	46.56.35,94	3691	1289	1115	906	646
1884 B	26.23.36,68	75.38.54,92	46.57.18,55	288	3787	1112	1243	782
1885	84.12.12,64	75.39.50,95	46.58. 1,28	930	2302	1129	1581	918
1886	137.55.16,05	75.40.46,83	46.58.43,90	1527	800	1117	1918	1053
1887	191.38.19,45	75.41.42,70	46.59.26,51	2124	3297	1114	2255	1189
1888 B	245.21.22,86	75.42.38,58	47. 0. 9,13	2720	1795	1112	2592	1325
1889	303. 9.58,82	75.43.34,61	47. 0.51,86	3362	310	1120	2930	1461
1890	356.53. 2,23	75.44.30,48	47. 1.34,47	3959	2808	1117	3267	1597
1891	50.36. 5,63	75.45.26,36	47. 2.17,08	556	1305	1114	3603	1732
1892 B	104.19. 9,04	75.46.22,23	47. 2.59,70	1153	3803	1111	3940	1868
1893	162. 7.45,00	75.47.18,26	47. 3.42,43	1795	2318	1119	278	2004
1894	215.50.48,41	75.48.14,14	47. 4.25,04	2391	815	1117	615	2140
1895	269.33.51,81	75.49.10,01	47. 5. 7,66	2988	3313	1114	952	2275
1896 B	323.16.55,22	75.50. 5,89	47. 5.50,27	3585	1811	1111	1289	2411
1897	21. 5.31,18	75.51. 1,92	47. 6.33,00	227	326	1119	1627	2547
1898	74.48.34,59	75.51.57,79	47. 7.15,61	824	2823	1116	1964	2683
1899	128.31.37,99	75.52.53,67	47. 7.58,23	1420	1321	1114	2301	2819
1900	182.14.41,40	75.53.49,54	47. 8.40,84	2017	3818	1111	2638	2954

II. — ARGUMENTS. — *Table des changements qu'il faut apporter aux époques du XIXe siècle, 1801 à 1900 inclus, pour avoir les époques des années correspondantes des autres siècles.*

ANNÉES ÉCOULÉES.	LONGITUDE MOYENNE L.	LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE ϖ.	LONGITUDE DU NŒUD ☊.	l	l'	l''	l'''	l^{v}
−2000	7°.41′.40″,89	328°.56′.14″,24	336°.18′.35″,40	396	254	271	1587	423
−1900	81.45.55,38	330.29.25,62	337.29.39,70	1204	2452	264	3308	2003
−1800	155.50. 9,87	332. 2.37,00	338.40.44,00	2011	650	257	1029	3582
−1700	229.54.24,36	333.35.48,38	339.51.48,30	2819	2848	250	2751	1161
−1600	303.58.38,85	335. 8.59,76	341. 2.52,60	3626	1046	243	472	2740
−1500	18. 2.53,34	336.42.11,14	342.13.56,90	434	3244	236	2193	319
−1400	92. 7. 7,83	338.15.22,52	343.25. 1,20	1241	1442	229	3914	1898
−1300	166.11.22,32	339.48.33,90	344.36. 5,50	2049	3640	222	1635	3477
−1200	240.15.36,81	341.21.45,28	345.47. 9,80	2856	1838	215	3357	1056
−1100	314.19.51,30	342.54.56,66	346.58.14,10	3664	36	208	1078	2635
−1000	28.24. 5,79	344.28. 8,04	348. 9.18,40	471	2234	201	2799	214
− 900	102.28.20,28	346. 1.19,42	349.20.22,70	1279	432	194	520	1793
− 800	176.32.34,77	347.34.30,80	350.31.27,00	2086	2630	187	2241	3372
− 700	250.36.49,26	349. 7.42,18	351.42.31,30	2893	828	180	3963	951
− 600	324.41. 3,75	350.40.53,56	352.53.35,60	3701	3026	173	1684	2530
− 500	38.45.18,24	352.14. 4,94	354. 4.39,90	508	1224	166	3405	109
− 400	112.49.32,73	353.47.16,32	355.15.44,20	1316	3422	159	1126	1688
− 300 J	186.53.47,22	355.20.27,70	356.26.48,50	2123	1620	152	2847	3267
− 300 G	145.58.21,64	355.20.26,17	356.26.47,33	1669	1442	43	2838	3264
− 200	220. 2.36,13	356.53.37,55	357.37.51,63	2476	3640	36	559	843
− 100	290. 1.18,07	358.26.48,77	358.48.55,82	3238	1820	18	2280	2421
+ 100	69.58.41,93	1.33.11,23	1.11. 4,18	762	2180	3982	1720	1579
+ 200	144. 2.56,42	3. 6.22,61	2.22. 8,48	1569	378	3975	3442	3158
+ 300	214. 1.38,36	4.39.33,83	3.33.12,67	2331	2558	3957	1162	736
+ 400	284. 0.20,29	6.12.45,06	4.44.16,85	3093	739	3939	2882	2315
+ 500	353.59. 2,22	7.45.56,29	5.55.21,03	3855	2919	3921	602	3894
+ 600	68. 3.16,71	9.19. 7,67	7. 6.25,33	663	1117	3914	2324	1473
+ 700	138. 1.58,64	10.52.18,89	8.17.29,52	1425	3297	3896	44	3052
+ 800	208. 0.40,58	12.25.30,12	9.28.33,70	2187	1477	3878	1764	630
+ 900	277.59.22,51	13.58.41,35	10.39.37,88	2949	3657	3861	3484	2209
+1000	352. 3.37,00	15.31.52,73	11.50.42,18	3756	1855	3854	1206	3788

II. — ARGUMENTS. — *Table des changements qu'il faut apporter aux époques du* XIX[e] *siècle*, 1801 *à* 1900 *inclus, pour avoir les époques des années correspondantes des autres siècles.* (Suite.)

ANNÉES ÉCOULÉES.	LONGITUDE MOYENNE L.	LONGITUDE DU PÉRIHÉLIE ϖ.	LONGITUDE DU NOEUD θ.	l	l'	l''	l^{iv}	l^{v}
+1100	62°. 2′.18″,93	17°. 5′. 3″,96	13°. 1′.46″,37	518	35	3836	2926	1367
+1200	132. 1. 0,86	18.38.15,18	14.12.50,55	1280	2216	3818	646	2945
+1300	201.59.42,80	20.11,26,41	15.23.54,73	2042	396	3800	2367	524
+1400	276. 3.57,29	21.44.37,79	16.34.59,03	2850	2594	3793	88	2103
+1500	346. 2.39,22	23.17.49,02	17.46. 3,22	3612	774	3775	1808	3682
+1600	56. 1.21,15	24.51. 0,24	18.57. 7,40	374	2954	3757	3528	1260
+1700	126. 0. 3,09	26.24.11,47	20. 8.11,58	1136	1134	3739	1249	2839
+1800	200. 4.17,58	27.57.22,85	21.19.15,88	1943	3332	3732	2970	418
+1900	270. 2.59,51	29.30.34,08	22.30.20,07	2705	1513	3714	690	1997
+2000	340. 1.41,44	31. 3.45,30	23.41.24,25	3467	3693	3696	2410	3575

III. — ARGUMENTS. — *Mouvements pour les jours.*

JANVIER.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L.	ϖ	θ	l	l'	l''	l^{iv}	l^{v}	FRACT. DE L'ANN.
1	1	0	0°. 0′. 0″,00	0″,00	0″,00	0	0	0	0	0	0,000
2	2	1	4. 5.32,56	0,15	0,12	46	18	11	1	0	0,003
3	3	2	8.11. 5,11	0,31	0,23	91	36	22	2	1	0,005
4	4	3	12.16.37,67	0,46	0,35	137	53	33	3	1	0,008
5	5	4	16.22.10,23	0,61	0,47	182	71	44	4	2	0,011
6	6	5	20.27.42,79	0,77	0,58	228	89	55	5	2	0,014
7	7	6	24.33.15,34	0,92	0,70	273	107	66	6	2	0,016
8	8	7	28.38.47,90	1,07	0,82	319	125	77	6	3	0,019
9	9	8	32.44.20,46	1,22	0,93	364	142	88	7	3	0,022
10	10	9	36.49.53,02	1,38	1,05	410	160	99	8	4	0,025
11	11	10	40.55.25,57	1,53	1,17	455	178	110	9	4	0,027
12	12	11	45. 0.58,13	1,68	1,28	500	196	120	10	4	0,030
13	13	12	49. 6.30,69	1,84	1,40	546	214	131	11	5	0,033
14	14	13	53.12. 3,24	1,99	1,52	591	231	142	12	5	0,036
15	15	14	57.17.35,80	2,14	1,63	637	249	153	13	5	0,038
16	16	15	61.23. 8,36	2,30	1,75	682	267	164	14	6	0,041
17	17	16	65.28.40,92	2,45	1,87	728	285	175	15	6	0,044
18	18	17	69.34.13,47	2,60	1,98	773	303	186	16	7	0,047
19	19	18	73.39.46,03	2,76	2,10	819	320	197	17	7	0,049
20	20	19	77.45.18,59	2,91	2,22	864	338	208	18	7	0,052

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

JANVIER (Suite).

Année C	Année B	Jours écoulés.	L.	ϖ	𝔊	l	l'	l''	l'''	l^{v}	Fract. de l'ann.
21	21	20	81°.50'.51",15	3°,06	2,34	909	356	219	18	7	0,055
22	22	21	85.56.23,70	3,21	2,45	955	374	230	19	8	0,057
23	23	22	90. 1.56,26	3,37	2,57	1000	392	241	20	8	0,060
24	24	23	94. 7.28,82	3,52	2,69	1046	409	252	21	9	0,063
25	25	24	98.13. 1,37	3,67	2,80	1091	427	263	22	9	0,066
26	26	25	102.18.33,93	3,83	2,92	1137	445	274	23	9	0,068
27	27	26	106.24. 6,49	3,98	3,04	1182	463	285	24	10	0,071
28	28	27	110.29.39,05	4,13	3,15	1228	481	296	25	10	0,074
29	29	28	114.35.11,60	4,29	3,27	1273	498	307	26	11	0,077
30	30	29	118.40.44,16	4,44	3,39	1319	516	318	27	11	0,079
31	31	30	122.46.16,72	4,59	3,50	1364	534	329	28	11	0,082
			FÉVRIER.								
1	1	31	126.51.49,28	4,75	3,62	1410	552	339	29	12	0,085
2	2	32	130.57.21,83	4,90	3,74	1455	570	350	30	12	0,088
3	3	33	135. 2.54,39	5,05	3,85	1501	587	361	30	12	0,090
4	4	34	139. 8.26,95	5,21	3,97	1546	605	372	31	13	0,093
5	5	35	143.13.59,50	5,36	4,09	1592	623	383	32	13	0,096
6	6	36	147.19.32,06	5,51	4,20	1637	641	394	33	14	0,099
7	7	37	151.25. 4,62	5,66	4,32	1683	659	405	34	14	0,101
8	8	38	155.30.37,18	5,82	4,44	1728	676	416	35	14	0,104
9	9	39	159.36. 9,73	5,97	4,55	1774	694	427	36	15	0,107
10	10	40	163.41.42,29	6,12	4,67	1819	712	438	37	15	0,110
11	11	41	167.47.14,85	6,28	4,79	1864	730	449	38	15	0,112
12	12	42	171.52.47,41	6,43	4,90	1910	748	460	39	16	0,115
13	13	43	175.58.19,96	6,58	5,02	1955	765	471	40	16	0,118
14	14	44	180. 3.52,52	6,74	5,14	2001	783	482	41	17	0,120
15	15	45	184. 9.25,08	6,89	5,25	2046	801	493	42	17	0,123
16	16	46	188.14.57,63	7,04	5,37	2092	819	504	42	17	0,126
17	17	47	192.20.30,19	7,19	5,49	2137	837	515	43	18	0,129
18	18	48	196.26. 2,75	7,35	5,60	2183	854	526	44	18	0,131
19	19	49	200.31.35,31	7,50	5,72	2228	872	537	45	19	0,134
20	20	50	204.37. 7,86	7,65	5,84	2274	890	548	46	19	0,137
21	21	51	208.42.40,42	7,81	5,95	2319	908	559	47	19	0,140
22	22	52	212.48.12,98	7,96	6,07	2365	926	569	48	19	0,142
23	23	53	216.53.45,54	8,11	6,19	2410	943	580	49	20	0,145
24	24	54	220.59.18,09	8,27	6,30	2456	961	591	50	20	0,148
25	25	55	225. 4.50,65	8,42	6,42	2501	979	602	51	21	0,151

III. — ARGUMENTS — *Mouvements pour les jours*. (Suite.)

FÉVRIER (SUITE).

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L.	ϖ	ς	l	l'	l''	l^{iv}	l_v	FRACT. DE L'ANN.
26	26	56	229°.10′.23″,21	8″,57	6″,54	2547	997	613	52	21	0,153
27	27	57	233.15.55,76	8,73	6,65	2592	1015	624	53	21	0,156
28	28	58	237.21.28,32	8,88	6,77	2638	1032	635	54	22	0,159
	29	59	241.27. 0,88	9,03	6,89	2683	1050	646	54	22	0,161

MARS.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L.	ϖ	ς	l	l'	l''	l^{iv}	l_v	FRACT. DE L'ANN.
1	0	59	241.27. 0,88	9,03	6,89	2683	1050	646	54	22	0,161
2	1	60	245.32.33,44	9,19	7,01	2728	1068	657	55	22	0,164
3	2	61	249.38. 5,99	9,34	7,12	2774	1086	668	56	23	0,167
4	3	62	253.43.38,55	9,49	7,24	2819	1104	679	57	23	0,170
5	4	63	257.49.11,11	9,64	7,36	2865	1121	690	58	24	0,173
6	5	64	261.54.43,67	9,80	7,47	2910	1139	701	59	24	0,175
7	6	65	266. 0.16,22	9,95	7,59	2956	1157	712	60	24	0,178
8	7	66	270. 5.48,78	10,10	7,71	3001	1175	723	61	25	0,181
9	8	67	274.11.21,34	10,26	7,82	3047	1193	734	62	25	0,183
10	9	68	278.16.53,90	10,41	7,94	3092	1210	745	63	26	0,186
11	10	69	282.22.26,45	10,56	8,06	3138	1228	756	64	26	0,189
12	11	70	286.27.59,01	10,72	8,17	3183	1246	767	65	26	0,192
13	12	71	290.33.31,57	10,87	8,29	3228	1264	778	66	27	0,194
14	13	72	294.39. 4,12	11,02	8,41	3274	1282	788	66	27	0,197
15	14	73	298.44.36,68	11,18	8,52	3319	1299	799	67	27	0,200
16	15	74	302.50. 9,24	11,33	8,64	3365	1317	810	68	28	0,203
17	16	75	306.55.41,80	11,48	8,76	3410	1335	821	69	28	0,205
18	17	76	311. 1.14,35	11,63	8,87	3456	1353	832	70	29	0,208
19	18	77	315. 6.46,91	11,79	8,99	3501	1371	843	71	29	0,211
20	19	78	319.12.19,47	11,94	9,11	3547	1388	854	72	29	0,214
21	20	79	323.17.52,03	12,09	9,22	3592	1406	865	73	30	0,216
22	21	80	327,23.24,58	12,25	9,34	3638	1424	876	74	30	0,219
23	22	81	331.28.57,14	12,40	9,46	3683	1442	887	75	30	0,222
24	23	82	335.34.29,70	12,55	9,57	3729	1460	898	76	31	0,225
25	24	83	339.40. 2,25	12,71	9,69	3774	1478	909	77	31	0,227
26	25	84	343.45.34,81	12,86	9,81	3820	1495	920	78	31	0,230
27	26	85	347.51. 7,37	13,01	9,92	3865	1513	931	78	32	0,233
28	27	86	351.56.39,93	13,17	10,04	3911	1531	942	79	32	0,236
29	28	87	356. 2.12,48	13,32	10,16	3956	1549	953	80	33	0,238
30	29	88	360. 7.45,04	13,47	10,27	2	1567	964	81	33	0,241
31	30	89	4.13.17,60	13,62	10,39	47	1584	975	82	33	0,244
	31	90	8.18.50,16	13,78	10,51	92	1602	986	83	34	0,246

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

AVRIL.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'ANN.
1	0	90	8°.18'.50",16	13",78	10",51	92	1602	986	83	34	0,246
2	1	91	12.24.22,71	13,93	10,62	138	1620	997	84	34	0,249
3	2	92	16.29.55,27	14,08	10,74	183	1638	1008	85	34	0,252
4	3	93	20.35.27,83	14,24	10,86	229	1656	1018	86	35	0,255
5	4	94	24.41. 0,38	14,39	10,97	274	1673	1029	87	35	0,257
6	5	95	28.46.32,94	14,54	11,09	320	1691	1040	88	36	0,260
7	6	96	32.52. 5,50	14,70	11,21	365	1709	1051	89	36	0,263
8	7	97	36.57.38,06	14,85	11,32	411	1727	1062	90	36	0,266
9	8	98	41. 3.10,61	15,00	11,44	456	1745	1073	90	37	0,268
10	9	99	45. 8.43,17	15,16	11,56	502	1762	1084	91	37	0,271
11	10	100	49.14.15,73	15,31	11,68	547	1780	1095	92	37	0,274
12	11	101	53.19.48,29	15,46	11,79	593	1798	1106	93	38	0,277
13	12	102	57.25.20,84	15,61	11,91	638	1816	1117	94	38	0,279
14	13	103	61.30.53,40	15,77	12,03	684	1834	1128	95	38	0,282
15	14	104	65.36.25,96	15,92	12,14	729	1851	1139	96	39	0,285
16	15	105	69.41.58,51	16,07	12,26	775	1869	1150	97	39	0,288
17	16	106	73.47.31,07	16,23	12,38	820	1887	1161	98	40	0,290
18	17	107	77.53. 3,63	16,38	12,49	866	1905	1172	99	40	0,293
19	18	108	81.58.36,19	16,53	12,61	911	1923	1183	100	40	0,296
20	19	109	86. 4. 8,74	16,69	12,73	957	1940	1194	101	41	0,298
21	20	110	90. 9.41,30	16,84	12,84	1002	1958	1205	102	41	0,301
22	21	111	94.15.13,86	16,99	12,96	1047	1976	1216	102	41	0,304
23	22	112	98.20.46,42	17,15	13,08	1093	1994	1227	103	42	0,307
24	23	113	102.26.18,97	17,30	13,19	1138	2012	1237	104	42	0,309
25	24	114	106.31.51,53	17,45	13,31	1184	2029	1248	105	43	0,312
26	25	115	110.37.24,09	17,60	13,43	1229	2047	1259	106	43	0,315
27	26	116	114.42.56,64	17,76	13,54	1275	2065	1270	107	43	0,318
28	27	117	118.48.29,20	17,91	13,66	1320	2083	1281	108	44	0,320
29	28	118	122.54. 1,76	18,06	13,78	1366	2101	1292	109	44	0,323
30	29	119	126.59.34,32	18,22	13,89	1411	2118	1303	110	45	0,326
	30	120	131. 5. 6,87	18,37	14,01	1456	2136	1314	111	45	0,329

MAI.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'ANN.
1	0	120	131. 5. 6,87	18,37	14,01	1456	2136	1314	111	45	0,329
2	1	121	135.10.39,43	18,52	14,13	1502	2154	1325	112	45	0,331
3	2	122	139.16.11,99	18,68	14,24	1547	2172	1336	113	45	0,334
4	3	123	143.21.44,55	18,83	14,36	1593	2190	1347	114	46	0,337
5	4	124	147.27.17,10	18,98	14,48	1638	2207	1358	114	46	0,340

III. — ARGUMENTS. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

MAI (SUITE).

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	Ω	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'ANN.
6	5	125	151.32.49,66	19,14	14,59	1684	2225	1369	115	47	0,342
7	6	126	155.38.22,22	19,29	14,71	1729	2243	1380	116	47	0,345
8	7	127	159.43.54,77	19,44	14,83	1775	2261	1391	117	47	0,348
9	8	128	163.49.27,33	19,59	14,94	1820	2279	1402	118	48	0,350
10	9	129	167.54.59,89	19,75	15,06	1866	2296	1413	119	48	0,353
11	10	130	172. 0.32,45	19,90	15,18	1911	2314	1424	120	48	0,356
12	11	131	176. 6. 5,00	20,05	15,29	1957	2332	1435	121	49	0,359
13	12	132	180.11.37,56	20,21	15,41	2002	2350	1446	122	49	0,361
14	13	133	184.17.10,12	20,36	15,53	2048	2368	1457	123	50	0,364
15	14	134	188.22.42,68	20,51	15,64	2093	2385	1467	124	50	0,367
16	15	135	192.28.15,23	20,67	15,76	2139	2403	1478	125	50	0,370
17	16	136	196.33.47,79	20,82	15,88	2184	2421	1489	126	51	0,372
18	17	137	200.39.20,35	20,97	15,99	2230	2439	1500	126	51	0,375
19	18	138	204.44.52,90	21,13	16,11	2275	2457	1511	127	52	0,378
20	19	139	208.50.25,46	21,28	16,23	2321	2474	1522	128	52	0,381
21	20	140	212.55.58,02	21,43	16,35	2366	2492	1533	129	52	0,383
22	21	141	217. 1.30,58	21,58	16,46	2411	2510	1544	130	53	0,386
23	22	142	221. 7. 3,13	21,74	16,58	2457	2528	1555	131	53	0,389
24	23	143	225.12.35,69	21,89	16,70	2502	2546	1566	132	53	0,392
25	24	144	229.18. 8,25	22,04	16,81	2548	2563	1577	133	54	0,394
26	25	145	233.23.40,81	22,20	16,93	2593	2581	1588	134	54	0,397
27	26	146	237.29.13,36	22,35	17,05	2639	2599	1599	135	55	0,400
28	27	147	241.34.45,92	22,50	17,16	2684	2617	1610	136	55	0,403
29	28	148	245.40.18,48	22,66	17,28	2730	2635	1621	137	55	0,405
30	29	149	249.45.51,03	22,81	17,40	2775	2652	1632	138	56	0,408
31	30	150	253.51.23,59	22,96	17,51	2821	2670	1643	138	56	0,411
	31	151	257.56.56,15	23,12	17,63	2866	2688	1654	139	56	0,413

JUIN.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	Ω	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'ANN.
1	0	151	257.56.56,15	23,12	17,63	2866	2688	1654	139	56	0,413
2	1	152	262. 2.28,71	23,27	17,75	2912	2706	1665	140	57	0,416
3	2	153	266. 8. 1,26	23,42	17,86	2957	2724	1676	141	57	0,419
4	3	154	270.13.33,82	23,57	17,98	3003	2741	1686	142	57	0,422
5	4	155	274.19. 6,38	23,73	18,10	3048	2759	1697	143	58	0,424
6	5	156	278.24.38,94	23,88	18,21	3094	2777	1708	144	58	0,427
7	6	157	282.30.11,49	24,03	18,33	3139	2795	1719	145	59	0,430
8	7	158	286.35.44,05	24,19	18,45	3185	2813	1730	146	59	0,433
9	8	159	290.41.16,61	24,34	18,56	3230	2830	1741	147	59	0,435
10	9	160	294.46.49,16	24,49	18,68	3275	2848	1752	148	60	0,438

III. — ARGUMENTS. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

JUIN (SUITE).

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{v}	FRACT. DE L'ANN.
11	10	161	298°.52'.21",72	24°,65	18°,80	3321	2866	1763	149	60	0,441
12	11	162	302.57.54,28	24,80	18,91	3366	2884	1774	150	60	0,444
13	12	163	307. 3.26,84	24,95	19,03	3412	2902	1785	150	61	0,446
14	13	164	311. 8.59,39	25,11	19,15	3457	2919	1796	151	61	0,449
15	14	165	315.14.31,95	25,26	19,26	3503	2937	1807	152	62	0,452
16	15	166	319.20. 4,51	25,41	19,38	3548	2955	1818	153	62	0,455
17	16	167	323.25.37,07	25,57	19,50	3594	2973	1829	154	62	0,457
18	17	168	327.31. 9,62	25,72	19,61	3639	2991	1840	155	63	0,460
19	18	169	331.36.42,18	25,87	19,73	3685	3008	1851	156	63	0,463
20	19	170	335.42.14,74	26,02	19,85	3730	3026	1862	157	63	0,465
21	20	171	339.47.47,29	26,18	19,96	3775	3044	1873	158	64	0,468
22	21	172	343.53.19,85	26,33	20,08	3821	3062	1884	159	64	0,471
23	22	173	347.58.52,41	26,48	20,20	3866	3080	1895	160	65	0,474
24	23	174	352. 4.24,97	26,64	20,31	3912	3097	1906	161	65	0,476
25	24	175	356. 9.57,52	26,79	20,43	3957	3115	1916	162	65	0,479
26	25	176	0.15.30,08	26,94	20,55	3	3133	1927	162	66	0,482
27	26	177	4.21. 2,64	27,10	20,66	48	3151	1938	163	66	0,485
28	27	178	8.26.35,20	27,25	20,78	94	3169	1949	164	67	0,487
29	28	179	12.32. 7,75	27,40	20,90	139	3186	1960	165	67	0,490
30	29	180	16.37.40,31	27,56	21,02	185	3204	1971	166	67	0,493
	30	181	20.43.12,87	27,71	21,13	230	3222	1982	167	67	0,496

JUILLET.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{v}	FRACT. DE L'ANN.
1	0	181	20.43.12,87	27,71	21,13	230	3222	1982	167	67	0,496
2	1	182	24.48.45,42	27,86	21,25	276	3240	1993	168	68	0,498
3	2	183	28.54.17,98	28,01	21,37	321	3258	2004	169	68	0,501
4	3	184	32.59.50,54	28,17	21,48	367	3275	2015	170	69	0,504
5	4	185	37. 5.23,10	28,32	21,60	412	3293	2026	171	69	0,507
6	5	186	41.10.55,65	28,47	21,72	458	3311	2037	172	69	0,509
7	6	187	45.16.28,21	28,63	21,83	503	3329	2048	173	70	0,512
8	7	188	49.22. 0,77	28,78	21,95	549	3347	2059	174	70	0,515
9	8	189	53.27.33,33	28,93	22,07	594	3364	2070	174	71	0,518
10	9	190	57.33. 5,88	29,09	22,18	639	3382	2081	175	71	0,520
11	10	191	61.38.38,44	29,24	22,30	685	3400	2092	176	71	0,523
12	11	192	65.44.11,00	29,39	22,42	730	3418	2103	177	72	0,526
13	12	193	69.49.43,56	29,55	22,53	776	3436	2114	178	72	0,528
14	13	194	73.55.16,11	29,70	22,65	821	3453	2125	179	72	0,531
15	14	195	78. 0.48,67	29,85	22,77	867	3471	2135	180	73	0,534

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

JUILLET (Suite).

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'ANN.
16	15	196	82°. 6'.21",23	30",00	22",88	912	3489	2146	181	73	0,537
17	16	197	86.11.53,78	30,16	23,00	958	3507	2157	182	74	0,539
18	17	198	90.17.26,34	30,31	23,12	1003	3525	2168	183	74	0,542
19	18	199	94.22.58,90	30,46	23,23	1049	3542	2179	184	74	0,545
20	19	200	98.28.31,46	30,62	23,35	1094	3560	2190	185	75	0,548
21	20	201	102.34. 4,01	30,77	23,47	1140	3578	2201	186	75	0,550
22	21	202	106.39.36,57	30,92	23,58	1185	3596	2212	186	75	0,553
23	22	203	110.45. 9,13	31,08	23,70	1231	3614	2223	187	76	0,556
24	23	204	114.50.41,69	31,23	23,82	1276	3632	2234	188	76	0,559
25	24	205	118.56.14,24	31,38	23,93	1322	3649	2245	189	76	0,561
26	25	206	123. 1.46,80	31,54	24,05	1367	3667	2256	190	77	0,564
27	26	207	127. 7.19,36	31,69	24,17	1413	3685	2267	191	77	0,567
28	27	208	131.12.51,91	31,84	24,28	1458	3703	2278	192	78	0,570
29	28	209	135.18.24,47	31,99	24,40	1504	3721	2289	193	78	0,572
30	29	210	139.23.57,03	32,15	24,52	1549	3738	2300	194	78	0,575
31	30	211	143.29.29,59	32,30	24,63	1594	3756	2311	195	79	0,578
	31	212	147.35. 2,14	32,45	24,75	1640	3774	2322	196	79	0,580
			AOUT.								
1	0	212	147.35. 2,14	32,45	24,75	1640	3774	2322	196	79	0,580
2	1	213	151.40.34,70	32,61	24,87	1685	3792	2333	197	79	0,583
3	2	214	155.46. 7,26	32,76	24,98	1731	3810	2344	198	80	0,586
4	3	215	159.51.39,82	32,91	25,10	1776	3827	2355	198	80	0,589
5	4	216	163.57.12,37	33,07	25,22	1822	3845	2365	199	81	0,591
6	5	217	168. 2.44,93	33,22	25,33	1867	3863	2376	200	81	0,594
7	6	218	172. 8.17,49	33,37	25,45	1913	3881	2387	201	81	0,597
8	7	219	176.13.50,04	33,53	25,57	1958	3899	2398	202	82	0,600
9	8	220	180.19.22,60	33,68	25,69	2003	3916	2409	203	82	0,602
10	9	221	184.24.55,16	33,83	25,80	2049	3934	2420	204	82	0,605
11	10	222	188.30.27,72	33,98	25,92	2094	3952	2431	205	83	0,608
12	11	223	192.36. 0,27	34,14	26,04	2140	3970	2442	206	83	0,611
13	12	224	196.41.32,83	34,29	26,15	2185	3988	2453	207	83	0,613
14	13	225	200.47. 5,39	34,44	26,27	2231	5	2464	208	84	0,616
15	14	226	204.52.37,95	34,60	26,39	2276	23	2475	209	84	0,619
16	15	227	208.58.10,50	34,75	26,50	2322	41	2486	210	85	0,622
17	16	228	213. 3.43,06	34,90	26,62	2367	59	2497	210	85	0,624
18	17	229	217. 9.15,62	35,06	26,74	2413	77	2508	211	85	0,627
19	18	230	221.14.48,17	35,21	26,85	2458	94	2519	212	86	0,630
20	19	231	225.20.20,73	35,36	26,97	2504	112	2530	213	86	0,632

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

AOUT (Suite).

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	☊	*l*	*l'*	*l''*	*l'''*	*l''''*	FRACT. DE L'AN.
			° ′ ″	″	″						
21	20	232	229.25.53,29	35,52	27,09	2549	130	2541	214	86	0,635
22	21	233	233.31.25,85	35,67	27,20	2595	148	2552	215	87	0,638
23	22	234	237.36.58,40	35,82	27,32	2640	166	2563	216	87	0,641
24	23	235	241.42.30,96	35,97	27,44	2686	183	2574	217	88	0,643
25	24	236	245.48. 3,52	36,13	27,55	2731	201	2584	218	88	0,646
26	25	237	249.53.36,08	36,28	27,67	2777	219	2595	219	88	0,649
27	26	238	253.59. 8,63	36,43	27,79	2822	237	2606	220	89	0,652
28	27	239	258. 4.41,19	36,59	27,90	2868	255	2617	221	89	0,654
29	28	240	262.10.13,75	36,74	28,02	2913	272	2628	222	89	0,657
30	29	241	266.15.46,30	36,89	28,14	2958	290	2639	222	90	0,660
31	30	242	270.21.18,86	37,05	28,25	3004	308	2650	223	90	0,663
	31	243	274.26.51,42	37,20	28,37	3049	326	2661	224	91	0,665

SEPTEMBRE.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	☊	*l*	*l'*	*l''*	*l'''*	*l''''*	FRACT. DE L'AN.
1	0	243	274.26.51,42	37,20	28,37	3049	326	2661	224	91	0,665
2	1	244	278.32.23,98	37,35	28,49	3095	344	2672	225	91	0,668
3	2	245	282.37.56,53	37,51	28,60	3140	361	2683	226	91	0,671
4	3	246	286.43.29,09	37,66	28,72	3186	379	2694	227	92	0,674
5	4	247	290.49. 1,65	37,81	28,84	3231	397	2705	228	92	0,676
6	5	248	294.54.34,21	37,96	28,95	3277	415	2716	229	92	0,679
7	6	249	299. 0. 6,76	38,12	29,07	3322	433	2727	230	93	0,682
8	7	250	303. 5.39,32	38,27	29,19	3368	450	2738	231	93	0,685
9	8	251	307.11.11,88	38,42	29,30	3413	468	2749	232	93	0,687
10	9	252	311.16.44,43	38,58	29,42	3459	486	2760	233	94	0,690
11	10	253	315.22.16,99	38,73	29,54	3504	504	2771	234	94	0,693
12	11	254	319.27.49,55	38,88	29,65	3550	522	2782	234	95	0,695
13	12	255	323.33.22,11	39,04	29,77	3595	539	2793	235	95	0,698
14	13	256	327.38.54,66	39,19	29,89	3641	557	2804	236	95	0,701
15	14	257	331.44.27,22	39,34	30,00	3686	575	2814	237	96	0,704
16	15	258	335.49.59,78	39,50	30,12	3732	593	2825	238	96	0,706
17	16	259	339.55.32,34	39,65	30,24	3777	611	2836	239	97	0,709
18	17	260	344. 1. 4,89	39,80	30,36	3822	628	2847	240	97	0,712
19	18	261	348. 6.37,45	39,95	30,47	3868	646	2858	241	97	0,715
20	19	262	352.12.10,01	40,11	30,59	3913	664	2869	242	98	0,717
21	20	263	356.17.42,56	40,26	30,71	3959	682	2880	243	98	0,720
22	21	264	0.23.15,12	40,41	30,82	4	700	2891	244	98	0,723
23	22	265	4.28.47,68	40,57	30,94	50	717	2902	245	99	0,726
24	23	266	8.34.20,24	40,72	31,06	95	735	2913	246	99	0,728
25	24	267	12.39.52,79	40,87	31,17	141	753	2924	246	100	0,731

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

SEPTEMBRE (Suite).

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'AN
26	25	268	16°.45'.25",35	41°,03	31°,29	186	771	2935	247	100	0,734
27	26	269	20.50.57,91	41,18	31,41	232	789	2946	248	100	0,737
28	27	270	24.56.30,47	41,33	31,52	277	806	2957	249	101	0.739
29	28	271	29. 2. 3,02	41,49	31,64	322	824	2968	250	101	0,742
30	29	272	33. 7.35,58	41,64	31,76	368	842	2979	251	101	0,745
	30	273	37.13. 8,14	41,79	31,87	413	860	2990	252	102	0,747

OCTOBRE.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{iv}	FRACT. DE L'AN
1	0	273	37.13. 8,14	41,79	31,87	413	860	2990	252	102	0,747
2	1	274	41.18.40,69	41,95	31,99	459	878	3001	253	102	0,750
3	2	275	45.24.13,25	42,10	32,11	504	895	3012	254	103	0,753
4	3	276	49.29.45,81	42,25	32,22	550	913	3023	255	103	0,756
5	4	277	53.35.18,37	42,40	32,34	595	931	3033	256	103	0,758
6	5	278	57.40.50,92	42,56	32,46	641	949	3044	257	104	0,761
7	6	279	61.46.23,48	42,71	32,57	686	967	3055	258	104	0,764
8	7	280	65.51.56,04	42,86	32,69	732	984	3066	259	104	0,767
9	8	281	69.57.28,60	43,02	32,81	777	1002	3077	259	105	0,769
10	9	282	74. 3. 1,15	43,17	32,92	823	1020	3088	260	105	0,772
11	10	283	78. 8.33,71	43,32	33,04	868	1038	3099	261	105	0,775
12	11	284	82.14. 6,27	43,48	33,16	914	1056	3110	262	106	0,778
13	12	285	86.19.38,82	43,63	33,27	959	1073	3121	263	106	0,780
14	13	286	90.25.11,38	43,78	33,39	1005	1091	3132	264	107	0,783
15	14	287	94.30.43,94	43,94	33,51	1050	1109	3143	265	107	0,786
16	15	288	98.36.16,50	44,09	33,62	1096	1127	3154	266	107	0,789
17	16	289	102.41.49,05	44,24	33,74	1141	1145	3165	267	108	0,791
18	17	290	106.47.21,61	44,39	33,86	1186	1162	3176	268	108	0,794
19	18	291	110.52.54,17	44,55	33,97	1232	1180	3187	269	108	0,797
20	19	292	114.58.26,73	44,70	34,09	1277	1198	3198	270	109	0,800
21	20	293	119. 3.59,28	44,85	34,21	1323	1216	3209	271	109	0,802
22	21	294	123. 9.31,84	45,01	34,32	1368	1234	3220	271	110	0,805
23	22	295	127.15. 4,40	45,16	34,44	1414	1251	3231	272	110	0,808
24	23	296	131.20.36,95	45,31	34,56	1459	1269	3242	273	110	0,810
25	24	297	135.26. 9,51	45,47	34,67	1505	1287	3253	274	111	0,813
26	25	298	139.31.42,07	45,62	34,79	1550	1305	3263	275	111	0,816
27	26	299	143.37.14,63	45,77	34,91	1596	1323	3274	276	111	0,819
28	27	300	147.42.47,18	45,93	35,03	1641	1340	3285	277	112	0,821
29	28	301	151.48.19,74	46,08	35,14	1687	1358	3296	278	112	0,824
30	29	302	155.53.52,30	46,23	35,26	1732	1376	3307	279	112	0,827

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

OCTOBRE (Suite).

Année C	Année B	Jours écoulés.	I.	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{v}	Fract. de l'ann
31	30	303	159°.59′.24″,86	46″,38	35″,38	1778	1394	3318	280	113	0,830
	31	304	164. 4.57,41	46,54	35.49	1823	1412	3329	281	113	0,832

NOVEMBRE.

Année C	Année B	Jours écoulés.	I.	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{v}	Fract. de l'ann
1	0	304	164. 4.57,41	46,54	35,49	1823	1412	3329	281	113	0.832
2	1	305	168.10.29,97	46,69	35,61	1869	1429	3340	282	114	0,835
3	2	306	172.16. 2,53	46,84	35,73	1914	1447	3351	282	114	0.838
4	3	307	176.21.35.08	47,00	35,84	1960	1465	3362	283	114	0,841
5	4	308	180.27. 7,64	47 15	35,96	2005	1483	3373	284	115	0,843
6	5	309	184.32.40,20	47,30	36,08	2051	1501	3384	285	115	0.846
7	6	310	188.38.12,76	47,46	36,19	2096	1518	3395	286	115	0.849
8	7	311	192.43.45,31	47,61	36,31	2141	1536	3406	287	116	0,852
9	8	312	196.49.17,87	47,76	36,43	2187	1554	3417	288	116	0.854
10	9	313	200.54.50,43	47,92	36,54	2232	1572	3428	289	117	0,857
11	10	314	205. 0.22,99	48.07	36,66	2278	1590	3439	290	117	0.860
12	11	315	209. 5.55,54	48,22	36,78	2323	1607	3450	291	117	0,862
13	12	316	213.11.28,10	48,37	36,89	2369	1625	3461	292	118	0.865
14	13	317	217.17. 0,66	48.53	37,01	2414	1643	3471	293	118	0,868
15	14	318	221.22.33,22	48.68	37.13	2460	1661	3482	294	118	0,871
16	15	319	225.28. 5,77	48,83	37.24	2505	1679	3493	294	119	0,873
17	16	320	229.33.38,33	48,99	37,36	2550	1696	3504	295	119	0,876
18	17	321	233.39.10,89	49,14	37.48	2596	1714	3515	296	119	0,879
19	18	322	237.44.43.44	49.29	37,59	2641	1732	3526	297	120	0,882
20	19	323	241.50.16.00	49.45	37,71	2687	1750	3537	298	120	0.884
21	20	324	245.55.48,56	49,60	37,83	2732	1768	3548	299	121	0,887
22	21	325	250. 1.21,12	49,75	37,94	2778	1785	3559	300	121	0,890
23	22	326	254. 6.53,67	49,91	38.06	2823	1803	3570	301	121	0,893
24	23	327	258.12,26,23	50.06	38.18	2869	1821	3581	302	122	0,895
25	24	328	262.17,58,79	50.21	38,29	2914	1839	3592	303	122	0,898
26	25	329	266.23.31.35	50,36	38,41	2960	1857	3603	304	123	0.901
27	26	330	270.29. 3,90	50,52	38,53	3005	1874	3614	305	123	0,904
28	27	331	274.34.36,46	50.67	38,64	3051	1892	3625	306	123	0,906
29	28	332	278.40. 9.02	50.82	38,76	3096	1910	3636	307	124	0.909
30	29	333	282.45.41,57	50.98	38.88	3142	1928	3647	307	124	0.912
	30	334	286.51.14,13	51,13	38.99	3187	1946	3658	308	124	0.914

III. — Arguments. — *Mouvements pour les jours.* (Suite.)

DÉCEMBRE.

ANNÉE C	ANNÉE B	JOURS ÉCOULÉS.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{v}	FRACT. DE L'AN
1	0	334	286°.51′.14″,13	51″,13	38″,99	3187	1946	3658	308	124	0,914
2	1	335	290.56.46,69	51,28	39,11	3233	1963	3669	309	125	0,917
3	2	336	295. 2.19,25	51,44	39,23	3278	1981	3680	310	125	0,920
4	3	337	299. 7.51,80	51,59	39,34	3324	1999	3691	311	125	0,923
5	4	338	303.13.24,36	51,74	39,46	3369	2017	3702	312	126	0,925
6	5	339	307.18.56,92	51,90	39,58	3415	2035	3712	313	126	0,928
7	6	340	311.24.29,48	52,05	39,70	3460	2053	3723	314	126	0,931
8	7	341	315.30. 2,03	52,20	39,81	3505	2070	3734	315	127	0,934
9	8	342	319.35.34,59	52,35	39,93	3551	2088	3745	316	127	0,936
10	9	343	323.41. 7,15	52,51	40,05	3596	2106	3756	317	128	0,939
11	10	344	327.46.39,70	52,66	40,16	3642	2124	3767	318	128	0,942
12	11	345	331.52.12,26	52,81	40,28	3687	2142	3778	318	128	0,945
13	12	346	335.57.44,82	52,97	40,40	3733	2159	3789	319	129	0,947
14	13	347	340. 3.17,38	53,12	40,51	3778	2177	3800	320	129	0,950
15	14	348	344. 8.49,93	53,27	40,63	3824	2195	3811	321	130	0,953
16	15	349	348.14.22,49	53,43	40,75	3869	2213	3822	322	130	0,956
17	16	350	352.19.55,05	53,58	40,86	3915	2231	3833	323	130	0,958
18	17	351	356.25.27,61	53,73	40,98	3960	2248	3844	324	131	0,961
19	18	352	0.31. 0,16	53,89	41,10	6	2266	3855	325	131	0,964
20	19	353	4.36.32,72	54,04	41,21	51	2284	3866	326	131	0,967
21	20	354	8.42. 5,28	54,19	41,33	97	2302	3877	327	132	0,969
22	21	355	12.47.37,83	54,34	41,45	142	2320	3888	328	132	0,972
23	22	356	16.53.10,39	54,50	41,56	188	2337	3899	329	132	0,975
24	23	357	20.58.42,95	54,65	41,68	233	2355	3910	330	133	0,977
25	24	358	25. 4.15,51	54,80	41,80	279	2373	3921	330	133	0,980
26	25	359	29. 9.48,06	54,96	41,91	324	2391	3931	331	134	0,983
27	26	360	33.15.20,62	55,11	42,03	369	2409	3942	332	134	0,986
28	27	361	37.20.53,18	55,26	42,15	415	2426	3953	333	134	0,988
29	28	362	41.26.25,74	55,42	42,26	460	2444	3964	334	135	0,991
30	29	363	45.31.58,29	55,57	42,38	506	2462	3975	335	135	0,994
31	30	364	49.37.30,85	55,72	42,50	551	2480	3986	336	135	0,997
	31	365	53.43. 3,41	55,88	42,61	597	2498	3997	337	136	0,999

IV. — Arguments. — *Mouvements pour les heures.*

HEURES.	L	ϖ	θ	l	l'	l''	l'''	l^{iv}
1	0°.10′.13″,857	0″,006	0″,005	2	1	0	0	0
2	0.20.27,713	0,013	0,010	4	1	1	0	0
3	0.30.41,570	0,019	0,015	6	2	1	0	0
4	0.40.55,426	0,026	0,019	8	3	2	0	0
5	0.51. 9,283	0,032	0,024	9	4	2	0	0
6	1. 1.23,139	0,038	0,029	11	4	3	0	0
7	1.11.36,996	0,045	0,034	13	5	3	0	0
8	1.21.50,852	0,051	0,039	15	6	4	0	0
9	1.32. 4,709	0,057	0,044	17	7	4	0	0
10	1.42.18,565	0,064	0,048	19	7	5	0	0
11	1.52.32,422	0,070	0,053	21	8	5	0	0
12	2. 2.46,279	0,077	0,058	23	9	5	0	0
13	2.13. 0,135	0,083	0,063	25	10	6	1	0
14	2.23.13,992	0,089	0,068	27	10	6	1	0
15	2.33.27,848	0,096	0,073	28	11	7	1	0
16	2.43.41,705	0,102	0,078	30	12	7	1	0
17	2.53.55,561	0,108	0,083	32	13	8	1	0
18	3. 4. 9,418	0,115	0,088	34	13	8	1	0
19	3.14.23,274	0,121	0,092	36	14	9	1	0
20	3.24.37,131	0,128	0,097	38	15	9	1	0
21	3.34.50,987	0,134	0,102	40	16	10	1	0
22	3.45. 4,844	0,140	0,107	42	16	10	1	0
23	3.55.18,700	0,147	0,112	44	17	10	1	0
24	4. 5.32,557	0,153	0,117	45	18	11	1	0

IV (Suite). — Arguments. — *Mouvements pour les minutes.*

MIN.	L	MIN.	L	MIN.	L	MIN.	L
1	0′.10″,231	16	2′.43″,695	31	5′.17″,159	46	7′.50″,623
2	0.20,462	17	2.53,926	32	5.27,390	47	8. 0,854
3	0.30,693	18	3. 4,157	33	5.37,621	48	8.11,085
4	0.40,924	19	3.14,388	34	5.47,852	49	8.21,316
5	0.51,155	20	3.24,619	35	5.58,083	50	8.31,547
6	1. 1,386	21	3.34,850	36	6. 8,314	51	8.41,778
7	1.11,617	22	3.45,081	37	6.18,545	52	8.52,009
8	1.21,848	23	3.55,312	38	6.28,776	53	9. 2,240
9	1.32,078	24	4. 5,543	39	6.39,007	54	9.12,471
10	1.42,309	25	4.15,774	40	6.49,238	55	9.22,701
11	1.52,540	26	4.26,005	41	6.59,469	56	9.32,932
12	2. 2,771	27	4.36,236	42	7. 9,700	57	9.43,163
13	2.13,002	28	4.46,467	43	7.19,931	58	9.53,394
14	2.23,233	29	4.56,697	44	7.30,162	59	10. 3,625
15	2.33,464	30	5. 6,928	45	7.40,392	60	10.13,857

IV (Suite). — Arguments. — *Mouvements pour les secondes.*

Secondes.	L	Secondes.	L	Secondes.	L	Secondes.	L
1	0",171	16	2",728	31	5",286	46	7",844
2	0,341	17	2,899	32	5,457	47	8,014
3	0,512	18	3,069	33	5,627	48	8,185
4	0,682	19	3,240	34	5,798	49	8,355
5	0,853	20	3,410	35	5,968	50	8,526
6	1,023	21	3,581	36	6,139	51	8,696
7	1,194	22	3,751	37	6,309	52	8,867
8	1,364	23	3,922	38	6,480	53	9,037
9	1,535	24	4,092	39	6,650	54	9,208
10	1,705	25	4,263	40	6,821	55	9,378
11	1,876	26	4,433	41	6,991	56	9,549
12	2,046	27	4,604	42	7,162	57	9,719
13	2,217	28	4,775	43	7,332	58	9,890
14	2,387	29	4,945	44	7,503	59	10,060
15	2,558	30	5,116	45	7,673	60	10,231

V. — Arguments. — *Termes séculaires.*

Années écoulées depuis 1850,0.	L	ϖ	θ
± 0	+ 0",00	+ 0",00	+ 0",00
10	0,01	0,01	0,01
20	0,05	0,04	0,03
30	0,10	0,10	0,08
40	0,18	0,18	0,13
50	0,28	0,28	0,21
60	0,41	0,40	0,30
70	0,55	0,54	0,41
80	0,72	0,71	0,53
90	0,91	0,90	0,68
100	1,13	1,11	0,84
110	1,37	1,34	1,01
120	1,63	1,60	1,20
130	1,91	1,88	1,41
140	2,21	2,18	1,64
150	2,54	2,50	1,88
160	2,89	2,84	2,14
170	3,26	3,21	2,41
180	3,66	3,60	2,71
190	4,08	4,01	3,01
200	4,52	4,44	3,34

Nota. — En dehors des époques comprises dans cette Table, on calculerait directement L, ϖ et θ par les formules

$$L = +0'',000\,112\,89\,t^2,$$
$$\varpi = +0,000\,111\,1\ \ t^2,$$
$$\theta = +0,000\,083\,5\ \ t^2,$$

t étant compté en années à partir de 1850.

VI. — Longitude. — *Équation du centre.*

(Quand l'argument est lu à droite, l'équation et la variation séculaire changent de signe.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
° ′	° ′ ″	″	″	° ′	° ′	° ′ ″	″	″	° ′
0. 0	0. 0. 0,00	330,46	0,00	360. 0	7. 0	3.50. 0,05	324,68	1,81	353. 0
0.10	0. 5.30,46	330,45	0,04	359.50	7.10	3.55.24,73	324,41	1,85	352.50
0.20	0.11. 0,91	330,44	0,09	359.40	7.20	4. 0.49,14	324,13	1,90	352.40
0.30	0.16.31,35	330,43	0,13	359.30	7.30	4. 6.13,27	323,84	1,94	352.30
0.40	0.22. 1,78	330,39	0,17	359.20	7.40	4.11.37,11	323,56	1,98	352.20
0.50	0.27.32,17	330,37	0,22	359.10	7.50	4.17. 0,67	323,25	2,02	352.10
1. 0	0.33. 2,54	330,32	0,26	359. 0	8. 0	4.22.23,92	322,96	2,07	352. 0
1.10	0.38.32,86	330,28	0,30	358.50	8.10	4.27.46,88	322,65	2,11	351.50
1.20	0.44. 3,14	330,23	0,35	358.40	8.20	4.33. 9,53	322,33	2,15	351.40
1.30	0.49.33,37	330,17	0,39	358.30	8.30	4.38.31,86	322,01	2,19	351.30
1.40	0.55. 3,54	330,11	0,44	358.20	8.40	4.43.53,87	321,68	2,24	351.20
1.50	1. 0.33,65	330,03	0,48	358.10	8.50	4.49.15,55	321,35	2,28	351.10
2. 0	1. 6. 3,68	329,96	0,52	358. 0	9. 0	4.54.36,90	321,01	2,32	351. 0
2.10	1.11.33,64	329,87	0,57	357.50	9.10	4.59.57,91	320,66	2,36	350.50
2.20	1.17. 3,51	229,79	0,61	357.40	9.20	5. 5.18,57	320,31	2,40	350.40
2.30	1.22.33,30	329,69	0,65	357.30	9.30	5.10.38,88	319,96	2,44	350.30
2.40	1.28. 2,99	329,58	0,70	357.20	9.40	5.15.58,84	319,59	2,48	350.20
2.50	1.33.32,57	329,47	0,74	357.10	9.50	5.21.18,43	319,23	2,52	350.10
3. 0	1.39. 2,04	329,36	0,78	357. 0	10. 0	5.26.37,66	318,84	2,56	350. 0
3.10	1.44.31,40	329,23	0,83	356.50	10.10	5.31.56,50	318,47	2,60	349.50
3.20	1.50. 0,63	329,11	0,87	356.40	10.20	5.37.14,97	318,09	2,64	349.40
3.30	1.55.29,74	328,97	0,91	356.30	10.30	5.42.33,06	317,69	2,68	349.30
3.40	2. 0.58,71	328,83	0,96	356.20	10.40	5.47.50,75	317,30	2,72	349.20
3.50	2. 6.27,54	328,68	1,00	356.10	10.50	5.53. 8,05	316,89	2,76	349.10
4. 0	2.11.56,22	328,53	1,04	356. 0	11. 0	5.58.24,94	316,49	2,80	349. 0
4.10	2.17.24,75	328,36	1,08	355.50	11.10	6. 3.41,43	316,07	2,84	348.50
4.20	2.22.53,11	328,20	1,13	355.40	11.20	6. 8.57,50	315,65	2,88	348.40
4.30	2.28.21,31	328,03	1,17	355.30	11.30	6.14.13,15	315,22	2,93	348.30
4.40	2.33.49,34	327,85	1,21	355.20	11.40	6.19.28,37	314,80	2,97	348.20
4.50	2.39.17,19	327,66	1,26	355.10	11.50	6.24.43,17	314,35	3,01	348.10
5. 0	2.44.44,85	327,47	1,30	355. 0	12. 0	6.29.57,52	313,92	3,04	348. 0
5.10	2.50.12,32	327,28	1,34	354.50	12.10	6.35.11,44	313,46	3,08	347.50
5.20	2.55.39,60	327,07	1,38	354.40	12.20	6.40.24,90	313,01	3,12	347.40
5.30	3. 1. 6,67	326,85	1,43	354.30	12.30	6.45.37,91	312,56	3,16	347.30
5.40	3. 6.33,52	326,65	1,47	354.20	12.40	6.50.50,47	312,08	3,20	347.20
5.50	3.12. 0,17	326,42	1,51	354.10	12.50	6.56. 2,55	311,62	3,24	347.10
6. 0	3.17.26,59	326,18	1,56	354. 0	13. 0	7. 1.14,17	311,15	3,28	347. 0
6.10	3.22.52,77	325,95	1,60	353.50	13.10	7. 6.25,32	310,66	3,32	346.50
6.20	3.28.18,72	325,71	1,64	353.40	13.20	7.11.35,98	310,18	3,36	346.40
6.30	3.33.44,43	325,46	1,68	353.30	13.30	7.16.46,16	309,69	3,40	346.30
6.40	3.39. 9,89	325,21	1,73	353.20	13.40	7.21.55,85	309,19	3,44	346.20
6.50	3.44.35,10	324,95	1,77	353.10	13.50	7.27. 5,04	308,68	3,48	346.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
14°. 0'	7°.32'.13",72	308",19	3",52	346°. 0'	21°. 0'	10°.59'.39",92	282",52	5",05	339°. 0'
14.10	7.37.21,91	307,67	3,56	345.50	21.10	11. 4.22,44	281,83	5,08	338.50
14.20	7.42.29,58	307,15	3,59	345.40	21.20	11. 9. 4,27	281,11	5,11	338.40
14.30	7.47.36,73	306,63	3,63	345.30	21.30	11.13.45,38	280,40	5,14	338.30
14.40	7.52.43,36	306,10	3,67	345.20	21.40	11.18.25,78	279,68	5,17	338.20
14.50	7.57.49,46	305,57	3,71	345.10	21.50	11.23. 5,46	278,97	5,21	338.10
15. 0	8. 2.55,03	305,03	3,75	345. 0	22. 0	11.27.44.43	278,24	5,24	338. 0
15.10	8. 8. 0,06	304,49	3,79	344.50	22.10	11.32.22,67	277,51	5.27	337.50
15.20	8.13. 4,55	303,93	3,83	344.40	22.20	11.37. 0,18	276,78	5,30	337.40
15.30	8.18. 8,48	303,39	3,86	344.30	22.30	11.41.36,96	276,04	5,34	337.30
15.40	8.23.11,87	302,83	3.90	344.20	22.40	11.46.13,00	275,31	5,37	337.20
15.50	8.28.14,70	302,26	3,94	344.10	22.50	11.50.48,31	274.56	5,40	337.10
16. 0	8.33.16,96	301,70	3,97	344. 0	23. 0	11.55.22.87	273,82	5,43	337. 0
16.10	8.38.18,66	301,13	4,01	343.50	23.10	11.59.56,69	273,06	5,46	336.50
16.20	8.43.19.79	300,55	4,05	343.40	23.20	12. 4.29.75	272,32	5,50	336.40
16.30	8.48.20,34	299,96	4,08	343.30	23.30	12. 9. 2,07	271,55	5,53	336.30
16.40	8.53.20,30	299,38	4.12	343.20	23.40	12.13.33,62	270.80	5,56	336.20
16.50	8.58.19,68	298,79	4,16	343.10	23.50	12.18. 4,42	270,03	5,59	336.10
17. 0	9. 3.18,47	298,19	4.20	343. 0	24. 0	12.22.34,45	269,27	5,63	336. 0
17.10	9. 8.16,66	297,59	4.23	342.50	24.10	12.27. 3,72	268,49	5,66	335.50
17.20	9.13.14,25	296,98	4,27	342.40	24.20	12.31.32,21	267,72	5,69	335.40
17.30	9.18.11,23	296,38	4,31	342.30	24.30	12.35.59,93	266,94	5,72	335.30
17.40	9.23. 7,61	295,76	4,34	342.20	24.40	12.40.26,87	266,16	5,74	335.20
17.50	9.28. 3,37	295,14	4,38	342.10	24.50	12.44.53,03	265,38	5,77	335.10
18. 0	9.32.58,51	294,52	4,42	342. 0	25. 0	12.49.18,41	264,59	5.80	335. 0
18.10	9.37.53,03	293,88	4,45	341.50	25.10	12.53.43,00	263,80	5,83	334.50
18.20	9.42.46.91	293,25	4,49	341.40	25.20	12.58. 6,80	263,01	5,86	334.40
18.30	9.47.40,16	292,61	4,52	341.30	25.30	13. 2.29,81	262,21	5,89	334.30
18.40	9.52.32,77	291,97	4,56	341.20	25.40	13. 6.52.02	261.41	5,92	334.20
18.50	9.57.24,74	291,32	4,59	341.10	25.50	13.11.13,43	260.61	5.95	334.10
19. 0	10. 2.16,06	290,67	4,63	341. 0	26. 0	13.15.34,04	259.81	5,98	334. 0
19.10	10. 7. 6,73	290.02	4.66	340.50	26.10	13.19.53.85	259.00	6.01	333.50
19.20	10.11.56,75	289,36	4,70	340.40	26.20	13.24.12,85	258,18	6,04	333.40
19.30	10.16.46,11	288,68	4,73	340.30	26.30	13.28.31,03	257,37	6.07	333.30
19.40	10.21.34,79	288,02	4,77	340.20	26.40	13.32.48,40	256,56	6,10	333.20
19.50	10.26.22.81	287,36	4,80	340.10	26.50	13.37. 4,96	255,73	6,13	333.10
20. 0	10.31.10,17	286,67	4,84	340. 0	27. 0	13.41.20,69	254,92	6,16	333. 0
20.10	10.35.56,84	286,00	4.87	339.50	27.10	13.45.35.61	254,08	6,18	332.50
20.20	10.40.42,84	285,31	4,91	339.40	27.20	13.49.49,69	253.26	6,21	332.40
20.30	10.45.28,15	284,61	4,94	339.30	27.30	13.54. 2,95	252,43	6,24	332.30
20.40	10.50.12,76	283,93	4,98	339.20	27.40	13.58.15.38	251,59	6,27	332.20
20.50	10.54.56.69	283,23	5,01	339.10	27.50	14. 2.26,97	250,76	6,29	332.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
28°. 0′	14°. 6′.37″,73	249″,92	6″,32	332°. 0′	35°. 0′	16°.49′. 4″,45	212″,76	7″,32	325°. 0′
28.10	14.10.47,65	249,08	6,35	331.50	35.10	16.52.37,21	211,84	7,34	324.50
28.20	14.14.56,73	248,23	6,37	331.40	35.20	16.56. 9,05	210,92	7,36	324.40
28.30	14.19. 4,96	247,38	6,40	331.30	35.30	16.59.39,97	210,00	7,38	324.30
28.40	14.23.12,34	246,54	6,43	331.20	35.40	17. 3. 9,97	209,08	7,40	324.20
28.50	14.27.18,88	245,69	6,45	331.10	35.50	17. 6.39,05	208,15	7,42	324.10
29. 0	14.31.24,57	244,83	6,48	331. 0	36. 0	17.10. 7,20	207,22	7,44	324. 0
29.10	14.35.29,40	243,97	6,51	330.50	36.10	17.13.34,42	206,30	7,46	323.50
29.20	14.39.33,37	243,12	6,53	330.40	36.20	17.17. 0,72	205,36	7,48	323.40
29.30	14.43.36,49	242,26	6,56	330.30	36.30	17.20.26,08	204,44	7,50	323.30
29.40	14.47.38,75	241,40	6,59	330.20	36.40	17.23.50,52	203,51	7,52	323.20
29.50	14.51.40,15	240,53	6,61	330.10	36.50	17.27.14,03	202,57	7,53	323.10
30. 0	14.55.40,68	239,66	6,64	330. 0	37. 0	17.30.36,60	201,64	7,55	323. 0
30.10	14.59.40,34	238,80	6,66	329.50	37.10	17.33.58,24	200,71	7,57	322.50
30.20	15. 3.39,14	237,92	6,69	329.40	37.20	17.37.18,95	199,77	7,59	322.40
30.30	15. 7.37,06	237,05	6,71	329.30	37.30	17.40.38,72	198,84	7,61	322.30
30.40	15.11.34,11	236,17	6,74	329.20	37.40	17.43.57,56	197,90	7,63	322.20
30.50	15.15.30,28	235,30	6,76	329.10	37.50	17.47.15,46	196,96	7,64	322.10
31. 0	15.19.25,58	234,41	6,78	329. 0	38. 0	17.50.32,42	196,03	7,66	322. 0
31.10	15.23.19,99	233,53	6,81	328.50	38.10	17.53.48,45	195,08	7,68	321.50
31.20	15.27.13,52	232,65	6,83	328.40	38.20	17.57. 3,53	194,15	7,70	321.40
31.30	15.31. 6,17	231,76	6,85	328.30	38.30	18. 0.17,68	193,20	7,72	321.30
31.40	15.34.57,93	230,88	6,88	328.20	38.40	18. 3.30,88	192,27	7,74	321.20
31.50	15.38.48,81	229,99	6,90	328.10	38.50	18. 6.43,15	191,32	7,75	321.10
32. 0	15.42.38,80	229,09	6,92	328. 0	39. 0	18. 9.54,47	190,38	7,77	321. 0
32.10	15.46.27,89	228,19	6,95	327.50	39.10	18.13. 4,85	189,43	7,79	320.50
32.20	15.50.16,08	227,30	6,97	327.40	39.20	18.16.14,28	188,50	7,80	320.40
32.30	15.54. 3,38	226,41	6,99	327.30	39.30	18.19.22,78	187,54	7,82	320.30
32.40	15.57.49,79	225,51	7,02	327.20	39.40	18.22.30,32	186,61	7,83	320.20
32.50	16. 1.35,30	224,61	7,04	327.10	39.50	18.25.36,93	185,65	7,85	320.10
33. 0	16. 5.19,91	223,71	7,07	327. 0	40. 0	18.28.42,58	184,71	7,87	320. 0
33.10	16. 9. 3,62	222,81	7,09	326.50	40.10	18.31.47,29	183,77	7,88	319.50
33.20	16.12.46,43	221,90	7,11	326.40	40.20	18.34.51,06	182,82	7,90	319.40
33.30	16.16.28,33	220,99	7,13	326.30	40.30	18.37.53,88	181,87	7,91	319.30
33.40	16.20. 9,32	220,09	7,15	326.20	40.40	18.40.55,75	180,92	7,93	319.20
33.50	16.23.49,41	219,17	7,17	326.10	40.50	18.43.56,67	179,97	7,94	319.10
34. 0	16.27.28,58	218,26	7,19	326. 0	41. 0	18.46.56,64	179,03	7,96	319. 0
34.10	16.31. 6,84	217,35	7,21	325.50	41.10	18.49.55,67	178,08	7,97	318.50
34.20	16.34.44,19	216,44	7,23	325.40	41.20	18.52.53,75	177,13	7,99	318.40
34.30	16.38.20,63	215,52	7,26	325.30	41.30	18.55.50,88	176,17	8,01	318.30
34.40	16.41.56,15	214,61	7,28	325.20	41.40	18.58.47,05	175,23	8,02	318.20
34.50	16.45.30,76	213,69	7,30	325.10	41.50	19. 1.42,28	174,28	8,04	318.10

VI. — Longitude. — *Equation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
42. 0	19. 4.36,56	173,33	8,05	318. 0	49. 0	20.52.18,16	133,48	8,50	311. 0
42.10	19. 7.29,89	172,38	8,06	317.50	49.10	20.54.31,64	132,54	8,51	310.50
42.20	19.10.22,27	171,42	8,08	317.40	49.20	20.56.44,18	131,61	8,52	310.40
42.30	19.13.13,69	170,48	8,09	317.30	49.30	20.58.55,79	130,66	8,53	310.30
42.40	19.16. 4,17	169,52	8,10	317.20	49.40	21. 1. 6,45	129,71	8,53	310.20
42.50	19.18.53,69	168,58	8,11	317.10	49.50	21. 3.16,16	128,78	8,54	310.10
43. 0	19.21.42,27	167,62	8,13	317. 0	50. 0	21. 5.24,94	127,84	8,55	310. 0
43.10	19.24.29,89	166,67	8,14	316.50	50.10	21. 7.32,78	126,91	8,56	309.50
43.20	19.27.16,56	165,72	8,15	316.40	50.20	21. 9.39,69	125,98	8,56	309.40
43.30	19.30. 2,28	164,77	8,16	316.30	50.30	21.11.45,67	125,04	8,57	309.30
43.40	19.32.47,05	163,81	8,18	316.20	50.40	21.13.50,71	124,10	8,58	309.20
43.50	19.35.30,86	162,87	8,19	316.10	50.50	21.15.54,81	123,16	8,59	309.10
44. 0	19.38.13,73	161,91	8,20	316. 0	51. 0	21.17.57,97	122,23	8,59	309. 0
44.10	19.40.55,64	160,96	8,21	315.50	51.10	21.20. 0,20	121,30	8,60	308.50
44.20	19.43.36,60	160,02	8,23	315.40	51.20	21.22. 1,50	120,37	8,61	308.40
44.30	19.46.16,62	159,06	8,24	315.30	51.30	21.24. 1,87	119,43	8,61	308.30
44.40	19.48.55,68	158,11	8,25	315.20	51.40	21.26. 1,30	118,50	8,62	308.20
44.50	19.51.33,79	157,15	8,26	315.10	51.50	21.27.59,80	117,58	8,62	308.10
45. 0	19.54.10,94	156,21	8,27	315. 0	52. 0	21.29.57,38	116,64	8,63	308. 0
45.10	19.56.47,15	155,26	8,28	314.50	52.10	21.31.54,02	115,72	8,63	307.50
45.20	19.59.22,41	154,31	8,30	314.40	52.20	21.33.49,74	114,79	8,64	307.40
45.30	20. 1.56,72	153,36	8,31	314.30	52.30	21.35.44,53	113,87	8,65	307.30
45.40	20. 4.30,08	152,40	8,32	314.20	52.40	21.37.38,40	112,94	8,65	307.20
45.50	20. 7. 2,48	151,46	8,33	314.10	52.50	21.39.31,34	112,01	8,66	307.10
46. 0	20. 9.33,94	150,51	8,34	314. 0	53. 0	21.41.23,35	111,09	8,66	307. 0
46.10	20.12. 4,45	149,56	8,35	313.50	53.10	21.43.14,44	110,17	8,67	306.50
46.20	20.14.34,01	148,61	8,36	313.40	53.20	21.45. 4,61	109,25	8,68	306.40
46.30	20.17. 2,62	147,66	8,37	313.30	53.30	21.46.53,86	108,33	8,68	306.30
46.40	20.19.30,28	146,72	8,38	313.20	53.40	21.48.42,19	107,41	8,69	306.20
46.50	20.21.57,00	145,77	8,39	313.10	53.50	21.50.29,60	106,49	8,69	306.10
47. 0	20.24.22,77	144,82	8,40	313. 0	54. 0	21.52.16,09	105,57	8,70	306. 0
47.10	20.26.47,59	143,87	8,41	312.50	54.10	21.54. 1,66	104,65	8,70	305.50
47.20	20.29.11,46	142,92	8,42	312.40	54.20	21.55.46,31	103,74	8,71	305.40
47.30	20.31.34,38	141,98	8,43	312.30	54.30	21.57.30,05	102,83	8,71	305.30
47.40	20.33.56,36	141,03	8,44	312.20	54.40	21.59.12,88	101,91	8,71	305.20
47.50	20.36.17,39	140,08	8,45	312.10	54.50	22. 0.54,79	101,00	8,72	305.10
48. 0	20.38.37,47	139,14	8,46	312. 0	55. 0	22. 2.35,79	100,08	8,72	305. 0
48.10	20.40.56,61	138,20	8,47	311.50	55.10	22. 4.15,87	99,18	8,72	304.50
48.20	20.43.14,81	137,25	8,47	311.40	55.20	22. 5.55,05	98,27	8,73	304.40
48.30	20.45.32,06	136,31	8,48	311.30	55.30	22. 7.33,32	97,36	8,73	304.30
48.40	20.47.48,37	135,37	8,49	311.20	55.40	22. 9.10,68	96,45	8,73	304.20
48.50	20.50. 3,74	134,42	8,50	311.10	55.50	22.10.47,13	95,55	8,74	304.10

VI. — LONGITUDE. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne	Équation du centre	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
56° 0′	22°12′22″,68	94″,64	8″,74	304° 0′	63° 0′	23° 5′53″,72	57″,77	8″,79	297° 0′
56.10	22.13.57,32	93,74	8,74	303.50	63.10	23. 6.51,49	56,93	8,79	296.50
56.20	22.15.31,06	92,83	8,74	303.40	63.20	23. 7.48,42	56,08	8,78	296.40
56.30	22.17. 3,89	91,94	8,75	303.30	63.30	23. 8.44,50	55,23	8,78	296.30
56.40	22.18.35,83	91,03	8,75	303.20	63.40	23. 9.39,73	54,39	8,78	296.20
56.50	22.20. 6,86	90,14	8,75	303.10	63.50	23.10.34,12	53,54	8,78	296.10
57. 0	22.21.37,00	89,24	8,76	303. 0	64. 0	23.11.27,66	52,71	8,78	296. 0
57.10	22.23. 6,24	88,34	8,76	302.50	64.10	23.12.20,37	51,87	8,78	295.50
57.20	22.24.34,58	87,44	8,76	302.40	64.20	23.13.12,24	51,03	8,77	295.40
57.30	22.26. 2,02	86,55	8,76	302.30	64.30	23.14. 3,27	50,19	8,77	295.30
57.40	22.27.28,57	85,66	8,77	302.20	64.40	23.14.53,46	49,36	8,77	295.20
57.50	22.28.54,23	84,77	8,77	302.10	64.50	23.15.42,82	48,52	8,77	295.10
58. 0	22.30.19,00	83,87	8,77	302. 0	65. 0	23.16.31,34	47,69	8,77	295. 0
58.10	22.31.42,87	82,99	8,77	301.50	65.10	23.17.19,03	46,86	8,77	294.50
58.20	22.33. 5,86	82,09	8,77	301.40	65.20	23.18. 5,89	46,03	8,76	294.40
58.30	22.34.27,95	81,21	8,77	301.30	65.30	23.18.51,92	45,20	8,76	294.30
58.40	22.35.49,16	80,33	8,77	301.20	65.40	23.19.37,12	44,38	8,76	294.20
58.50	22.37. 9,49	79,44	8,78	301.10	65.50	23.20.21,50	43,56	8,76	294.10
59. 0	22.38.28,93	78,55	8,78	301. 0	66. 0	23.21. 5,06	42,73	8,76	294. 0
59.10	22.39.47,48	77,68	8,78	300.50	66.10	23.21.47,79	41,91	8,75	293.50
59.20	22.41. 5,16	76,79	8,78	300.40	66.20	23.22.29,70	41,09	8,75	293.40
59.30	22.42.21,95	75,92	8,78	300.30	66.30	23.23.10,79	40,28	8,75	293.30
59.40	22.43.37,87	75,04	8,78	300.20	66.40	23.23.51,07	39,45	8,74	293.20
59.50	22.44.52,91	74,17	8,79	300.10	66.50	23.24.30,52	38,65	8,74	293.10
60. 0	22.46. 7,08	73,28	8,79	300. 0	67. 0	23.25. 9,17	37,82	8,74	293. 0
60.10	22.47.20,36	72,42	8,79	299.50	67.10	23.25.46,99	37,02	8,73	292.50
60.20	22.48.32,78	71,54	8,79	299.40	67.20	23.26.24,01	36,21	8,73	292.40
60.30	22.49.44,32	70,67	8,79	299.30	67.30	23.27. 0,22	35,39	8,73	292.30
60.40	22.50.54,99	69,80	8,79	299.20	67.40	23.27.35,61	34,59	8,72	292.20
60.50	22.52. 4,79	68,94	8,79	299.10	67.50	23.28.10,20	33,79	8,72	292.10
61. 0	22.53.13,73	68,07	8,79	299. 0	68. 0	23.28.43,99	32,98	8,72	292. 0
61.10	22.54.21,80	67,20	8,79	298.50	68.10	23.29.16,97	32,18	8,72	291.50
61.20	22.55.29,00	66,34	8,79	298.40	68.20	23.29.49,15	31,38	8,71	291.40
61.30	22.56.35,34	65,47	8,79	298.30	68.30	23.30.20,53	30,58	8,71	291.30
61.40	22.57.40,81	64,61	8,79	298.20	68.40	23.30.51,11	29,77	8,71	291.20
61.50	22.58.45,42	63,75	8,79	298.10	68.50	23.31.20,88	28,98	8,70	291.10
62. 0	22.59.49,17	62,90	8,79	298. 0	69. 0	23.31.49,86	28,19	8,70	291. 0
62.10	23. 0.52,07	62,04	8,79	297.50	69.10	23.32.18,05	27,40	8,69	290.50
62.20	23. 1.54,11	61,18	8,79	297.40	69.20	23.32.45,45	26,61	8,69	290.40
62.30	23. 2.55,29	60,33	8,79	297.30	69.30	23.33.12,06	25,82	8,69	290.30
62.40	23. 3.55,62	59,47	8,79	297.20	69.40	23.33.37,88	25,03	8,68	290.20
62.50	23. 4.55,09	58,63	8,79	297.10	69.50	23.34. 2,91	24,25	8,68	290.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centrè.	Diff.	Variation seculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
70°. 0′	23°.34′.27″,16	23″,46	8″,67	290°. 0′	77°. 0′	23°.39′.57″,59	7″,99	8″,43	283°. 0′
70.10	23.34.50,62	22,67	8,67	289.50	77.10	23.39.49,60	8,71	8,43	282.50
70.20	23.35.13,29	21,90	8,67	289.40	77.20	23.39.40,89	9,41	8,42	282.40
70.30	23.35.35,19	21,12	8,66	289.30	77.30	23.39.31,48	10,13	8,41	282.30
70.40	23.35.56,31	20,34	8,66	289.20	77.40	23.39.21,35	10,83	8,40	282.20
70.50	23.36.16,65	19,57	8,65	289.10	77.50	23.39.10,52	11,54	8.40	282.10
71. 0	23.36.36,22	18,79	8,65	289. 0	78. 0	23.38.58 98	12,24	8,39	282. 0
71.10	23.36.55,01	18,02	8,64	288.50	78.10	23.38.46,74	12,95	8,38	281.50
71.20	23.37.13,03	17,25	8,64	288.40	78.20	23.38.33,79	13,65	8.38	281.40
71.30	23.37.30,28	16,48	8,64	288.30	78.30	23.38.20,14	14,35	8,37	281.30
71.40	23.37.46,76	15,71	8,63	288.20	78.40	23.38. 5,79	15,04	8,36	281.20
71.50	23.38. 2,47	14,94	8,63	288.10	78.50	23.37.50,75	15,74	8,35	281.10
72. 0	23.38.17,41	14,18	8,62	288. 0	79. 0	23.37.35,01	16,44	8,35	281. 0
72.10	23.38.31,59	13,41	8,62	287.50	79.10	23.37.18,57	17,13	8,34	280.50
72.20	23.38.45,00	12,65	8,61	287.40	79.20	23.37. 1,44	17,82	8,33	280.40
72.30	23.38.57,65	11,90	8,60	287.30	79.30	23.36.43,62	18,51	8,32	280.30
72.40	23.39. 9,55	11,14	8,60	287.20	79.40	23.36.25,11	19,20	8,32	280.20
72.50	23.39.20,69	10,38	8,59	287.10	79.50	23.36. 5.91	19,88	8,31	280.10
73. 0	23.39.31,07	9,63	8,59	287. 0	80. 0	23.35.46,03	20,57	8.30	280. 0
73.10	23.39.40,70	8,87	8,58	286.50	80.10	23.35.25,46	21,25	8,29	279.50
73.20	23.39.49,57	8,12	8,58	286.40	80.20	23.35. 4.21	21.93	8,29	279.40
73.30	23.39.57,69	7,37	8,57	286.30	80.30	23.34.42,28	22,62	8,28	279.30
73.40	23.40. 5,06	6,62	8,56	286.20	80.40	23.34.19,66	23,29	8,27	279.20
73.50	23.40.11,68	5,88	8.56	286.10	80.50	23.33.56,37	23,96	8,26	279.10
74. 0	23.40.17,56	5,13	8,55	286. 0	81. 0	23.33.32,41	24,64	8,25	279. 0
74.10	23.40.22,69	4,39	8,55	285.50	81.10	23.33. 7,77	25,31	8,25	278.50
74.20	23.40.27,08	3,64	8,54	285.40	81.20	23.32.42,46	25,99	8,24	278.40
74.30	23.40.30,72	2.91	8,53	285.30	81.30	23.32.16,47	26,65	8,23	278.30
74.40	23.40.33,63	2,17	8,53	285.20	81.40	23.31.49,82	27,32	8,22	278.20
74.50	23.40.35,80	1,44	8,52	285.10	81.50	23.31.22,50	27,99	8,21	278.10
75. 0	23.40.37,24	0,70	8,52	285. 0	82. 0	23.30.54,51	28,65	8.20	278. 0
75.10	23.40.37,94	0,04	8,51	284.50	82.10	23.30.25,86	29,31	8,20	277.50
75.20	23.40.37,90	0,77	8,50	284.40	82.20	23.29.56,55	29,98	8,19	277.40
75.30	23.40.37,13	1,50	8,49	284.30	82.30	23.29.26,57	30.63	8,18	277.30
75.40	23.40.35,63	2,22	8,49	284.20	82.40	23.28.55,94	31,29	8,17	277.20
75.50	23.40.33,41	2,95	8.48	284.10	82.50	23.28.24,65	31,95	8.16	277.10
76. 0	23.40.30,46	3,68	8.47	284. 0	83. 0	23.27.52,70	32,60	8.15	277. 0
76.10	23.40.26,78	4,40	8,47	283.50	83.10	23.27.20,10	33,25	8.14	276.50
76.20	23.40.22,38	5,12	8,46	283.40	83.20	23.26.46,85	33,91	8,14	276.40
76.30	23.40.17,26	5,84	8,45	283.30	83.30	23.26.12,94	34,56	8,13	276.30
76.40	23.40.11,42	6,56	8,45	283.20	83.40	23.25.38,38	35,20	8.12	276.20
76.50	23.40. 4,86	7,27	8,44	283.10	83.50	23.25. 3,18	35,85	8,11	276.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre	Diff.	Variation seculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation seculaire.	Anomalie moyenne
84°. 0'	23°.24'.27",33	36",49	8",10	276°. 0'	91°. 0'	22°.50'. 0",15	62",08	7",67	269°. 0'
84.10	23.23.50,84	37,14	8,09	275.50	91.10	22.48.58,07	62,65	7,66	268.50
84.20	23.23.13,70	37,77	8,08	275.40	91.20	22.47.55,42	63,23	7,65	268.40
84.30	23.22.35,93	38,42	8,07	275.30	91.30	22.46.52,19	63,80	7,65	268.30
84.40	23.21.57,51	39,05	8,06	275.20	91.40	22.45.48,39	64,37	7,64	268.20
84.50	23.21.18,46	39,69	8,05	275.10	91.50	22.44.44,02	64,93	7,62	268.10
85. 0	23.20.38,77	40,32	8,04	275. 0	92. 0	22.43.39,09	65,50	7,61	268. 0
85.10	23.19.58,45	40,96	8,03	274.50	92.10	22.42.33,59	66,07	7,60	267.50
85.20	23.19.17,49	41,59	8,02	274.40	92.20	22.41.27,52	66,63	7,59	267.40
85.30	23.18.35,90	42,21	8,01	274.30	92.30	22.40.20,89	67,20	7,58	267.30
85.40	23.17.53,69	42,85	8,00	274.20	92.40	22.39.13,69	67,76	7,57	267.20
85.50	23.17.10,84	43,47	7,99	274.10	92.50	22.38. 5,93	68,31	7,56	267.10
86. 0	23.16.27,37	44,09	7,98	274. 0	93. 0	22.36.57,62	68,87	7,55	267. 0
86.10	23.15.43,28	44,72	7,97	273.50	93.10	22.35.48,75	69,42	7,54	266.50
86.20	23.14.58,56	45,33	7,96	273.40	93.20	22.34.39,33	69,98	7,53	266.40
86.30	23.14.13,23	45,96	7,96	273.30	93.30	22.33.29,35	70,53	7,52	266.30
86.40	23.13.27,27	46,58	7,95	273.20	93.40	22.32.18,82	71,09	7,50	266.20
86.50	23.12.40,69	47,19	7,94	273.10	93.50	22.31. 7,73	71,63	7,49	266.10
87. 0	23.11.53,50	47,80	7,93	273. 0	94. 0	22.29.56,10	72,18	7,48	266. 0
87.10	23.11. 5,70	48,42	7,92	272.50	94.10	22.28.43,92	72,72	7,47	265.50
87.20	23.10.17,28	49,04	7,91	272.40	94.20	22.27.31,20	73,27	7,46	265.40
87.30	23. 9.28,24	49,64	7,90	272.30	94.30	22.26.17,93	73,81	7,45	265.30
87.40	23. 8.38,60	50,25	7,89	272.20	94.40	22.25. 4,12	74,36	7,44	265.20
87.50	23. 7.48,35	50,86	7,88	272.10	94.50	22.23.49,76	74,90	7,43	265.10
88. 0	23. 6.57,49	51,46	7,87	272. 0	95. 0	22.22.34,86	75,43	7,41	265. 0
88.10	23. 6. 6,03	52,07	7,86	271.50	95.10	22.21.19,43	75,97	7,40	264.50
88.20	23. 5.13,96	52,66	7,85	271.40	95.20	22.20. 3,46	76,50	7,39	264.40
88.30	23. 4.21,30	53,27	7,83	271.30	95.30	22.18.46,96	77,04	7,38	264.30
88.40	23. 3.28,03	53,87	7,82	271.20	95.40	22.17.29,92	77,57	7,37	264.20
88.50	23. 2.34,16	54,46	7,81	271.10	95.50	22.16.12,35	78,10	7,36	264.10
89. 0	23. 1.39,70	55,06	7,80	271. 0	96. 0	22.14.54,25	78,63	7,35	264. 0
89.10	23. 0.44,64	55,65	7,79	270.50	96.10	22.13.35,62	79,16	7,33	263.50
89.20	22.59.48,99	56,25	7,78	270.40	96.20	22.12.16,46	79,69	7,32	263.40
89.30	22.58.52,74	56,83	7,77	270.30	96.30	22.10.56,77	80,21	7,31	263.30
89.40	22.57.55,91	57,43	7,76	270.20	96.40	22. 9.36,56	80,73	7,30	263.20
89.50	22.56.58,48	58,01	7,75	270.10	96.50	22. 8.15,83	81,26	7,28	263.10
90. 0	22.56. 0,47	58,59	7,74	270. 0	97. 0	22. 6.54,57	81,78	7,27	263. 0
90.10	22.55. 1,88	59,18	7,72	269.50	97.10	22. 5.32,79	82,29	7,26	262.50
90.20	22.54. 2,70	59,77	7,71	269.40	97.20	22. 4.10,50	82,81	7,25	262.40
90.30	22.53. 2,93	60,35	7,70	269.30	97.30	22. 2.47,69	83,33	7,24	262.30
90.40	22.52. 2,58	60,93	7,69	269.20	97.40	22. 1.24,36	83,85	7,22	262.20
90.50	22.51. 1,65	61,50	7,68	269.10	97.50	22. 0. 0,51	84,35	7,21	262.10

VI. — LONGITUDE. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
98°. 0′	21°.58′.36″,16	84″,86	7″,20	262°. 0′	105°. 0′	20°.52′. 9″,77	105″,02	6″,67	255°. 0′
98.10	21.57.11,30	85,38	7,19	261.50	105.10	20.50.24,75	105,47	6,66	254.50
98.20	21.55.45,92	85,88	7,17	261.40	105.20*	20.48.39,28	105,91	6,64	254.40
98.30	21.54.20,04	86,39	7,16	261.30	105.30	20.46.53,37	106,36	6,63	254.30
98.40	21.52.53,65	86,90	7,15	261.20	105.40	20.45. 7,01	106,80	6,62	254.20
98.50	21.51.26,75	87,39	7,14	261.10	105.50	20.43.20,21	107,25	6,60	254.10
99. 0	21.49.59,36	87,90	7,12	261. 0	106. 0	20.41.32,96	107,69	6,59	254. 0
99.10	21.48.31,46	88,40	7,11	260.50	106.10	20.39.45,27	108,13	6,58	253.50
99.20	21.47. 3,06	88,90	7,10	260.40	106.20	20.37.57,14	108,58	6,57	253.40
99.30	21.45.34,16	89,40	7,09	260.30	106.30	20.36. 8,56	109,01	6,55	253.30
99.40	21.44. 4,76	89,90	7,07	260.20	106.40	20.34.19,55	109,44	6,54	253.20
99.50	21.42.34,86	90,39	7,06	260.10	106.50	20.32.30,11	109,88	6,53	253.10
100. 0	21.41. 4,47	90,89	7,05	260. 0	107. 0	20.30.40,23	110,32	6,51	253. 0
100.10	21.39.33,58	91,37	7,04	259.50	107.10	20.28.49,91	110,75	6,50	252.50
100.20	21.38. 2,21	91,87	7,03	259.40	107.20	20.26.59,16	111,18	6,49	252.40
100.30	21.36.30,34	92,36	7,01	259.30	107.30	20.25. 7,98	111,61	6,48	252.30
100.40	21.34.57,98	92,84	7,00	259.20	107.40	20.23.16,37	112,04	6,46	252.20
100.50	21.33.25,14	93,33	6,99	259.10	107.50	20.21.24,33	112,46	6,45	252.10
101. 0	21.31.51,81	93,82	6,98	259. 0	108. 0	20.19.31,87	112,89	6,44	252. 0
101.10	21.30.17,99	94,30	6,96	258.50	108.10	20.17.38,98	113,31	6,42	251.50
101.20	21.28.43,69	94,78	6,95	258.40	108.20	20.15.45,67	113,74	6,41	251.40
101.30	21.27. 8,91	95,26	6,94	258.30	108.30	20.13.51,93	114,16	6,40	251.30
101.40	21.25.33,65	95,74	6,93	258.20	108.40	20.11.57,77	114,57	6,38	251.20
101.50	21.23.57,91	96,22	6,91	258.10	108.50	20.10. 3,20	114,99	6,37	251.10
102. 0	21.22.21,69	96,69	6,90	258. 0	109. 0	20. 8. 8,21	115,41	6,36	251. 0
102.10	21.20.45,00	97,17	6,89	257.50	109.10	20. 6.12,80	115,83	6,34	250.50
102.20	21.19. 7,83	97,64	6,88	257.40	109.20	20. 4.16,97	116,25	6,33	250.40
102.30	21.17.30,19	98,11	6,86	257.30	109.30	20. 2.20,72	116,66	6,32	250.30
102.40	21.15.52,08	98,58	6,85	257.20	109.40	20. 0.24,06	117,07	6,30	250.20
102.50	21.14.13,50	99,05	6,84	257.10	109.50	19.58.26,99	117,48	6,29	250.10
103. 0	21.12.34,45	99,52	6,82	257. 0	110. 0	19.56.29,51	117,89	6,28	250. 0
103.10	21.10.54,93	99,99	6,81	256.50	110.10	19.54.31,62	118,30	6,26	249.50
103.20	21. 9.14,94	100,45	6,80	256.40	110.20	19.52.33,32	118,71	6,25	249.40
103.30	21. 7.34,49	100,91	6,79	256.30	110.30	19.50.34,61	119,11	6,24	249.30
103.40	21. 5.53,58	101,37	6,77	256.20	110.40	19.48.35,50	119,52	6,22	249.20
103.50	21. 4.12,22	101,84	6,76	256.10	110.50	19.46.35,98	119,92	6,21	249.10
104. 0	21. 2.30,37	102,30	6,75	256. 0	111. 0	19.44.36,06	120,32	6,20	249. 0
104.10	21. 0.48,07	102,75	6,73	255.50	111.10	19.42.35,74	120,72	6,18	248.50
104.20	20.59. 5,32	103,21	6,72	255.40	111.20	19.40.35,02	121,12	6,17	248.40
104.30	20.57.22,11	103,66	6,71	255.30	111.30	19.38.33,90	121,51	6,15	248.30
104.40	20.55.38,45	104,11	6,70	255.20	111.40	19.36.32,39	121,92	6,14	248.20
104.50	20.53.54,34	104,57	6,68	255.10	111.50	19.34.30,47	122,31	6,12	248.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
112° 0'	19° 32' 28",16	122",70	6",11	248° 0'	119° 0'	18° 1' 11",10	138",11	5",53	241° 0'
112.10	19.30.25,46	123,09	6,10	247.50	119.10	17.58.52,99	138,45	5,51	240.50
112.20	19.28.22,37	123,49	6,08	247.40	119.20	17.56.34,54	138,79	5,50	240.40
112.30	19.26.18,88	123.88	6,07	247.30	119.30	17.54.15,75	139,13	5,48	240.30
112.40	19.24.15,00	124,26	6,06	247.20	119.40	17.51.56,62	139,46	5,47	240.20
112.50	19.22.10,74	124,65	6,04	247.10	119.50	17.49.37,16	139,80	5,46	240.10
113. 0	19.20. 6,09	125,04	6,03	247. 0	120. 0	17.47.17,36	140,14	5,44	240. 0
113.10	19.18. 1,05	125,43	6,01	246.50	120.10	17.44.57,22	140,46	5,43	239.50
113.20	19.15.55,62	125,81	6,00	246.40	120.20	17.42.36,76	140,80	5,41	239.40
113.30	19.13.49,81	126,19	5,99	246.30	120.30	17.40.15,96	141.13	5,40	239.30
113.40	19.11.43,62	126,57	5,97	246.20	120.40	17.37.54,83	141,46	5,38	239.20
113.50	19. 9.37,05	126,95	5,96	246.10	120.50	17.35.33,37	141,78	5,37	239.10
114. 0	19. 7.30,10	127,33	5,94	246. 0	121. 0	17.33.11,59	142,12	5,35	239. 0
114.10	19. 5.22,77	127,71	5,93	245.50	121.10	17.30.49,47	142,44	5,34	238.50
114.20	19. 3.15,06	128,08	5,92	245.40	121.20	17.28.27,03	142,77	5,33	238.40
114.30	19. 1. 6,98	128,46	5,90	245.30	121.30	17.26. 4.26	143,09	5,31	238.30
114.40	18.58.58,52	128,83	5,89	245.20	121.40	17.23.41,17	143.41	5,30	238.20
114.50	18.56.49,69	129,21	5,87	245.10	121.50	17.21.17,76	143,74	5,28	238.10
115. 0	18.54.40,48	129,57	5,86	245. 0	122. 0	17.18.54.02	144,05	5,27	238. 0
115.10	18.52.30,91	129,95	5,85	244.50	122.10	17.16.29,97	144,38	5,25	237.50
115.20	18.50.20,96	130,31	5,83	244.40	122.20	17.14. 5,59	144,69	5,24	237.40
115.30	18.48.10,65	130,68	5.82	244.30	122.30	17.11.40,90	145,01	5,22	237.30
115.40	18.45.59.97	131,05	5,80	244.20	122.40	17. 9.15,89	145,33	5,21	237.20
115.50	18.43.48,92	131,41	5,79	244.10	122.50	17. 6.50,56	145,63	5,20	237.10
116. 0	18.41.37.51	131,78	5,78	244. 0	123. 0	17. 4.24,93	145,95	5,18	237. 0
116.10	18.39.25,73	132,14	5,76	243.50	123.10	17. 1.58,98	146,27	5,17	236.50
116.20	18.37.13,59	132,50	5,75	243.40	123.20	16.59.32,71	146,57	5,15	236.40
116.30	18.35. 1,09	132,86	5,73	243.30	123.30	16.57. 6,14	146,89	5,14	236.30
116.40	18.32.48,23	133,22	5,72	243.20	123.40	16.54.39,25	147,19	5.12	236.20
116.50	18.30.35,01	133,58	5,71	243.10	123.50	16.52.12,06	147,50	5.11	236.10
117. 0	18.28.21.43	133.93	5.69	243. 0	124. 0	16.49.44.56	147,81	5,09	236. 0
117.10	18.26. 7,50	134,29	5,68	242.50	124.10	16.47.16,75	148.11	5,08	235.50
117.20	18.23.53,21	134,64	5,66	242.40	124.20	16.44.48,64	148,42	5.07	235.40
117.30	18.21.38,57	134,99	5,65	242.30	124.30	16.42.20,22	148,72	5,05	235.30
117.40	18.19.23,58	135,34	5,64	242.20	124.40	16.39.51,50	149,03	5,04	235.20
117.50	18.17. 8,24	135,69	5,62	242.10	124.50	16.37.22,47	149,32	5,02	235.10
118. 0	18.14.52,55	136,04	5.61	242. 0	125. 0	16.34.53,15	149,62	5.01	235. 0
118.10	18.12.36,51	136,39	5,60	241.50	125.10	16.32.23,53	149,93	4.99	234.50
118.20	18.10.20,12	136,74	5,58	241.40	125.20	16.29.53,60	150,22	4,98	234.40
118.30	18. 8. 3,38	137,08	5,57	241.30	125.30	16.27.23,38	150,51	4,96	234.30
118.40	18. 5.46,30	137,43	5,55	241.20	125.40	16.24.52,87	150,81	4,95	234.20
118.50	18. 3.28,87	137,77	5.54	241.10	125.50	16.22.22,06	151,11	4,93	234.10

VI — Longitude — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Equation du centre.	Diff.	Variation seculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne	Équation du centre.	Diff.	Variation seculaire.	Anomalie moyenne
126°. 0′	16°.19′.50″,95	151″,40	4″,92	234°. 0′	133°. 0′	14°.29′.53″,42	162″,72	4″,30	227°. 0′
126.10	16.17.19,55	151,69	4,91	233.50	133.10	14.27.10,70	162,98	4,28	226.50
126.20	16.14.47,86	151,98	4,89	233.40	133.20	14.24.27,72	163,22	4,27	226.40
126.30	16.12.15,88	152,27	4,88	233.30	133.30	14.21.44,50	163,46	4,25	226.30
126.40	16. 9.43,61	152,56	4,86	233.20	133.40	14.19. 1,04	163,71	4,24	226.20
126.50	16. 7.11,05	152,84	4,85	233.10	133.50	14.16.17,33	163,95	4,22	226.10
127. 0	16. 4.38,21	153,13	4,83	233. 0	134. 0	14.13.33,38	164,19	4,21	226. 0
127.10	16. 2. 5,08	153,42	4,82	232.50	134.10	14.10.49,19	164,43	4,19	225.50
127.20	15.59.31,66	153,70	4,80	232.40	134.20	14. 8. 4,76	164,67	4,18	225.40
127.30	15.56.57,96	153,99	4,79	232.30	134.30	14. 5.20,09	164,91	4,16	225.30
127.40	15.54.23,97	154,27	4,77	232.20	134.40	14. 2.35,18	165,15	4,15	225.20
127.50	15.51.49,70	154,54	4,76	232.10	134.50	13.59.50,03	165,39	4,13	225.10
128. 0	15.49.15,16	154,83	4,75	232. 0	135. 0	13.57. 4,64	165,62	4,12	225. 0
128.10	15.46.40,33	155,11	4,73	231.50	135.10	13.54.19,02	165,85	4,10	224.50
128.20	15.44. 5,22	155,39	4,72	231.40	135.20	13.51.33,17	166,09	4,09	224.40
128.30	15.41.29,83	155,66	4,70	231.30	135.30	13.48.47,08	166,32	4,07	224.30
128.40	15.38.54,17	155,93	4,69	231.20	135.40	13.46. 0,76	166,56	4,06	224.20
128.50	15.36.18,24	156,21	4,67	231.10	135.50	13.43.14,20	166,78	4,04	224.10
129. 0	15.33.42,03	156,49	4,66	231. 0	136. 0	13.40.27,42	167,01	4,03	224. 0
129.10	15.31. 5,54	156,76	4,64	230.50	136.10	13.37.40,41	167,25	4,01	223.50
129.20	15.28.28,78	157,02	4,63	230.40	136.20	13.34.53,16	167,47	4,00	223.40
129.30	15.25.51,76	157,30	4,61	230.30	136.30	13.32. 5,69	167,70	3,98	223.30
129.40	15.23.14,46	157,57	4,60	230.20	136.40	13.29.17,99	167,92	3,97	223.20
129.50	15.20.36,89	157,83	4,58	230.10	136.50	13.26.30,07	168,14	3,95	223.10
130. 0	15.17.59,06	158,10	4,57	230. 0	137. 0	13.23.41,93	168,37	3,94	223. 0
130.10	15.15.20,96	158,37	4,55	229.50	137.10	13.20.53,56	168,59	3,92	222.50
130.20	15.12.42,59	158,63	4,54	229.40	137.20	13.18. 4,97	168,81	3,91	222.40
130.30	15.10. 3,96	158,90	4,52	229.30	137.30	13.15.16,16	169,04	3,89	222.30
130.40	15. 7.25,06	159,15	4,51	229.20	137.40	13.12.27,12	169,25	3,88	222.20
130.50	15. 4.45,91	159,42	4,49	229.10	137.50	13. 9.37,87	169,47	3,86	222.10
131. 0	15. 2. 6,49	159,68	4,48	229. 0	138. 0	13. 6.48,40	169,69	3,85	222. 0
131.10	14.59.26,81	159,94	4,46	228.50	138.10	13. 3.58,71	169,90	3,83	221.50
131.20	14.56.46,87	160,20	4,45	228.40	138.20	13. 1. 8,81	170,12	3,82	221.40
131.30	14.54. 6,67	160,46	4,43	228.30	138.30	12.58.18,69	170,34	3,80	221.30
131.40	14.51.26,21	160,71	4,42	228.20	138.40	12.55.28,35	170,55	3,79	221.20
131.50	14.48.45,50	160,97	4,40	228.10	138.50	12.52.37,80	170,76	3,77	221.10
132. 0	14.46. 4,53	161,22	4,39	228. 0	139. 0	12.49.47,04	170,98	3,76	221. 0
132.10	14.43.23,31	161,48	4,37	227.50	139.10	12.46.56,06	171,18	3,74	220.50
132.20	14.40.41,83	161,72	4,36	227.40	139.20	12.44. 4,88	171,40	3,73	220.40
132.30	14.38. 0,11	161,98	4,34	227.30	139.30	12.41.13,48	171,60	3,71	220.30
132.40	14.35.18,13	162,23	4,33	227.20	139.40	12.38.21,88	171,81	3,70	220.20
132.50	14.32.35,90	162,48	4,31	227.10	139.50	12.35.30,07	172,02	3,68	220.10

VI. — LONGITUDE. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne
140°. 0′	12°.32′.38″,05	172″,22	3″,67	220°. 0′	147°. 0′	10°.29′.19″,26	180″,01	3″,04	213°. 0′
140.10	12.29.45,83	172,43	3,65	219.50	147.10	10.26.19,25	180,17	3,02	212.50
140.20	12.26.53,40	172,63	3,64	219.40	147.20	10.23.19,08	180,34	3,00	212.40
140.30	12.24. 0,77	172,83	3,62	219.30	147.30	10.20.18,74	180,51	2,99	212.30
140.40	12.21. 7,94	173,04	3,61	219.20	147.40	10.17.18,23	180,67	2,97	212.20
140.50	12.18.14,90	173,24	3,59	219.10	147.50	10.14.17,56	180,82	2,96	212.10
141. 0	12.15.21,66	173,44	3,58	219. 0	148. 0	10.11.16,74	180,99	2,94	212. 0
141.10	12.12.28,22	173,63	3,56	218.50	148.10	10. 8.15,75	181,14	2,93	211.50
141.20	12. 9.34,59	173,84	3,55	218.40	148.20	10. 5.14,61	181,31	2,91	211.40
141.30	12. 6.40,75	174,03	3,53	218.30	148.30	10. 2.13,30	181,47	2,89	211.30
141.40	12. 3.46,72	174,23	3,52	218.20	148.40	9.59.11,83	181,62	2,88	211.20
141.50	12. 0.52,49	174,42	3,50	218.10	148.50	9.56.10,21	181,78	2,86	211.10
142. 0	11.57.58,07	174,62	3,49	218. 0	149. 0	9.53. 8,43	181,94	2,85	211. 0
142.10	11.55. 3,45	174,81	3,47	217.50	149.10	9.50. 6,49	182,09	2,83	210.50
142.20	11.52. 8,64	175,00	3,46	217.40	149.20	9.47. 4,40	182,24	2,82	210.40
142.30	11.49.13,64	175,20	3,44	217.30	149.30	9.44. 2,16	182,39	2,80	210.30
142.40	11.46.18,44	175,39	3,43	217.20	149.40	9.40.59,77	182,55	2,79	210.20
142.50	11.43.23,05	175,57	3,41	217.10	149.50	9.37.57,22	182,70	2,77	210.10
143. 0	11.40.27,48	175,77	3,40	217. 0	150. 0	9.34.54,52	182,85	2,75	210. 0
143.10	11.37.31,71	175,95	3,38	216.50	150.10	9.31.51,67	182,99	2,74	209.50
143.20	11.34.35,76	176,13	3,37	216.40	150.20	9.28.48,68	183,15	2,73	209.40
143.30	11.31.39,63	176,33	3,35	216.30	150.30	9.25.45,53	183,29	2,71	209.30
143.40	11.28.43,30	176,51	3,34	216.20	150.40	9.22.42,24	183,44	2,70	209.20
143.50	11.25.46,79	176,69	3,32	216.10	150.50	9.19.38,80	183,58	2,68	209.10
144. 0	11.22.50,10	176,87	3,31	216. 0	151. 0	9.16.35,22	183,73	2,67	209. 0
144.10	11.19.53,23	177,06	3,29	215.50	151.10	9.13.31,49	183,87	2,65	208.50
144.20	11.16.56,17	177,24	3,28	215.40	151.20	9.10.27,62	184,01	2,63	208.40
144.30	11.13.58,93	177,42	3,26	215.30	151.30	9. 7.23,61	184,16	2,62	208.30
144.40	11.11. 1,51	177,60	3,25	215.20	151.40	9. 4.19,45	184,30	2,60	208.20
144.50	11. 8. 3,91	177,77	3,23	215.10	151.50	9. 1.15,15	184,44	2,59	208.10
145. 0	11. 5. 6,14	177,95	3,22	215. 0	152. 0	8.58.10,71	184,57	2,57	208. 0
145.10	11. 2. 8,19	178,13	3,20	214.50	152.10	8.55. 6,14	184,72	2,56	207.50
145.20	10.59.10,06	178,31	3,19	214.40	152.20	8.52. 1,42	184,85	2,54	207.40
145.30	10.56.11,75	178,48	3,17	214.30	152.30	8.48.56,57	184,99	2,53	207.30
145.40	10.53.13,27	178,65	3,16	214.20	152.40	8.45.51,58	185,12	2,51	207.20
145.50	10.50.14,62	178,83	3,14	214.10	152.50	8.42.46,46	185,26	2,50	207.10
146. 0	10.47.15,79	178,99	3,13	214. 0	153. 0	8.39.41,20	185,39	2,48	207. 0
146.10	10.44.16,80	179,17	3,11	213.50	153.10	8.36.35,81	185,53	2,47	206.50
146.20	10.41.17,63	179,34	3,10	213.40	153.20	8.33.30,28	185,66	2,45	206.40
146.30	10.38.18,29	179,51	3,08	213.30	153.30	8.30.24,62	185,80	2,44	206.30
146.40	10.35.18,78	179,67	3,07	213.20	153.40	8.27.18,82	185,92	2,42	206.20
146.50	10.32.19,11	179,85	3,05	213.10	153.50	8.24.12,90	186,05	2,41	206.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
154. 0	8.21. 6,85	186,18	2,39	206. 0	161. 0	6. 9. 7,05	190,81	1,74	199. 0
154.10	8.18. 0,67	186,31	2,38	205.50	161.10	6. 5.56,24	190,91	1,72	198.50
154.20	8.14.54,36	186,43	2,36	205.40	161.20	6. 2.45,33	190,99	1,71	198.40
154.30	8.11.47,93	186,56	2,34	205.30	161.30	5.59.34,34	191,09	1,70	198.30
154.40	8. 8.41,37	186,69	2,33	205.20	161.40	5.56.23,25	191,17	1,68	198.20
154.50	8. 5.34,68	186,81	2,31	205.10	161.50	5.53.12,08	191,26	1,67	198.10
155. 0	8. 2.27,87	186,94	2,30	205. 0	162. 0	5.50. 0,82	191,35	1,65	198. 0
155.10	7.59.20,93	187,05	2,28	204.50	162.10	5.46.49,47	191,44	1,64	197.50
155.20	7.56.13,88	187,18	2,27	204.40	162.20	5.43.38,03	191,53	1,62	197.40
155.30	7.53. 6,70	187,30	2,25	204.30	162.30	5.40.26,50	191,61	1,61	197.30
155.40	7.49.59,40	187,42	2,24	204.20	162.40	5.37.14,89	191,69	1,59	197.20
155.50	7.46.51,98	187,54	2,22	204.10	162.50	5.34. 3,20	191,78	1,57	197.10
156. 0	7.43.44,44	187,66	2,20	204. 0	163. 0	5.30.51,42	191,86	1,56	197. 0
156.10	7.40.36,78	187,78	2,19	203.50	163.10	5.27.39,56	191,94	1,54	196.50
156.20	7.37.29,00	187,89	2,17	203.40	163.20	5.24.27,62	192,02	1,53	196.40
156.30	7.34.21,11	188,01	2,16	203.30	163.30	5.21.15,60	192,11	1,51	196.30
156.40	7.31.13,10	188,12	2,14	203.20	163.40	5.18. 3,49	192,18	1,50	196.20
156.50	7.28. 4,98	188,24	2,13	203.10	163.50	5.14.51,31	192,26	1,48	196.10
157. 0	7.24.56,74	188,35	2,11	203. 0	164. 0	5.11.39,05	192,34	1,47	196. 0
157.10	7.21.48,39	188,46	2,09	202.50	164.10	5. 8.26,71	192,42	1,45	195.50
157.20	7.18.39,93	188,57	2,08	202.40	164.20	5. 5.14,29	192,49	1,43	195.40
157.30	7.15.31,36	188,69	2,06	202.30	164.30	5. 2. 1,80	192,57	1,42	195.30
157.40	7.12.22,67	188,79	2,05	202.20	164.40	4.58.49,23	192,65	1,40	195.20
157.50	7. 9.13,88	188,91	2,03	202.10	164.50	4.55.36,58	192,72	1,39	195.10
158. 0	7. 6. 4,97	189,01	2,02	202. 0	165. 0	4.52.23,86	192,79	1,37	195. 0
158.10	7. 2.55,96	189,12	2,00	201.50	165.10	4.49.11,07	192,86	1,36	194.50
158.20	6.59.46,84	189,23	1,99	201.40	165.20	4.45.58,21	192,93	1,34	194.40
158.30	6.56.37,61	189,33	1,97	201.30	165.30	4.42.45,28	193,00	1,33	194.30
158.40	6.53.28,28	189,43	1,95	201.20	165.40	4.39.32,28	193,07	1,31	194.20
158.50	6.50.18,85	189,54	1,94	201.10	165.50	4.36.19,21	193,15	1,30	194.10
159. 0	6.47. 9,31	189,65	1,92	201. 0	166. 0	4.33. 6,06	193,21	1,28	194. 0
159.10	6.43.59,66	189,74	1,91	200.50	166.10	4.29.52,85	193,27	1,27	193.50
159.20	6.40.49,92	189,84	1,89	200.40	166.20	4.26.39,58	193,35	1,25	193.40
159.30	6.37.40,08	189,95	1,88	200.30	166.30	4.23.26,23	193,41	1,24	193.30
159.40	6.34.30,13	190,04	1,86	200.20	166.40	4.20.12,82	193,47	1,22	193.20
159.50	6.31.20,09	190,15	1,85	200.10	166.50	4.16.59,35	193,54	1,21	193.10
160. 0	6.28. 9,94	190,24	1,83	200. 0	167. 0	4.13.45,81	193,60	1,19	193. 0
160.10	6.24.59,70	190,34	1,82	199.50	167.10	4.10.32,21	193,66	1,18	192.50
160.20	6.21.49,36	190,44	1,80	199.40	167.20	4. 7.18,55	193,72	1,16	192.40
160.30	6.18.38,92	190,53	1,79	199.30	167.30	4. 4. 4,83	193,79	1,15	192.30
160.40	6.15.28,39	190,62	1,77	199.20	167.40	4. 0.51,04	193,84	1,13	192.20
160.50	6.12.17,77	190,72	1,76	199.10	167.50	3.57.37,20	193,91	1,12	192.10

VI. — Longitude. — *Équation du centre.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Équation du centre.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
168°. 0′	3°.54′.23″,29	193″,96	1″,10	192°. 0′	174°. 0′	1°.57′.30″,40	195″,51	0″,55	186°. 0′
168.10	3.51. 9,33	194,01	1,09	191.50	174.10	1.54.14,89	195,54	0,54	185.50
168.20	3.47.55,32	194,08	1,07	191.40	174.20	1.50.59,35	195,56	0,52	185.40
168.30	3.44.41,24	194,13	1,06	191.30	174.30	1.47.43,79	195,60	0,51	185.30
168.40	3.41.27,11	194,18	1,04	191.20	174.40	1.44.28,19	195,62	0,49	185.20
168.50	3.38.12,93	194,24	1,02	191.10	174.50	1.41.12,57	195,64	0,48	185.10
169. 0	3.34.58,69	194,30	1,01	191. 0	175. 0	1.37.56,93	195,67	0,46	185. 0
169.10	3.31.44,39	194,34	0,99	190.50	175.10	1.34.41,26	195,69	0,45	184.50
169.20	3.28.30,05	194,40	0,98	190.40	175.20	1.31.25,57	195,72	0,43	184.40
169.30	3.25.15,65	194,45	0,96	190.30	175.30	1.28. 9,85	195,74	0,42	184.30
169.40	3.22. 1,20	194,49	0,95	190.20	175.40	1.24.54,11	195,75	0,40	184.20
169.50	3.18.46,71	194,55	0,93	190.10	175.50	1.21.38,36	195,78	0,39	184.10
170. 0	3.15.32,16	194,59	0,92	190. 0	176. 0	1.18.22,58	195,80	0,37	184. 0
170.10	3.12.17,57	194,65	0,90	189.50	176.10	1.15. 6,78	195,82	0,36	183.50
170.20	3. 9. 2,92	194,69	0,88	189.40	176.20	1.11.50,96	195,83	0,34	183.40
170.30	3. 5.48,23	194,73	0,87	189.30	176.30	1. 8.35,13	195,85	0,33	183.30
170.40	3. 2.33,50	194,78	0,85	189.20	176.40	1. 5.19,28	195,87	0,31	183.20
170.50	2.59.18,72	194,83	0,84	189.10	176.50	1. 2. 3,41	195,88	0,30	183.10
171. 0	2.56. 3,89	194,87	0,82	189. 0	177. 0	0.58.47,53	195,89	0,28	183. 0
171.10	2.52.49,02	194,91	0,81	188.50	177.10	0.55.31,64	195,91	0,26	182.50
171.20	2.49.34,11	194,95	0,79	188.40	177.20	0.52.15,73	195,92	0,25	182.40
171.30	2.46.19,16	194,99	0,78	188.30	177.30	0.48.59,81	195,94	0,23	182.30
171.40	2.43. 4,17	195,03	0,76	188.20	177.40	0.45.43,87	195,94	0,22	182.20
171.50	2.39.49,14	195,08	0,75	188.10	177.50	0.42.27,93	195,95	0,20	182.10
172. 0	2.36.34,06	195,11	0,73	188. 0	178. 0	0.39.11,98	195,97	0,19	182. 0
172.10	2.33.18,95	195,15	0,72	187.50	178.10	0.35.56,01	195,97	0,17	181.50
172.20	2.30. 3,80	195,18	0,70	187.40	178.20	0.32.40,04	195,98	0,16	181.40
172.30	2.26.48,62	195,22	0,69	187.30	178.30	0.29.24,06	195,99	0,14	181.30
172.40	2.23.33,40	195,26	0,67	187.20	178.40	0.26. 8,07	195,99	0,12	181.20
172.50	2.20.18,14	195,30	0,66	187.10	178.50	0.22.52,08	196,00	0,11	181.10
173. 0	2.17. 2,84	195,33	0,64	187. 0	179. 0	0.19.36,08	196,01	0,09	181. 0
173.10	2.13.47,51	195,36	0,63	186.50	179.10	0.16.20,07	196,01	0,08	180.50
173.20	2.10.32,15	195,39	0,61	186.40	179.20	0.13. 4,06	196,01	0,06	180.40
173.30	2. 7.16,76	195,42	0,60	186.30	179.30	0. 9.48,05	196,01	0,05	180.30
173.40	2. 4. 1,34	195,45	0,58	186.20	179.40	0. 6.32,04	196,02	0,03	180.20
173.50	2. 0.45,89	195,49	0,57	186.10	179.50	0. 3.16,02	196,02	0,02	180.10
					180. 0	0. 0. 0,00		0,00	180. 0

VII. — LONGITUDE. — *Équation du centre.*

Seconde partie $= -\left\{ 0'',000\,001\,8 \sin\zeta + 0'',000\,000\,4 \sin 2\zeta \right\} t^2$.

On calculerait ce terme directement dans les cas exceptionnels où on le croirait utile.

VIII. — LONGITUDE. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument $\delta' = l' - l$.

ARGUM. $2\delta' + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta' + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta' + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta' + l$.	PERT.	DIFF.
0	+365		1000	−100		2000	−365		3000	+100	
100	345	−20	1100	−156	−56	2100	−345	+20	3100	156	+56
200	316	−29	1200	−208	−52	2200	−316	29	3200	208	52
300	280	−36	1300	−255	−47	2300	−280	36	3300	255	47
400	237	−43	1400	−296	−41	2400	−237	43	3400	296	41
500	188	−49	1500	−329	−33	2500	−188	49	3500	329	33
600	134	−54	1600	−354	−25	2600	−134	54	3600	354	25
700	77	−57	1700	−371	−17	2700	− 77	57	3700	371	17
800	+ 18	−59	1800	−378	− 7	2800	− 18	59	3800	378	+ 7
900	− 42	−60	1900	−376	+ 2	2900	+ 42	60	3900	376	− 2
1000	−100	−58	2000	−365	+11	3000	+100	+58	4000	+365	−11

IX. — LONGITUDE. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

ARGUM. $3\delta' + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $3\delta' + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $3\delta' + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $3\delta' + l$.	PERT.	DIFF.
0	+131		1000	− 40		2000	−131		3000	+ 40	
100	123	− 8	1100	− 60	−20	2100	−123	+ 8	3100	60	+20
200	112	−11	1200	− 79	−19	2200	−112	11	3200	79	19
300	99	−13	1300	− 95	−16	2300	− 99	13	3300	95	16
400	83	−16	1400	−109	−14	2400	− 83	16	3400	109	14
500	64	−19	1500	−121	−12	2500	− 64	19	3500	121	12
600	45	−19	1600	−130	− 9	2600	− 45	19	3600	130	9
700	24	−21	1700	−135	− 5	2700	− 24	21	3700	135	5
800	+ 3	−21	1800	−137	− 2	2800	− 3	21	3800	137	+ 2
900	− 19	−22	1900	−136	+ 1	2900	+ 19	22	3900	136	− 1
1000	− 40	−21	2000	−131	+ 5	3000	+ 40	+21	4000	+131	− 5

X. — Longitude. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

ARGUM. $5\delta' + 2l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\delta' + 2l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\delta' + 2l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\delta' + 2l$.	PERT.	DIFF.
0	+177	+33	1000	+224	−30	2000	−177	−33	3000	−224	+30
100	210	28	1100	194	−36	2100	−210	−28	3100	−194	36
200	238	21	1200	158	−39	2200	−238	−21	3200	−158	39
300	259	16	1300	119	−42	2300	−259	−16	3300	−119	42
400	275	9	1400	77	−44	2400	−275	− 9	3400	− 77	44
500	284	+ 1	1500	+ 33	−45	2500	−284	− 1	3500	− 33	45
600	285	− 5	1600	− 12	−44	2600	−285	+ 5	3600	+ 12	44
700	280	−12	1700	− 56	−43	2700	−280	12	3700	56	43
800	268	−19	1800	− 99	−41	2800	−268	19	3800	99	41
900	249	−25	1900	−140	−37	2900	−249	+25	3900	140	+37
1000	+224		2000	−177		3000	−224		4000	+177	

XI. — Longitude. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

ARGUM. $5\delta' + 3l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\delta' + 3l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\delta' + 3l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\delta' + 3l$.	PERT.	DIFF.
0	−427	+101	1000	+614	+59	2000	+427	−101	3000	−614	−59
100	−326	109	1100	673	43	2100	326	−109	3100	−673	−43
200	−217	115	1200	716	25	2200	217	−115	3200	−716	−25
300	−102	118	1300	741	+ 7	2300	+102	−118	3300	−741	− 7
400	+ 16	116	1400	748	−12	2400	− 16	−116	3400	−748	+12
500	132	114	1500	736	−30	2500	−132	−114	3500	−736	30
600	246	107	1600	706	−47	2600	−246	−107	3600	−706	47
700	353	99	1700	659	−63	2700	−353	− 99	3700	−659	63
800	452	88	1800	596	−78	2800	−452	− 88	3800	−596	78
900	540	+ 74	1900	518	−91	2900	−540	− 74	3900	−518	+91
1000	+614		2000	+427		3000	−614		4000	−427	

XII. — Longitude. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

ARGUM. $5\vartheta' + 4l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\vartheta' + 4l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\vartheta' + 4l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $5\vartheta' + 4l$.	PERT.	DIFF.
0	−141		1000	−51		2000	+141		3000	+51	
		−6			+23			+6			23
100	−147		1100	−28		2100	147		3100	28	
		−3			23			+3			−23
200	−150		1200	−5		2200	150		3200	+5	
		+1			24			−1			−24
300	−149		1300	+19		2300	149		3300	−19	
		5			23			−5			−23
400	−144		1400	42		2400	144		3400	−42	
		8			22			−8			−22
500	−136		1500	64		2500	136		3500	−64	
		12			20			−12			−20
600	−124		1600	84		2600	124		3600	−84	
		15			18			−15			−18
700	−109		1700	102		2700	109		3700	−102	
		17			16			−17			−16
800	−92		1800	118		2800	92		3800	−118	
		20			13			−20			−13
900	−72		1900	131		2900	72		3900	−131	
		+21			+10			−21			−10
1000	−51		2000	+141		3000	+51		4000	−141	

XIII. — Longitude. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ'.

Arg. *l'*	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	Arg. *l'*
0	− 59	−165	−244	286	−286	−249	−180	− 93	− 3	+ 75	+130	+160	+169	+166	+161	0
100	− 94	−204	−283	−316	−303	−251	−168	− 73	+ 19	93	142	164	168	162	159	100
200	−120	−238	−316	−340	−310	−237	−140	− 38	54	121	159	173	172	167	167	200
300	−123	−251	−328	−339	−289	−198	− 89	+ 15	99	155	184	191	188	187	193	300
400	−102	−237	−310	−305	−237	−133	− 21	77	149	192	211	216	215	218	229	400
500	− 66	−199	−263	−246	−167	− 58	+ 49	133	191	221	234	238	240	247	259	500
600	− 32	−156	−210	−187	−106	− 1	95	166	211	235	245	248	252	258	267	600
700	− 11	−125	−178	−159	− 85	+ 11	100	166	207	228	236	238	240	242	248	700
800	− 5	−117	−179	−175	−114	− 24	65	134	177	200	206	205	202	203	206	800
900	− 1	−123	−206	−221	−174	− 87	+ 7	83	131	152	156	151	149	152	161	900
1000	+ 13	−125	−230	−266	−229	−144	− 46	+ 34	80	96	96	93	96	110	130	1000
1100	42	−108	−227	−276	−248	−169	− 77	− 5	+ 32	+ 42	41	46	65	96	128	1100
1200	78	− 74	−195	−248	−229	−164	− 89	− 34	− 10	− 2	+ 7	28	68	116	157	1200
1300	104	− 38	−151	−205	−200	−156	−105	− 69	− 50	− 35	− 8	39	101	162	204	1300
1400	105	− 22	−125	−182	−192	−171	−142	−117	− 96	− 64	− 11	63	145	213	251	1400
1500	80	− 34	−130	−192	−216	−216	−201	−182	−150	− 97	− 19	79	177	251	283	1500
1600	40	− 66	−157	−222	−257	−268	−263	−245	−206	−138	− 39	79	193	274	305	1600
1700	+ 7	− 92	−178	−241	−279	−298	−299	−285	−245	−170	− 58	78	209	301	332	1700
1800	− 6	− 95	−171	−228	−265	−285	−295	−288	−252	−173	− 48	107	257	361	390	1800
1900	+ 5	− 71	−134	−183	−217	−241	−257	−255	−220	−131	+ 11	188	355	464	482	1900
2000	29	− 35	− 87	−130	−163	−189	−205	−201	−154	− 49	114	308	485	590	589	2000
2100	47	− 8	− 56	− 95	−127	−152	−161	−142	− 76	+ 49	228	427	598	689	670	2100
2200	43	− 8	− 51	− 88	−117	−135	−131	− 95	− 11	126	304	493	646	719	689	2200
2300	+ 14	− 31	− 70	−100	−121	−128	−113	− 65	+ 25	156	315	478	608	667	642	2300
2400	− 26	− 62	− 89	−109	−121	−120	−100	− 53	+ 25	134	264	397	505	562	553	2400
2500	− 58	− 80	− 93	−102	−108	−107	− 93	− 60	− 3	80	184	293	392	453	464	2500
2600	− 61	− 70	− 73	− 78	− 86	− 93	− 93	− 78	− 40	+ 25	113	215	312	380	401	2600
2700	− 33	− 34	− 37	− 48	− 66	− 86	−102	− 99	− 72	− 12	76	178	277	346	367	2700
2800	+ 15	+ 12	− 1	− 25	− 58	− 92	−116	−118	− 89	− 25	68	174	270	330	340	2800
2900	60	46	+ 18	− 21	− 67	−108	−134	−133	− 96	− 24	71	173	257	303	297	2900
3000	81	53	+ 10	− 43	− 95	−136	−156	−146	−102	− 28	64	154	221	248	232	3000
3100	72	+ 30	− 24	− 84	−137	−175	−186	−167	−117	− 44	39	113	163	177	154	3100
3200	40	− 12	− 73	−136	−190	−222	−224	−197	−142	− 71	+ 3	65	102	108	85	3200
3300	+ 1	− 57	−123	−189	−241	−267	−262	−226	−167	− 95	− 26	28	59	61	41	3300
3400	− 26	− 90	−161	−228	−279	−301	−287	−243	−177	−102	− 35	15	42	45	29	3400
3500	− 36	−108	−183	−250	−298	−312	−290	−236	−164	− 85	− 19	29	54	57	46	3500
3600	− 30	−111	−190	−257	−297	−302	−270	−208	−129	− 50	+ 16	61	83	87	80	3600
3700	− 20	−110	−192	−234	−285	−280	−239	−169	− 87	− 7	58	100	120	123	118	3700
3800	− 17	−115	−198	−254	−274	−260	−210	−134	− 49	+ 30	93	132	149	151	148	3800
3900	− 30	−133	−214	−264	−275	−249	−190	−110	− 23	56	116	152	166	165	161	3900
4000	− 59	−165	−244	−286	−286	−249	−180	− 93	− 3	+ 75	+130	+160	+169	+166	+161	4000

XIII. — Longitude. — *Perturbations produites par Vénus.* (Suite.)

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ'.

Arg. l'	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	Arg. l'
0	+161	+165	+181	+204	+222	+217	+177	+100	−5	−119	−220	−287	−305	−270	−190	0
100	159	165	183	204	217	206	158	76	−28	−133	−220	−273	−283	−250	−182	100
200	167	178	196	215	221	199	144	57	−44	−141	−214	−252	−252	−217	−157	200
300	193	207	224	236	230	197	132	44	−53	−139	−196	−216	−204	−164	−112	300
400	229	243	256	257	238	192	121	34	−55	−126	−166	−172	−150	−111	−71	400
500	259	271	277	267	235	180	107	24	−54	−112	−140	−137	−113	−83	−58	500
600	267	275	273	255	216	157	85	+8	−60	−108	−131	−128	−112	−94	−85	600
700	248	251	246	223	182	122	51	−20	−83	−127	−148	−150	−142	−136	−137	700
800	206	209	204	181	139	79	+8	−63	−123	−165	−187	−192	−188	−187	−194	800
900	161	169	166	143	98	+34	−40	−112	−171	−209	−228	−232	−228	−227	−234	900
1000	130	145	144	119	67	−5	−83	−155	−210	−244	−255	−252	−246	−244	−249	1000
1100	128	149	145	111	48	−33	−113	−181	−229	−252	−256	−248	−240	−238	−245	1100
1200	157	176	162	114	40	−46	−127	−190	−227	−238	−235	−224	−217	−220	−229	1200
1300	204	213	184	121	35	−56	−133	−186	−212	−216	−207	−197	−194	−200	−212	1300
1400	251	247	201	123	28	−65	−139	−184	−202	−197	−186	−178	−179	−188	−198	1400
1500	283	267	207	115	+13	−82	−152	−190	−200	−191	−179	−172	−176	−186	−193	1500
1600	305	279	205	102	−9	−105	−172	−204	−207	−193	−179	−173	−178	−189	−193	1600
1700	332	297	207	87	−33	−132	−193	−216	−210	−191	−175	−171	−178	−189	−192	1700
1800	390	339	225	83	−51	−149	−202	−212	−196	−172	−155	−156	−166	−178	−179	1800
1900	482	406	263	97	−46	−141	−181	−179	−156	−134	−123	−127	−141	−153	−151	1900
2000	589	486	316	135	−13	−99	−127	−117	−94	−78	−78	−91	−109	−119	−113	2000
2100	670	549	369	185	+46	−29	−49	−37	−28	−21	−34	−56	−78	−86	−76	2100
2200	689	569	399	232	109	+44	+28	+33	+35	+22	−4	−35	−59	−67	−56	2200
2300	642	542	400	258	151	92	73	69	59	38	+3	−35	−63	−74	−67	2300
2400	553	482	371	253	157	99	73	63	51	+23	−17	−60	−95	−109	−97	2400
2500	464	417	328	223	131	70	41	+30	+17	−11	−58	−110	−152	−169	−152	2500
2600	401	366	286	185	95	35	+8	−1	−16	−51	−110	−174	−223	−236	−206	2600
2700	367	331	250	153	69	17	−4	−11	−34	−84	−160	−237	−288	−291	−253	2700
2800	340	296	217	129	61	24	+11	−1	−38	−110	−204	−289	−336	−323	−256	2800
2900	297	249	176	106	58	37	29	+9	−46	−135	−241	−328	−364	−337	−257	2900
3000	232	183	122	70	42	32	+25	−4	−71	−172	−281	−364	−393	−358	−274	3000
3100	154	110	60	+24	+6	+1	−7	−42	−115	−218	−327	−412	−443	−413	−334	3100
3200	85	46	+6	−22	−34	−36	−46	−82	−154	−260	−378	−475	−523	−508	−436	3200
3300	41	9	−24	−45	−52	−52	−59	−93	−167	−282	−419	−542	−616	−618	−545	3300
3400	29	4	−19	−31	−31	−24	−27	−60	−141	−271	−434	−586	−683	−694	−612	3400
3500	46	30	+18	+18	+30	+44	+44	+7	−86	−233	−415	−585	−690	−695	−599	3500
3600	80	72	73	85	107	125	122	77	−27	−184	−369	−534	−629	−618	−506	3600
3700	118	117	126	148	174	191	180	124	+13	−141	−310	−453	−524	−496	−378	3700
3800	148	150	163	188	213	223	202	136	26	−115	−261	−372	−418	−380	−269	3800
3900	161	164	180	203	225	227	196	123	+16	−111	−230	−316	−344	−305	−208	3900
4000	+161	+165	+181	+204	+222	+217	+177	+100	−5	−119	−220	−287	−305	−270	−190	4000

XIII. — Longitude. — *Perturbations produites par Vénus.* (Suite.)

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ'.

Arg. l'	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	Arg. l'
0	−190	− 82	+ 28	+118	+181	+222	+247	+263	+260	+226	+156	+ 55	− 59	0
100	−182	− 93	− 1	75	131	170	201	222	226	199	130	26	− 94	100
200	−157	− 85	− 15	41	82	115	149	182	200	185	119	11	−120	200
300	−112	− 59	− 16	+ 16	40	71	115	167	205	203	140	21	−123	300
400	− 71	− 39	− 20	− 9	+ 7	42	103	179	238	248	184	54	−102	400
500	− 58	− 45	− 46	− 46	− 29	+ 18	98	195	272	291	227	95	− 66	500
600	− 85	− 87	− 96	− 97	− 74	− 15	79	187	274	300	245	120	− 32	600
700	−137	−147	−158	−155	−126	− 62	+ 34	144	234	269	230	124	− 11	700
800	−194	−204	−213	−207	−176	−114	− 24	81	172	220	201	116	− 5	800
900	−234	−243	−249	−240	−210	−152	− 67	34	129	188	186	116	− 1	900
1000	−249	−258	−262	−251	−217	−158	− 72	31	130	197	204	137	+ 13	1000
1100	−245	−255	−256	−238	−196	−126	− 33	75	176	243	246	176	42	1100
1200	−229	−239	−234	−208	−152	− 69	+ 34	144	241	298	292	213	78	1200
1300	−212	−217	−206	−167	− 99	− 5	102	208	292	334	316	234	104	1300
1400	−198	−199	−178	−129	− 51	+ 47	151	245	312	335	306	224	105	1400
1500	−193	−188	−157	−101	− 18	78	175	254	302	309	270	189	80	1500
1600	−193	−181	−145	− 81	+ 3	96	183	249	280	272	225	143	40	1600
1700	−192	−175	−131	− 64	20	110	189	242	261	241	187	105	+ 7	1700
1800	−179	−158	−110	− 40	47	132	203	246	253	224	166	85	− 6	1800
1900	−151	−125	− 74	− 2	83	165	226	259	257	222	162	86	+ 5	1900
2000	−113	− 83	− 28	+ 46	126	201	255	278	268	228	169	99	29	2000
2100	− 76	− 42	+ 12	84	162	230	276	292	275	233	174	109	47	2100
2200	− 56	− 21	33	103	176	241	282	292	270	224	164	102	43	2200
2300	− 62	− 28	29	98	171	231	267	272	244	193	130	69	+ 14	2300
2400	− 97	− 59	+ 3	77	150	208	238	233	198	142	79	+ 21	− 26	2400
2500	−152	−101	− 28	54	128	180	199	185	142	85	+ 26	− 23	− 58	2500
2600	−206	−138	− 49	41	113	156	163	138	94	40	− 8	− 42	− 61	2600
2700	−243	−156	− 54	40	106	136	133	104	64	23	− 8	− 26	− 33	2700
2800	−256	−154	− 46	42	98	119	111	87	59	35	+ 21	+ 17	+ 15	2800
2900	−257	−149	− 45	36	83	101	98	86	74	67	65	64	60	2900
3000	−274	−169	− 70	+ 6	55	81	92	97	98	100	101	96	81	3000
3100	−334	−232	−129	− 44	+ 19	64	93	111	120	121	115	100	72	3100
3200	−436	−327	−210	−100	− 12	55	99	123	130	124	106	79	40	3200
3300	−545	−420	−274	−135	− 23	58	106	128	129	113	86	49	+ 1	3300
3400	−612	−464	−288	−127	− 3	77	118	131	123	102	70	27	− 26	3400
3500	−599	−429	−237	− 70	+ 47	113	139	141	130	108	72	25	− 36	3500
3600	−506	−328	−137	+ 17	115	160	172	168	157	135	98	41	− 30	3600
3700	−378	−206	− 32	101	178	210	216	213	203	180	134	65	− 20	3700
3800	−269	−115	+ 35	149	215	244	254	256	249	221	165	81	− 17	3800
3900	−208	− 78	50	151	215	249	268	277	271	239	173	78	− 30	3900
4000	−190	− 82	+ 28	+118	+181	+222	+247	+263	+260	+226	+156	+ 55	− 59	4000

XIV. — Longitude. — *Perturbations produites par la Terre.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument $\delta'' - l'' - l$.

ARGUM. $4\delta''+3l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $4\delta''+3l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $4\delta''+3l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $4\delta''+3l$.	PERT.	DIFF.
0	− 26		1000	+ 61		2000	+ 26		3000	− 61	
		+10			+ 3			−10			− 3
100	− 16		1100	64		2100	16		3100	− 64	
		10			+ 2			−10			− 2
200	− 6		1200	66		2200	+ 6		3200	− 66	
		10			0			−10			0
300	+ 4		1300	66		2300	− 4		3300	− 66	
		11			− 2			−11			+ 2
400	15		1400	64		2400	− 15		3400	− 64	
		9			− 3			− 9			3
500	24		1500	61		2500	24		3500	− 61	
		10			− 4			−10			4
600	34		1600	57		2600	− 34		3600	− 57	
		8			− 6			− 8			6
700	42		1700	51		2700	− 42		3700	− 51	
		8			− 8			− 8			8
800	50		1800	43		2800	− 50		3800	− 43	
		6			− 8			− 6			8
900	56		1900	35		2900	− 56		3900	− 35	
		+ 5			− 9			− 5			+ 9
1000	+ 61		2000	+ 26		3000	− 61		4000	− 26	

XV. — Longitude. — *Perturbations produites par la Terre.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ''.

Arg. l''	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	Arg. l''
0	+ 30	+ 29	+ 27	+ 24	+ 18	+ 11	+ 3	− 6	− 15	− 23	− 27	− 34	− 38	− 41	− 43	0
100	33	28	21	14	+ 6	− 2	− 11	− 20	− 28	− 35	− 39	− 41	− 40	− 39	− 37	100
200	40	30	19	9	− 2	− 12	− 21	− 29	− 35	− 39	− 40	− 39	− 35	− 32	− 26	200
300	47	32	18	+ 4	− 8	− 18	− 25	− 31	− 36	− 37	− 35	− 32	− 25	− 18	− 10	300
400	52	33	15	− 1	− 13	− 21	− 27	− 30	− 31	− 31	− 25	− 19	− 11	− 2	+ 5	400
500	49	27	+ 7	− 9	− 20	− 26	− 28	− 29	− 25	− 21	− 14	− 6	+ 3	+ 11	19	500
600	37	+ 13	− 7	− 22	− 31	− 35	− 34	− 27	− 20	− 13	− 4	+ 5	14	21	27	600
700	+ 17	− 7	− 27	− 41	− 46	− 44	− 38	− 29	− 18	− 8	+ 2	11	19	25	29	700
800	− 7	− 32	− 49	− 59	− 62	− 56	− 45	− 32	− 19	− 6	5	13	20	23	25	800
900	− 30	− 52	− 67	− 75	− 74	− 65	− 50	− 34	− 18	− 5	5	12	17	18	17	900
1000	− 45	− 65	− 78	− 82	− 78	− 66	− 50	− 32	− 15	− 2	7	11	13	12	8	1000
1100	− 51	− 68	− 78	− 79	− 73	− 59	− 41	− 24	− 8	+ 4	10	13	11	7	2	1100
1200	− 50	− 62	− 68	− 67	− 59	− 45	− 27	− 10	+ 4	13	17	16	12	8	0	1200
1300	− 42	− 50	− 53	− 49	− 40	− 26	− 10	+ 5	17	23	24	23	16	9	2	1300
1400	− 34	− 37	− 37	− 31	− 22	− 9	+ 5	17	26	31	29	25	20	12	7	1400
1500	− 27	− 27	− 24	− 18	− 9	+ 2	13	24	28	30	29	25	20	15	11	1500
1600	− 25	− 21	− 17	− 11	− 3	+ 6	13	19	22	23	21	18	16	15	15	1600
1700	− 25	− 20	− 14	− 9	− 5	0	+ 5	+ 7	+ 9	+ 8	+ 8	+ 8	10	13	18	1700
1800	− 25	− 19	− 15	− 12	− 10	− 9	− 8	− 8	− 8	− 8	− 7	− 4	3	12	21	1800
1900	− 22	− 18	− 15	− 14	− 15	− 17	− 20	− 22	− 23	− 22	− 18	− 11	1	15	30	1900
2000	− 16	− 12	− 11	− 13	− 17	− 22	− 26	− 30	− 30	− 28	− 19	− 10	7	26	46	2000
2100	− 7	− 4	− 5	− 9	− 15	− 21	− 27	− 30	− 30	− 25	− 14	+ 2	23	47	70	2100
2200	+ 4	+ 5	+ 2	− 3	− 10	− 17	− 23	− 25	− 22	− 14	+ 1	21	47	73	100	2200
2300	14	12	8	+ 2	− 6	− 12	− 16	− 16	− 10	+ 2	20	43	73	103	130	2300
2400	19	15	10	+ 3	− 4	− 9	− 11	− 8	+ 1	16	39	66	97	127	155	2400
2500	18	13	+ 7	0	− 6	− 9	− 9	− 4	10	28	52	81	112	142	168	2500
2600	13	+ 6	− 1	− 7	− 12	− 14	− 9	− 1	14	34	59	88	118	146	169	2600
2700	+ 3	− 4	− 11	− 17	− 18	− 17	− 11	0	16	37	61	88	115	139	157	2700
2800	− 8	− 16	− 20	− 23	− 24	− 20	− 12	+ 1	18	38	61	84	106	125	138	2800
2900	− 18	− 24	− 26	− 27	− 25	− 18	− 8	5	22	41	61	79	96	109	115	2900
3000	− 25	− 27	− 28	− 25	− 20	− 12	+ 1	15	31	47	63	77	88	94	94	3000
3100	− 26	− 25	− 23	− 17	− 10	0	13	27	42	56	68	76	82	82	76	3100
3200	− 20	− 18	− 12	− 5	+ 5	+ 16	29	41	54	64	72	76	77	73	62	3200
3300	− 10	− 5	+ 2	+ 11	22	33	44	55	64	71	75	76	70	62	49	3300
3400	+ 3	+ 9	18	27	37	47	56	63	69	73	72	68	60	49	35	3400
3500	15	22	31	40	48	56	62	66	68	67	63	56	46	33	+ 18	3500
3600	24	32	40	48	54	60	61	61	59	55	48	38	27	+ 14	0	3600
3700	29	35	42	50	52	53	53	49	44	37	28	+ 18	+ 7	− 5	− 18	3700
3800	30	36	40	43	44	42	38	32	24	+ 16	+ 7	− 3	− 13	− 23	− 32	3800
3900	29	32	34	34	32	27	21	+ 13	+ 4	− 5	− 14	− 21	− 28	− 35	− 41	3900
4000	+ 30	+ 29	+ 27	+ 24	+ 18	+ 11	+ 3	− 6	− 15	− 23	− 27	− 34	− 38	− 41	− 43	4000

XV. — Longitude. — *Perturbations produites par la Terre.* (Suite.)

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ″.

Arg. l″	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	Arg. l″
0	— 43	— 43	— 43	— 41	— 37	— 32	— 28	— 25	— 23	— 23	— 24	— 27	— 32	— 37	— 42	0
100	— 37	— 36	— 31	— 27	— 22	— 17	— 12	— 10	— 9	— 11	— 15	— 21	— 28	— 35	— 42	100
200	— 26	— 20	— 15	— 10	— 4	0	+ 4	+ 5	+ 4	+ 1	— 5	— 13	— 21	— 30	— 37	200
300	— 10	— 4	+ 3	+ 8	+ 11	+ 14	16	15	13	8	+ 1	— 7	— 16	— 24	— 30	300
400	+ 5	+ 12	18	21	23	24	23	20	16	9	+ 2	— 6	— 14	— 20	— 24	400
500	19	24	27	29	28	26	23	18	12	+ 5	— 3	— 10	— 16	— 19	— 20	500
600	27	31	32	30	27	22	16	+ 10	+ 3	— 5	— 12	— 16	— 21	— 22	— 20	600
700	29	30	29	25	19	+ 12	+ 5	— 3	— 10	— 15	— 22	— 25	— 27	— 25	— 20	700
800	25	24	20	1[illegible]	+ 7	— 1	— 9	— 15	— 22	— 27	— 30	— 32	— 30	— 26	— 19	800
900	17	14	+ 8	+ 1	— 6	— 12	— 20	— 26	— 31	— 34	— 34	— 32	— 28	— 22	— 14	900
1000	8	+ 3	— 3	— 9	— 17	— 23	— 28	— 31	— 33	— 33	— 31	— 27	— 21	— 12	— 4	1000
1100	2	— 4	— 11	— 18	— 23	— 27	— 30	— 30	— 28	— 26	— 21	— 15	— 7	+ 2	+ 11	1100
1200	0	— 7	— 14	— 19	— 23	— 24	— 24	— 22	— 17	— 12	— 6	+ 1	+ 9	17	25	1200
1300	2	— 5	— 10	— 14	— 15	— 15	— 12	— 7	— 1	+ 5	+ 12	19	26	32	38	1300
1400	7	+ 2	— 2	— 3	— 3	0	+ 4	+ 10	+ 17	24	29	34	39	43	45	1400
1500	11	9	+ 9	+ 10	+ 12	+ 17	22	28	34	40	44	46	47	45	45	1500
1600	15	17	20	23	28	33	38	43	48	50	51	49	47	43	37	1600
1700	18	24	31	37	42	47	51	54	55	54	52	47	40	32	23	1700
1800	21	33	42	50	55	58	59	58	57	52	46	37	27	+ 15	+ 4	1800
1900	30	45	57	65	69	68	66	61	54	45	35	22	+ 9	— 5	— 18	1900
2000	46	64	78	84	86	82	73	62	49	35	20	+ 6	— 9	— 24	— 37	2000
2100	70	89	104	109	106	96	80	62	43	24	+ 7	— 11	— 27	— 41	— 52	2100
2200	100	121	133	135	128	111	88	63	38	14	— 7	— 25	— 40	— 53	— 62	2200
2300	130	151	161	160	147	123	94	62	31	+ 4	— 19	— 37	— 51	— 61	— 67	2300
2400	155	174	182	176	157	128	93	55	20	— 10	— 34	— 50	— 61	— 68	— 69	2400
2500	168	185	190	180	156	122	81	39	+ 1	— 30	— 52	— 66	— 73	— 74	— 71	2500
2600	169	182	182	168	141	102	58	+ 14	— 26	— 56	— 76	— 85	— 89	— 84	— 75	2600
2700	157	166	162	143	112	71	+ 25	— 21	— 59	— 87	— 105	— 111	— 107	— 96	— 82	2700
2800	138	140	132	110	76	+ 33	— 13	— 57	— 95	— 121	— 134	— 135	— 125	— 109	— 90	2800
2900	115	113	100	75	40	— 2	— 49	— 92	— 126	— 149	— 158	— 154	— 140	— 120	— 96	2900
3000	94	87	69	44	+ 8	— 34	— 77	— 117	— 147	— 166	— 171	— 163	— 146	— 123	— 97	3000
3100	76	66	45	18	— 16	— 54	— 93	— 128	— 155	— 169	— 171	— 160	— 141	— 116	— 89	3100
3200	62	47	27	+ 1	— 30	— 64	— 98	— 127	— 148	— 159	— 158	— 145	— 125	— 100	— 74	3200
3300	49	33	+ 13	— 11	— 38	— 66	— 93	— 116	— 132	— 139	— 135	— 122	— 101	— 78	— 55	3300
3400	35	18	— 1	— 21	— 43	— 64	— 85	— 101	— 112	— 114	— 108	— 95	— 76	— 56	— 35	3400
3500	+ 18	+ 2	— 14	— 31	— 47	— 62	— 75	— 86	— 91	— 91	— 84	— 72	— 55	— 39	— 22	3500
3600	0	— 14	— 27	— 39	— 50	— 59	— 67	— 72	— 74	— 71	— 64	— 55	— 41	— 28	— 16	3600
3700	— 18	— 29	— 39	— 47	— 53	— 58	— 60	— 61	— 60	— 58	— 51	— 43	— 35	— 27	— 19	3700
3800	— 32	— 41	— 47	— 51	— 53	— 53	— 52	— 51	— 48	— 45	— 42	— 37	— 34	— 30	— 28	3800
3900	— 41	— 45	— 48	— 49	— 47	— 46	— 42	— 39	— 36	— 34	— 33	— 33	— 34	— 35	— 36	3900
4000	— 43	— 43	— 43	— 41	— 37	— 32	— 28	— 25	— 23	— 23	— 24	— 27	— 32	— 37	— 42	4000

XV. — LONGITUDE. — *Perturbations produites par la Terre.* (Suite.)

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ°.

ARG. l°	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	ARG. l°
0	− 42	− 46	− 45	− 44	− 38	− 27	− 15	− 1	+ 11	+ 21	+ 26	+ 29	+ 30	0
100	− 42	− 47	− 48	− 44	− 35	− 22	− 7	+ 10	23	32	36	36	33	100
200	− 37	− 41	− 41	− 36	− 24	− 8	+ 10	27	41	50	52	48	40	200
300	− 30	− 33	− 30	− 21	− 9	+ 9	29	48	61	68	68	60	47	300
400	− 24	− 23	− 19	− 8	+ 8	27	48	66	79	84	80	69	52	400
500	− 20	− 18	− 10	+ 2	20	40	61	78	89	91	84	69	49	500
600	− 20	− 15	− 5	9	26	46	65	80	89	88	78	60	37	600
700	− 20	− 13	− 2	12	28	46	62	74	78	74	62	41	+ 17	700
800	− 19	− 10	+ 1	14	28	42	54	61	62	55	39	+ 18	− 7	800
900	− 14	− 4	7	17	28	38	45	47	44	34	+ 17	− 7	− 30	900
1000	− 4	+ 6	15	24	31	35	38	36	30	16	− 1	− 23	− 45	1000
1100	+ 11	19	27	32	35	36	33	27	19	+ 5	− 12	− 32	− 51	1100
1200	25	32	37	39	39	35	30	22	11	− 2	− 17	− 34	− 50	1200
1300	38	42	45	42	40	34	26	17	+ 6	− 6	− 18	− 31	− 42	1300
1400	45	45	45	41	35	27	18	+ 8	− 1	− 11	− 20	− 27	− 34	1400
1500	45	42	38	32	24	+ 15	+ 5	− 4	− 11	− 18	− 22	− 25	− 27	1500
1600	37	31	24	+ 16	+ 7	− 2	− 11	− 19	− 24	− 27	− 27	− 27	− 25	1600
1700	23	+ 14	+ 5	− 5	− 14	− 22	− 29	− 34	− 36	− 36	− 34	− 30	− 25	1700
1800	+ 4	− 7	− 18	− 26	− 34	− 40	− 44	− 46	− 46	− 43	− 37	− 31	− 25	1800
1900	− 18	− 29	− 38	− 46	− 51	− 54	− 55	− 53	− 50	− 44	− 37	− 28	− 22	1900
2000	− 37	− 48	− 53	− 59	− 61	− 61	− 58	− 54	− 47	− 38	− 31	− 23	− 16	2000
2100	− 52	− 61	− 66	− 67	− 65	− 61	− 55	− 46	− 38	− 29	− 20	− 12	− 7	2100
2200	− 62	− 67	− 69	− 67	− 62	− 53	− 45	− 35	− 25	− 15	− 6	0	+ 4	2200
2300	− 67	− 70	− 67	− 60	− 53	− 42	− 31	− 20	− 9	0	+ 6	+ 12	14	2300
2400	− 69	− 66	− 61	− 52	− 41	− 28	− 16	− 5	+ 5	+ 12	17	19	19	2400
2500	− 71	− 64	− 54	− 42	− 29	− 16	− 3	+ 7	14	19	22	21	18	2500
2600	− 75	− 63	− 50	− 35	− 20	− 7	+ 5	13	19	21	20	17	13	2600
2700	− 82	− 65	− 48	− 31	− 16	− 2	8	15	18	18	15	+ 9	+ 3	2700
2800	− 90	− 69	− 49	− 31	− 15	− 2	7	11	12	+ 9	+ 5	− 2	− 8	2800
2900	− 96	− 72	− 51	− 31	− 16	− 5	+ 2	+ 4	+ 4	0	− 6	− 13	− 18	2900
3000	− 97	− 71	− 49	− 31	− 16	− 7	− 2	− 1	− 4	− 10	− 15	− 20	− 25	3000
3100	− 89	− 64	− 43	− 26	− 14	− 7	− 4	− 6	− 8	− 13	− 18	− 23	− 26	3100
3200	− 74	− 51	− 31	− 17	− 8	− 4	− 2	− 4	− 8	− 13	− 18	− 20	− 20	3200
3300	− 55	− 33	− 17	− 7	+ 1	+ 4	+ 3	+ 1	− 4	− 8	− 11	− 12	− 10	3300
3400	− 35	− 19	− 5	+ 4	8	9	9	6	+ 2	− 1	− 2	− 1	+ 3	3400
3500	− 22	− 8	+ 2	8	11	12	11	9	8	+ 7	+ 7	+ 10	15	3500
3600	− 16	− 7	0	+ 4	+ 7	+ 8	9	10	10	12	14	18	24	3600
3700	− 19	− 14	− 10	− 7	− 4	− 1	+ 2	+ 6	10	14	18	23	29	3700
3800	− 28	− 26	− 24	− 22	− 19	− 14	− 7	0	7	13	19	24	30	3800
3900	− 36	− 38	− 38	− 36	− 32	− 24	− 14	− 3	6	14	21	27	29	3900
4000	− 42	− 46	− 45	− 44	− 38	− 27	− 15	− 1	+ 11	+ 21	+ 26	+ 29	+ 30	4000

XVI. — LONGITUDE. — *Perturbations produites par Jupiter.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ^{IV} $l^{\text{IV}} - l$.

ARGUM. $2\delta^{\text{IV}} + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta^{\text{IV}} + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta^{\text{IV}} + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta^{\text{IV}} + l$.	PERT.	DIFF.
0	+318		1000	— 80		2000	—318		3000	+ 80	
		—16			—48			+16			+48
100	302		1100	—128		2100	—302		3100	128	
		—24			—46			24			46
200	278		1200	—174		2200	—278		3200	174	
		—31			—42			31			42
300	247		1300	—216		2300	—247		3300	216	
		—36			—36			36			36
400	211		1400	—252		2400	—211		3400	252	
		—42			—29			42			29
500	169		1500	—281		2500	—169		3500	281	
		—46			—23			46			23
600	123		1600	—304		2600	—123		3600	304	
		—49			—16			49			16
700	74		1700	—320		2700	— 74		3700	320	
		—51			— 7			51			+ 7
800	+ 23		1800	—327		2800	— 23		3800	327	
		—52			0			52			0
900	— 29		1900	—327		2900	+ 29		3900	327	
		—51			+ 9			+51			— 9
1000	— 80		2000	—318		3000	+ 80		4000	+318	

XVII. — Longitude. — *Perturbations produites par Jupiter.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ^{iv}.

Arg. l^{v}	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	Arg. l^{v}
0	+ 4	− 16	− 29	− 37	− 37	− 32	− 20	− 5	+ 13	+ 33	+ 53	+ 72	+ 88	+101	+110	0
100	+ 4	− 19	− 34	− 42	− 42	− 36	− 24	− 8	12	32	52	71	86	99	107	100
200	− 3	− 28	− 44	− 52	− 51	− 44	− 30	− 12	9	31	51	71	87	99	106	200
300	− 17	− 44	− 61	− 68	− 65	− 55	− 39	− 18	+ 4	28	51	71	88	99	107	300
400	− 40	− 67	− 84	− 89	− 84	− 71	− 50	− 27	− 1	25	50	72	89	101	108	400
500	− 70	− 96	−112	−115	−107	− 89	− 65	− 37	− 7	22	49	72	90	103	109	500
600	−105	−130	−144	−145	−133	−111	− 81	− 48	− 14	18	47	72	91	104	110	600
700	−141	−166	−179	−178	−162	−134	− 99	− 60	− 22	14	45	71	91	104	110	700
800	−173	−197	−210	−208	−190	−159	−118	− 74	− 30	10	44	70	91	102	107	800
900	−194	−220	−235	−234	−215	−182	−138	− 88	− 39	+ 5	42	70	89	100	104	900
1000	−203	−231	−248	−250	−233	−200	−154	−102	− 48	0	39	69	88	98	99	1000
1100	−196	−226	−246	−252	−241	−211	−166	−112	− 57	− 5	37	68	87	96	95	1100
1200	−174	−204	−228	−240	−235	−211	−170	−118	− 62	− 9	36	68	87	94	91	1200
1300	−141	−171	−197	−213	−214	−198	−164	−117	− 63	− 10	36	69	88	94	89	1300
1400	−101	−128	−155	−174	−182	−173	−147	−107	− 57	− 6	39	73	92	97	90	1400
1500	− 59	− 83	−109	−130	−141	−139	−121	− 88	− 44	+ 4	47	80	99	103	94	1500
1600	− 19	− 40	− 63	− 84	− 98	−101	− 89	− 62	− 25	18	60	92	111	115	104	1600
1700	+ 15	− 3	− 22	− 42	− 56	− 62	− 55	− 34	− 2	37	77	109	129	132	121	1700
1800	41	+ 26	+ 9	− 8	− 22	− 29	− 25	− 8	+ 20	57	95	129	149	155	144	1800
1900	61	47	32	+ 16	+ 3	− 4	− 1	+ 14	40	75	113	148	173	181	173	1900
2000	74	60	45	31	19	+ 12	+ 15	28	52	87	126	165	194	208	205	2000
2100	81	66	51	37	26	19	21	33	57	92	133	175	211	233	236	2100
2200	82	66	50	36	25	19	20	32	55	89	132	178	220	250	263	2200
2300	76	60	44	29	19	12	14	24	47	80	123	172	220	258	281	2300
2400	66	49	33	19	+ 8	+ 2	+ 4	14	35	67	110	159	211	257	289	2400
2500	51	35	19	+ 5	− 5	− 10	− 8	+ 2	22	53	93	142	196	247	287	2500
2600	34	+ 17	+ 1	− 11	− 20	− 23	− 20	− 9	+ 9	39	78	125	178	230	275	2600
2700	+ 15	− 1	− 16	− 28	− 35	− 37	− 32	− 21	− 1	27	63	108	158	210	257	2700
2800	− 3	− 19	− 33	− 44	− 49	− 49	− 43	− 30	− 10	18	52	94	141	190	235	2800
2900	− 19	− 35	− 48	− 57	− 61	− 59	− 52	− 37	− 16	11	44	83	126	171	214	2900
3000	− 32	− 47	− 59	− 67	− 69	− 66	− 57	− 41	− 20	8	40	77	115	155	194	3000
3100	− 41	− 55	− 66	− 73	− 74	− 70	− 59	− 42	− 20	7	38	72	107	142	176	3100
3200	− 47	− 59	− 69	− 75	− 74	− 69	− 58	− 41	− 19	8	38	69	102	133	161	3200
3300	− 47	− 59	− 68	− 72	− 71	− 65	− 54	− 36	− 15	11	40	69	99	126	149	3300
3400	− 44	− 55	− 64	− 68	− 66	− 60	− 47	− 30	− 9	16	43	70	97	121	140	3400
3500	− 37	− 49	− 57	− 60	− 59	− 52	− 40	− 23	− 3	21	46	72	96	117	133	3500
3600	− 28	− 40	− 48	− 52	− 51	− 45	− 33	− 17	+ 3	26	49	73	95	113	127	3600
3700	− 18	− 31	− 40	− 45	− 44	− 38	− 27	− 11	8	29	51	74	93	110	122	3700
3800	− 8	− 23	− 33	− 39	− 38	− 33	− 22	− 7	11	32	52	73	92	107	117	3800
3900	0	− 17	− 29	− 36	− 36	− 31	− 20	− 5	13	33	53	72	90	103	113	3900
4000	+ 4	− 16	− 29	− 37	− 37	− 32	− 20	− 5	+ 13	+ 33	+ 53	+ 72	+ 88	+101	+110	4000

XVII. — Longitude. — *Perturbations produites par Jupiter.* (Suite.)

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ^{iv}.

Arg. l^{iv}	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	Arg. l^{iv}
0	+110	+113	+110	+100	+ 84	+ 61	+ 33	+ 1	− 34	− 69	−103	−131	−150	−154	−142	0
100	107	110	108	98	82	61	35	6	− 26	− 57	− 86	−111	−127	−131	−121	100
200	106	109	106	97	82	62	37	10	− 19	− 47	− 73	− 94	−109	−113	−105	200
300	107	109	105	96	82	62	38	12	− 15	− 41	− 65	− 84	− 97	−101	− 96	300
400	108	109	105	95	81	61	38	13	− 14	− 39	− 61	− 79	− 92	− 97	− 94	400
500	109	110	104	94	78	58	35	9	− 17	− 42	− 63	− 81	− 93	− 99	− 98	500
600	110	110	104	91	75	54	30	+ 4	− 23	− 48	− 70	− 87	−100	−106	−107	600
700	110	108	101	87	69	47	22	− 5	− 32	− 57	− 80	− 98	−111	−118	−119	700
800	107	105	96	81	61	38	+ 12	− 15	− 43	− 69	− 92	−111	−124	−131	−133	800
900	104	100	89	71	50	26	− 1	− 29	− 56	− 82	−105	−124	−137	−144	−146	900
1000	99	92	79	61	38	+ 12	− 16	− 43	− 70	− 96	−118	−136	−150	−156	−157	1000
1100	95	85	70	49	24	− 4	− 32	− 59	− 85	−109	−130	−147	−160	−165	−165	1100
1200	91	79	61	37	+ 11	− 18	− 47	− 75	−100	−122	−141	−156	−165	−169	−168	1200
1300	89	75	53	28	− 1	− 31	− 61	− 88	−112	−133	−149	−161	−168	−169	−166	1300
1400	90	73	49	21	− 9	− 40	− 70	− 98	−122	−141	−154	−163	−167	−165	−159	1400
1500	94	75	49	18	− 14	− 46	− 76	−104	−127	−144	−156	−162	−162	−157	−148	1500
1600	104	83	53	20	− 14	− 47	− 77	−105	−127	−143	−153	−157	−154	−146	−133	1600
1700	121	97	65	29	− 7	− 42	− 73	− 99	−121	−136	−145	−147	−142	−132	−116	1700
1800	144	119	84	45	+ 6	− 31	− 63	− 90	−111	−125	−133	−133	−127	−114	− 98	1800
1900	173	148	112	69	26	− 14	− 48	− 76	− 96	−110	−117	−116	−109	− 96	− 77	1900
2000	205	183	147	102	55	+ 11	− 27	− 57	− 79	− 92	− 98	− 97	− 90	− 76	− 57	2000
2100	236	220	186	141	91	43	0	− 33	− 57	− 72	− 79	− 77	− 69	− 55	− 37	2100
2200	263	255	227	184	132	80	+ 32	− 6	− 33	− 51	− 58	− 58	− 51	− 37	− 19	2200
2300	281	283	264	226	175	120	68	+ 24	− 8	− 29	− 39	− 40	− 34	− 21	− 4	2300
2400	289	302	292	262	215	159	103	54	+ 17	− 9	− 23	− 25	− 20	− 9	+ 7	2400
2500	287	310	310	288	247	193	136	82	39	+ 8	− 9	− 15	− 12	− 2	12	2500
2600	275	306	316	302	268	217	160	103	55	20	− 3	− 11	− 10	− 2	12	2600
2700	257	292	309	304	276	231	174	115	63	23	− 4	− 16	− 17	− 9	+ 5	2700
2800	235	272	294	294	272	231	177	117	61	+ 16	− 15	− 30	− 32	− 24	− 10	2800
2900	214	249	272	276	259	222	169	109	50	0	− 35	− 53	− 56	− 48	− 33	2900
3000	194	226	248	252	238	204	153	92	31	− 23	− 62	− 84	− 89	− 80	− 62	3000
3100	176	204	222	227	214	181	132	72	+ 8	− 49	− 93	−119	−126	−117	− 96	3100
3200	161	185	199	201	187	157	109	49	− 15	− 75	−124	−154	−164	−155	−133	3200
3300	149	167	178	177	163	133	87	29	− 35	− 98	−149	−184	−197	−190	−166	3300
3400	140	154	160	157	141	112	68	13	− 50	−112	−167	−204	−222	−217	−193	3400
3500	133	143	146	139	123	94	53	+ 1	− 58	−119	−174	−214	−234	−232	−209	3500
3600	127	134	134	126	108	81	42	− 6	− 61	−118	−170	−211	−233	−234	−213	3600
3700	122	127	126	116	98	71	35	− 8	− 58	−110	−159	−198	−221	−224	−206	3700
3800	117	122	119	108	90	65	32	− 7	− 52	− 98	−142	−178	−200	−204	−188	3800
3900	113	117	114	104	86	62	31	− 4	− 44	− 84	−123	−155	−176	−180	−166	3900
4000	+110	+113	+110	+100	+ 84	+ 61	+ 33	+ 1	− 34	− 69	−103	−131	−150	−154	−142	4000

XVII. — Longitude. — *Perturbations produites par Jupiter.* (Suite.)

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ^{iv}.

Arg. l^{iv}	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	Arg. l^{iv}
0	−142	−113	− 71	− 21	+ 27	+ 68	+ 94	+104	+ 98	+ 80	+ 55	+ 29	+ 4	0
100	−121	− 95	− 57	− 10	37	78	105	116	110	90	62	32	+ 4	100
200	−105	− 84	− 50	− 7	38	77	105	117	111	91	61	28	− 3	200
300	− 96	− 79	− 50	− 13	27	65	92	104	100	81	51	+ 15	− 17	300
400	− 94	− 81	− 58	− 27	+ 7	41	67	79	76	58	+ 28	− 6	− 40	400
500	− 98	− 89	− 71	− 47	− 18	+ 10	+ 32	44	42	+ 25	− 3	− 37	− 70	500
600	−107	−100	− 88	− 69	− 47	− 24	− 6	+ 4	+ 2	− 14	− 40	− 73	−105	600
700	−119	−114	−104	− 90	− 73	− 56	− 42	− 35	− 38	− 53	− 78	−109	−141	700
800	−133	−129	−121	−109	− 96	− 83	− 72	− 68	− 72	− 87	−110	−141	−173	800
900	−146	−142	−134	−124	−112	−101	− 93	− 91	− 96	−110	−133	−164	−194	900
1000	−157	−153	−144	−134	−122	−112	−104	−101	−107	−120	−142	−172	−203	1000
1100	−165	−159	−150	−138	−125	−114	−105	−102	−105	−117	−137	−165	−196	1100
1200	−168	−161	−150	−136	−122	−108	− 98	− 92	− 93	−102	−119	−144	−174	1200
1300	−166	−157	−144	−129	−112	− 96	− 84	− 75	− 73	− 79	− 92	−114	−141	1300
1400	−159	−148	−133	−116	− 97	− 79	− 65	− 53	− 49	− 50	− 60	− 77	−101	1400
1500	−148	−134	−117	− 98	− 78	− 58	− 42	− 29	− 22	− 21	− 26	− 39	− 59	1500
1600	−133	−117	− 97	− 76	− 55	− 35	− 17	− 4	+ 5	+ 8	+ 6	− 4	− 19	1600
1700	−116	− 97	− 76	− 54	− 31	− 10	+ 8	+ 23	32	36	34	+ 27	+ 15	1700
1800	− 98	− 77	− 54	− 30	− 7	+ 14	33	47	56	60	59	52	41	1800
1900	− 77	− 55	− 32	− 7	+ 16	38	55	69	78	81	79	72	61	1900
2000	− 57	− 35	− 11	+ 14	37	58	75	87	95	96	93	85	74	2000
2100	− 37	− 15	+ 9	32	55	74	90	101	107	107	102	93	81	2100
2200	− 19	+ 3	25	48	68	86	99	109	113	112	105	95	82	2200
2300	− 4	16	38	59	77	94	105	112	114	110	102	91	76	2300
2400	+ 7	25	45	65	82	96	106	110	109	104	94	81	66	2400
2500	12	30	48	67	82	94	101	103	101	93	82	68	51	2500
2600	12	28	46	62	77	87	93	93	88	79	66	51	34	2600
2700	+ 5	21	37	53	66	76	80	80	74	63	49	33	+ 15	2700
2800	− 10	+ 6	23	39	52	61	65	64	57	46	31	+ 15	− 3	2800
2900	− 33	− 14	+ 4	21	34	44	48	47	41	29	+ 15	− 2	− 19	2900
3000	− 62	− 40	− 19	+ 1	+ 16	26	31	31	25	14	0	− 16	− 32	3000
3100	− 96	− 71	− 45	− 22	− 3	+ 10	16	17	12	+ 2	− 11	− 26	− 41	3100
3200	−133	−103	− 72	− 43	− 21	− 5	+ 4	+ 6	+ 2	− 6	− 18	− 32	− 47	3200
3300	−166	−133	− 97	− 63	− 35	− 16	− 4	0	− 3	− 10	− 21	− 34	− 47	3300
3400	−193	−157	−116	− 77	− 44	− 20	− 6	0	− 2	− 9	− 19	− 31	− 44	3400
3500	−209	−173	−128	− 84	− 46	− 18	− 1	+ 6	+ 5	− 1	− 12	− 24	− 37	3500
3600	−213	−176	−130	− 82	− 41	− 9	+ 11	20	19	+ 11	− 1	− 15	− 28	3600
3700	−206	−170	−123	− 73	− 27	+ 8	30	38	36	27	+ 13	− 3	− 18	3700
3800	−188	−154	−107	− 57	− 9	28	52	61	57	45	28	+ 9	− 8	3800
3900	−166	−134	− 89	− 38	+ 11	50	75	84	79	64	43	20	0	3900
4000	−142	−113	− 71	− 21	+ 27	+ 68	+ 94	+104	+ 98	+ 80	+ 55	+ 29	+ 4	4000

XVIII. — LONGITUDE. — *Perturbations produites par Saturne.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument $\delta^v = l^v - l$.

ARGUM. $2\delta^v + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta^v + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta^v + l$.	PERT.	DIFF.	ARGUM. $2\delta^v + l$.	PERT.	DIFF.
0	+37		1000	−10		2000	−37		3000	+10	
		− 2			− 5			+ 2			+ 5
100	35		1100	−15		2100	−35		3100	15	
		− 3			− 6			3			6
200	32		1200	−21		2200	−32		3200	21	
		− 4			− 4			4			4
300	28		1300	−25		2300	−28		3300	25	
		− 4			− 5			4			5
400	24		1400	−30		2400	−24		3400	30	
		− 5			− 3			5			3
500	19		1500	−33		2500	−19		3500	33	
		− 5			− 3			5			3
600	14		1600	−36		2600	−14		3600	36	
		− 6			− 1			6			1
700	8		1700	−37		2700	− 8		3700	37	
		− 6			− 1			6			+ 1
800	+ 2		1800	−38		2800	− 2		3800	38	
		− 6			0			6			0
900	− 4		1900	−38		2900	+ 4		3900	38	
		− 6			+ 1			+ 6			− 1
1000	−10		2000	−37		3000	+10		4000	+37	

XIX. — LONGITUDE. — *Perturbations produites par Saturne.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Argument δ^v.

ARG. l^v	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	ARG. l^v
0	+11	+ 6	+ 5	+ 6	+ 9	+12	+15	+17	+18	+17	+12	+ 4	− 4	− 8	− 6	+ 2	+12	+18	+20	+16	+11	0
200	18	12	10	10	12	14	15	16	15	13	8	+ 2	− 5	− 8	− 4	5	16	25	28	25	18	200
400	21	14	10	10	12	14	15	14	12	9	4	− 1	− 7	− 8	− 5	5	17	27	31	28	21	400
600	17	+ 9	+ 5	+ 5	9	12	13	12	9	6	+ 1	− 4	− 8	−10	− 7	+ 2	13	22	27	24	17	600
800	+ 8	0	− 4	− 3	+ 2	8	11	11	9	4	− 1	− 5	− 9	−11	− 9	− 3	+ 6	14	18	15	+ 8	800
1000	− 4	−12	−16	−13	− 6	+ 3	9	10	8	3	− 2	− 6	−10	− 8	−11	− 7	− 1	+ 5	+ 7	+ 4	− 4	1000
1200	−13	−20	−24	−21	−13	− 2	6	9	7	3	− 3	− 7	−10	−12	−12	−10	6	− 2	− 1	− 4	−13	1200
1400	−15	−23	−27	−24	−15	− 4	5	9	7	+ 1	− 5	−10	−12	−13	−13	−11	8	− 6	− 5	− 9	−15	1400
1600	−13	−19	−23	−21	−13	− 3	6	10	6	− 1	− 8	−14	−16	−15	−13	−11	− 8	− 6	− 5	− 7	−13	1600
1800	− 6	−11	−15	−14	− 8	+ 1	9	11	7	− 2	−11	−17	−19	−17	−13	− 9	− 5	− 2	− 1	− 1	− 6	1800
2000	+ 2	− 3	− 6	− 7	− 3	5	11	13	8	− 2	−12	−19	−21	−17	−12	− 7	− 2	+ 2	+ 5	+ 4	+ 2	2000
2200	7	+ 3	− 1	− 2	0	6	12	13	9	− 1	−12	−19	−21	−17	−10	− 3	+ 3	6	9	9	7	2200
2400	9	5	+ 1	− 2	− 1	+ 4	9	12	9	0	−11	−18	−20	−15	− 8	0	6	10	11	11	9	2400
2600	7	+ 2	− 2	− 4	− 4	0	5	9	8	+ 1	− 8	−16	−18	−14	− 6	+ 2	8	11	11	9	7	2600
2800	+ 1	− 2	− 6	− 8	− 8	− 4	+ 1	6	7	2	− 6	−14	−17	−14	− 6	+ 2	7	9	8	+ 5	+ 1	2800
3000	− 4	− 7	−10	−12	−10	− 6	0	6	9	5	− 3	−11	−16	−15	− 9	− 1	4	6	+ 4	0	− 4	3000
3200	− 8	−11	−12	−12	−10	− 5	+ 2	8	11	9	+ 2	− 7	−14	−15	−11	− 5	+ 1	2	0	− 4	− 8	3200
3400	− 9	−12	−11	−10	− 7	− 2	5	12	16	14	7	− 3	−12	−15	−13	− 7	− 1	1	− 1	− 5	− 9	3400
3600	− 6	− 8	− 8	− 5	− 2	+ 4	10	15	19	18	11	+ 1	− 9	−13	−12	− 6	0	4	+ 2	− 2	− 6	3600
3800	+ 1	− 2	− 2	0	+ 4	8	13	17	20	19	13	4	− 6	−10	− 9	− 3	+ 5	10	10	+ 6	+ 1	3800
4000	+11	+ 6	+ 5	+ 6	+ 9	+12	+15	+17	+18	+17	+12	+ 4	− 4	− 8	− 6	+ 2	+12	+18	+20	+16	+11	4000

XX. — Longitude. — *Réduction à l'écliptique.*

Argument = longitude vraie, moins longitude du nœud = $v - \theta$.

Nota. — Les signes de la réduction et de sa variation séculaire sont lus du même côté que l'argument.

Argum.		Réduction.	Diff.	Variation séculaire.	Argum.		Argum.		Réduction.	Diff.	Variation séculaire.	Argum.	
0°	180°	0′ 0″,00	26″,85	0″,00	180°	360°	45°	225°	−12′52″,08+	0″,37	−0″,39+	135°	315°
1	181	− 0.26,85+	26,81	−0,02+	179	359	46	226	−12.51,71+	1,31	−0,39+	134	314
2	182	− 0.53,66+	26,74	−0,03+	178	358	47	227	−12.50,40+	2,25	−0,39+	133	313
3	183	− 1.20,40+	26,65	−0,04+	177	357	48	228	−12.48,15+	3,18	−0,39+	132	312
4	184	− 1.47,05+	26,53	−0,05+	176	356	49	229	−12.44,97+	4,12	−0,39+	131	311
5	185	− 2.13,58+	26,36	−0,06+	175	355	50	230	−12.40,85+	5,05	−0,39+	130	310
6	186	− 2.39,94+	26,16	−0,08+	174	354	51	231	−12.35,80+	5,97	−0,38+	129	309
7	187	− 3. 6,10+	25,94	−0,09+	173	353	52	232	−12.29.83+	6,89	−0,38+	128	308
8	188	− 3.32,04+	25,70	−0,11+	172	352	53	233	−12.22,94+	7,80	−0,38+	127	307
9	189	− 3.57,74+	25,41	−0,12+	171	351	54	234	−12.15,14+	8,69	−0,37+	126	306
10	190	− 4.23,15+	25,08	−0,13+	170	350	55	235	−12. 6,45+	9,58	−0,37+	125	305
11	191	− 4.48,23+	24,73	−0,14+	169	349	56	236	−11.56,87+	10,46	−0,36+	124	304
12	192	− 5.12,96+	24,36	−0,16+	168	348	57	237	−11.46,41+	11,32	−0,35+	123	303
13	193	− 5.37,32+	23.96	−0,17+	167	347	58	238	−11.35,09+	12,18	−0,35+	122	302
14	194	− 6. 1,28+	23,52	−0,18+	166	346	59	239	−11.22,91+	13,01	−0,34+	121	301
15	195	− 6.24,80+	23,05	−0,20+	165	345	60	240	−11. 9,90+	13.83	−0,33+	120	300
16	196	− 6.47,85+	22,56	−0,21+	164	344	61	241	−10.56,07+	14,64	−0,33+	119	299
17	197	− 7.10,41+	22,04	−0,22+	163	343	62	242	−10.41,43+	15,43	−0,32+	118	298
18	198	− 7.32,45+	21,49	−0,23+	162	342	63	243	−10.26,00+	16,19	−0,32+	117	297
19	199	− 7.53,94+	20,92	−0,24+	161	341	64	244	−10. 9,81+	16,94	−0,31+	116	296
20	200	− 8.14,86+	20,33	−0,25+	160	340	65	245	− 9.52,87+	17,67	−0,30+	115	295
21	201	− 8.35,19+	19,70	−0,26+	159	339	66	246	− 9.35,20+	18,37	−0,29+	114	294
22	202	− 8.54,89+	19.06	−0,27+	158	338	67	247	− 9.16.83+	19.05	−0,28+	113	293
23	203	− 9.13,95+	18.39	−0,28+	157	337	68	248	− 8.57,78+	19,71	−0,27+	112	292
24	204	− 9.32,34+	17,69	−0,29+	156	336	69	249	− 8.38,07+	20,36	−0,26+	111	291
25	205	− 9.50,03+	16,98	−0,30+	155	335	70	250	− 8.17,71+	20,97	−0,25+	110	290
26	206	−10. 7,01+	16,25	−0,31+	154	334	71	251	− 7.56,74+	21,55	−0,24+	109	289
27	207	−10.23,26+	15,49	−0,32+	153	333	72	252	− 7.35,19+	22,10	−0,23+	108	288
28	208	−10.38,75+	14,72	−0.32+	152	332	73	253	− 7.13,09+	22,64	−0,22+	107	287
29	209	−10.53.47+	13.92	−0,33+	151	331	74	254	− 6.50,45+	23,15	−0,21+	106	286
30	210	−11. 7,39+	13,12	−0,33+	150	330	75	255	− 6.27,30+	23,62	−0,20+	105	285
31	211	−11.20,51+	12,30	−0.34+	149	329	76	256	− 6. 3,68+	24,08	−0,19+	104	284
32	212	−11.32,81+	11,46	−0,35+	148	328	77	257	− 5.39,60+	24,49	−0,18+	103	283
33	213	−11.44,27+	10,60	−0,35+	147	327	78	258	− 5.15.11+	24,88	−0,17+	102	282
34	214	−11.54,87+	9,72	−0,36+	146	326	79	259	− 4.50,23+	25,23	−0,15+	101	281
35	215	−12. 4,59+	8,85	−0,37+	145	325	80	260	− 4.25.00+	25.56	−0,14+	100	280
36	216	−12.13.44+	7.97	−0,37+	144	324	81	261	− 3.59,44+	25,86	−0,12+	99	279
37	217	−12.21,41+	7,06	−0,38+	143	323	82	262	− 3.33,58+	26,12	−0,11+	98	278
38	218	−12.28,47+	6,15	−0,38+	142	322	83	263	− 3. 7,46+	26,35	−0,09+	97	277
39	219	−12.34,62+	5,24	−0,38+	141	321	84	264	− 2.41,11+	26,55	−0.08+	96	276
40	220	−12.39,86+	4,31	−0,39+	140	320	85	265	− 2.14,56+	26,71	−0,06+	95	275
41	221	−12.44,17+	3.38	−0,39+	139	319	86	266	− 1.47,85+	26,85	−0,05+	94	274
42	222	−12.47,55+	2,45	−0,39+	138	318	87	267	− 1.21,00+	26,94	−0,04+	93	273
43	223	−12.50,00+	1,51	−0,39+	137	317	88	268	− 0.54,06+	27,01	−0,03+	92	272
44	224	−12.51,51+	0,57	−0,39+	136	316	89	269	− 0.27,05+	27,05	−0,02+	91	271
45	225	−12.52,08+	0,37	−0,39+	135	315	90	270	0. 0,00		0,00	90	270

XXI. — Latitude héliocentrique.

Argument = longitude vraie, moins longitude du nœud = $v - \theta$.

Nota. — Les signes de la latitude et de sa variation séculaire sont lus du même côté que l'argument.

Argum.		Latitude.	Diff.	Variation séculaire.	Argum.		Argum.		Latitude.	Diff.	Variation séculaire.	Argum.	
0°	180°	0°.0′.0″,00	438″,84	0″,00	180°	360°	45°	135°	+4°.56′.42″,31—	308″,77	+4″,45—	225°	315°
1	179	+0. 7.18,84—	438,71	+0,11—	181	359	46	134	5. 1.51,08—	303,28	+4,53—	226	314
2	178	0.14.37,55—	438,45	+0,22—	182	358	47	133	5. 6.54,36—	297,69	+4,60—	227	313
3	177	0.21.56,00—	438,05	+0,33—	183	357	48	132	5.11.52,05—	292,01	+4,68—	228	312
4	176	0.29.14,05—	437,52	+0,44—	184	356	49	131	5.16.44,06—	286,25	+4,75—	229	311
5	175	+0.36.31,57—	436,87	+0,55—	185	355	50	130	+5.21.30,31—	280,39	+4,82—	230	310
6	174	0.43.48,44—	436,08	+0,66—	186	354	51	129	5.26.10,70—	274,44	+4,89—	231	309
7	173	0.51. 4,52—	435,15	+0,76—	187	353	52	128	5.30.45,14—	268,42	+4,96—	232	308
8	172	0.58.19,67—	434,11	+0,87—	188	352	53	127	5.35.13,56—	262,31	+5,03—	233	307
9	171	1. 5.33,78—	432,93	+0,98—	189	351	54	126	5.39.35,87—	256,11	+5,10—	234	306
10	170	+1.12.46,71—	431,62	+1,09—	190	350	55	125	+5.43.51,98—	249,83	+5,16—	235	305
11	169	1.19.58,33—	430,18	+1,20—	191	349	56	124	5.48. 1,81—	243,49	+5,22—	236	304
12	168	1.27. 8,51—	428,60	+1,31—	192	348	57	123	5.52. 5,30—	237,06	+5,28—	237	303
13	167	1.34.17,11—	426,90	+1,41—	193	347	58	122	5.56. 2,36—	230,55	+5,34—	238	302
14	166	1.41.24,01—	425,08	+1,52—	194	346	59	121	5.59.52,91—	223,97	+5,40—	239	301
15	165	+1.48.29,09—	423,13	+1,63—	195	345	60	120	+6. 3.36,88—	217,33	+5,46—	240	300
16	164	1.55.32,22—	421,04	+1,73—	196	344	61	119	6. 7.14,21—	210,62	+5,51—	241	299
17	163	2. 2.33,26—	418,82	+1,83—	197	343	62	118	6.10.44,83—	203,84	+5,57—	242	298
18	162	2. 9.32,08—	416,49	+1,94—	198	342	63	117	6.14. 8,67—	196,99	+5,62—	243	297
19	161	2.16.28,57—	414,03	+2,04—	199	341	64	116	6.17.25,66—	190,09	+5,67—	244	296
20	160	+2.23.22,60—	411,44	+2,15—	200	340	65	115	+6.20.35,75—	183,12	+5,72—	245	295
21	159	2.30.14,04—	408,72	+2,25—	201	339	66	114	6.23.38,87—	176,10	+5,76—	246	294
22	158	2.37. 2,76—	405,89	+2,35—	202	338	67	113	6.26.34,97—	169,02	+5,81—	247	293
23	157	2.43.48,65—	402,94	+2,45—	203	337	68	112	6.29.23,99—	161,88	+5,85—	248	292
24	156	2.50.31,59—	399,86	+2,55—	204	336	69	111	6.32. 5,87—	154,70	+5,89—	249	291
25	155	+2.57.11,45—	396,66	+2,65—	205	335	70	110	+6.34.40,57—	147,47	+5,93—	250	290
26	154	3. 3.48,11—	393,33	+2,75—	206	334	71	109	6.37. 8,04—	140,20	+5,97—	251	289
27	153	3.10.21,44—	389,89	+2,85—	207	333	72	108	6.39.28,24—	132,87	+6,00—	252	288
28	152	3.16.51,33—	386,33	+2,95—	208	332	73	107	6.41.41,11—	125,50	+6,03—	253	287
29	151	3.23.17,66—	382,65	+3,05—	209	331	74	106	6.43.46,61—	118,10	+6,06—	254	286
30	150	+3.29.40,31—	378,86	+3,14—	210	330	75	105	+6.45.44,71—	110,65	+6,09—	255	285
31	149	3.35.59,17—	374,95	+3,23—	211	329	76	104	6.47.35,36—	103,17	+6,12—	256	284
32	148	3.42.14,12—	370,92	+3,33—	212	328	77	103	6.49.18,53—	95,67	+6,15—	257	283
33	147	3.48.25,04—	366,79	+3,42—	213	327	78	102	6.50.54,20—	88,13	+6,17—	258	282
34	146	3.54.31,83—	362,54	+3,52—	214	326	79	101	6.52.22,33—	80,56	+6,20—	259	281
35	145	+4. 0.34,37—	358,18	+3,61—	215	325	80	100	+6.53.42,89—	72,96	+6,22—	260	280
36	144	4. 6.32,55—	353,71	+3,69—	216	324	81	99	6.54.55,85—	65,34	+6,23—	261	279
37	143	4.12.26,26—	349,13	+3,78—	217	323	82	98	6.56. 1,19—	57,70	+6,25—	262	278
38	142	4.18.15,39—	344,45	+3,87—	218	322	83	97	6.56.58,89—	50,05	+6,27—	263	277
39	141	4.23.59,84—	339,66	+3,95—	219	321	84	96	6.57.48,94—	42,38	+6,28—	264	276
40	140	+4.29.39,50—	334,76	+4,04—	220	320	85	95	+6.58.31,32—	34,69	+6,29—	265	275
41	139	4.35.14,26—	329,76	+4,13—	221	319	86	94	6.59. 6,01—	26,99	+6,30—	266	274
42	138	4.40.44,02—	324,66	+4,21—	222	318	87	93	6.59.33,00—	19,28	+6,30—	267	273
43	137	4.46. 8,68—	319,46	+4,29—	223	317	88	92	6.59.52,28—	11,57	+6,31—	268	272
44	136	4.51.28,14—	314,17	+4,37—	224	316	89	91	7. 0. 3,85—	3,86	+6,31—	269	271
45	135	+4.56.42,31—	308,77	+4,45—	225	315	90	90	+7. 0. 7,71—	0,00	+6,31—	270	270

XXII. — Latitude.

Seconde partie $= -0'',000\,005\,6\,t^2 \sin(v - \theta)$.

On calculera ce terme directement quand on le croira utile.

XXIII. — Latitude. — *Perturbation produite par Vénus, lorsque Mercure est dans l'écliptique.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Passage par le nœud ascendant.

ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.
0	+ 1	800	− 9	1600	− 2	2400	−12	3200	− 5
50	2	850	− 7	1650	− 2	2450	− 9	3250	− 4
100	3	900	− 4	1700	− 1	2500	− 6	3300	− 2
150	4	950	− 1	1750	0	2550	− 2	3350	+ 1
200	5	1000	+ 2	1800	+ 1	2600	+ 1	3400	4
250	6	1050	5	1850	1	2650	4	3450	6
300	6	1100	7	1900	+ 1	2700	7	3500	8
350	5	1150	9	1950	0	2750	7	3550	9
400	4	1200	9	2000	− 2	2800	7	3600	9
450	+ 1	1250	8	2050	− 4	2850	6	3650	8
500	− 1	1300	6	2100	− 7	2900	4	3700	7
550	− 4	1350	4	2150	−10	2950	+ 2	3750	6
600	− 7	1400	+ 2	2200	−12	3000	− 1	3800	4
650	− 9	1450	0	2250	−14	3050	− 3	3850	2
700	−10	1500	− 1	2300	−14	3100	− 5	3900	+ 1
750	−10	1550	− 2	2350	−14	3150	− 5	3950	0
800	− 9	1600	− 2	2400	−12	3200	− 5	4000	+ 1

Passage par le nœud descendant.

ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.	ARG. l'.	PERT.
0	− 2	800	− 3	1600	− 2	2400	+ 1	3200	+ 3
50	− 6	850	− 4	1650	− 7	2450	− 1	3250	− 1
100	− 9	900	− 4	1700	−10	2500	− 2	3300	− 4
150	−12	950	− 4	1750	−13	2550	− 3	3350	− 6
200	−13	1000	− 2	1800	−14	2600	− 2	3400	− 6
250	−13	1050	0	1850	−14	2650	0	3450	− 6
300	−13	1100	+ 3	1900	−12	2700	+ 2	3500	− 4
350	−11	1150	6	1950	−10	2750	5	3550	− 1
400	− 9	1200	9	2000	− 6	2800	8	3600	+ 2
450	− 6	1250	12	2050	− 3	2850	10	3650	5
500	− 4	1300	14	2100	0	2900	13	3700	7
550	− 2	1350	14	2150	+ 3	2950	14	3750	8
600	− 1	1400	13	2200	4	3000	13	3800	8
650	− 1	1450	11	2250	4	3050	12	3850	7
700	− 1	1500	7	2300	4	3100	9	3900	5
750	− 2	1550	+ 3	2350	3	3150	6	3950	+ 2
800	− 3	1600	− 2	2400	+ 1	3200	+ 3	4000	− 2

XXIV. — Latitude. — *Perturbation produite par la Terre, lorsque Mercure est dans l'écliptique.*

Passage par le nœud ascendant. — La perturbation en latitude est sensiblement nulle.

Passage par le nœud descendant. — La perturbation de la latitude est égale à + 0",017.

XXV. — Latitude. — *Perturbation produite par Jupiter, lorsque Mercure est dans l'écliptique.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Passage par le nœud ascendant.

ARG. l^{iv}.	PERT.	ARG. l^{iv}.	PERT.	ARG. l^{iv}.	PERT.	ARG. l^{iv}.	PERT.
0	+ 21	1000	— 12	2000	+ 14	3000	— 23
200	17	1200	— 7	2200	+ 9	3200	— 19
400	+ 8	1400	+ 2	2400	0	3400	— 9
600	— 3	1600	10	2600	— 11	3600	+ 4
800	— 11	1800	15	2800	— 20	3800	16
1000	— 12	2000	+ 14	3000	— 23	4000	+ 21

Passage par le nœud descendant. — La perturbation est égale à la précédente changée de signe.

XXVI. — Latitude. — *Perturbation produite par Saturne, lorsque Mercure est dans l'écliptique.*

(La perturbation est exprimée en centièmes de seconde.)

Passage par le nœud ascendant.

ARG. l^{v}.	PERT.	ARG. l^{v}.	PERT.	ARG. l^{v}.	PERT.	ARG. l^{v}.	PERT.
0	+ 1	1000	— 2	2000	+ 3	3000	— 2
200	0	1200	— 1	2200	2	3200	— 1
400	— 1	1400	+ 1	2400	+ 1	3400	0
600	— 2	1600	2	2600	— 1	3600	+ 1
800	— 2	1800	3	2800	— 2	3800	1
1000	— 2	2000	+ 3	3000	— 2	4000	+ 1

Passage par le nœud descendant. — La perturbation est égale à la précédente changée de signe.

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.*

(La variation séculaire est exprimée en unités du 7e ordre décimal.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
° ′				° ′	° ′				° ′
0. 0	0,307 5094	6	− 76	360. 0	7. 0	0,308 4471	450	− 75	353. 0
0.10	0,307 5100	16	− 76	359.50	7.10	0,308 4921	460	− 75	352.50
0.20	0,307 5116	27	− 76	359.40	7.20	0,308 5381	470	− 75	352.40
0.30	0,307 5143	37	− 76	359.30	7.30	0,308 5851	481	− 74	352.30
0.40	0,307 5180	48	− 76	359.20	7.40	0,308 6332	491	− 74	352.20
0.50	0,307 5228	59	− 76	359.10	7.50	0,308 6823	502	− 74	352.10
1. 0	0,307 5287	69	− 76	359. 0	8. 0	0,308 7325	512	− 74	352. 0
1.10	0,307 5356	80	− 76	358.50	8.10	0,308 7837	522	− 74	351.50
1.20	0,307 5436	91	− 76	358.40	8.20	0,308 8359	533	− 74	351.40
1.30	0,307 5527	101	− 76	358.30	8.30	0,308 8892	543	− 74	351.30
1.40	0,307 5628	112	− 76	358.20	8.40	0,308 9435	553	− 74	351.20
1.50	0,307 5740	123	− 76	358.10	8.50	0,308 9988	564	− 74	351.10
2. 0	0,307 5863	133	− 76	358. 0	9. 0	0,309 0552	574	− 74	351. 0
2.10	0,307 5996	144	− 76	357.50	9.10	0,309 1126	584	− 74	350.50
2.20	0,307 6140	155	− 76	357.40	9.20	0,309 1710	594	− 74	350.40
2.30	0,307 6295	165	− 76	357.30	9.30	0,309 2304	605	− 74	350.30
2.40	0,307 6460	176	− 76	357.20	9.40	0,309 2909	615	− 74	350.20
2.50	0,307 6636	186	− 76	357.10	9.50	0,309 3524	624	− 73	350.10
3. 0	0,307 6822	197	− 76	357. 0	10. 0	0,309 4148	635	− 73	350. 0
3.10	0,307 7019	208	− 76	356.50	10.10	0,309 4783	645	− 73	349.50
3.20	0,307 7227	218	− 75	356.40	10.20	0,309 5428	655	− 73	349.40
3.30	0,307 7445	229	− 75	356.30	10.30	0,309 6083	666	− 73	349.30
3.40	0,307 7674	240	− 75	356.20	10.40	0,309 6749	675	− 73	349.20
3.50	0,307 7914	250	− 75	356.10	10.50	0,309 7424	686	− 73	349.10
4. 0	0,307 8164	261	− 75	356. 0	11. 0	0,309 8110	696	− 73	349. 0
4.10	0,307 8425	271	− 75	355.50	11.10	0,309 8806	706	− 73	348.50
4.20	0,307 8696	282	− 75	355.40	11.20	0,309 9512	716	− 73	348.40
4.30	0,307 8978	292	− 75	355.30	11.30	0,310 0228	725	− 73	348.30
4.40	0,307 9270	303	− 75	355.20	11.40	0,310 0953	736	− 73	348.20
4.50	0,307 9573	314	− 75	355.10	11.50	0,310 1689	745	− 73	348.10
5. 0	0,307 9887	324	− 75	355. 0	12. 0	0,310 2434	756	− 73	348. 0
5.10	0,308 0211	335	− 75	354.50	12.10	0,310 3190	765	− 72	347.50
5.20	0,308 0546	345	− 75	354.40	12.20	0,310 3955	776	− 72	347.40
5.30	0,308 0891	356	− 75	354.30	12.30	0,310 4731	785	− 72	347.30
5.40	0,308 1247	366	− 75	354.20	12.40	0,310 5516	795	− 72	347.20
5.50	0,308 1613	377	− 75	354.10	12.50	0,310 6311	805	− 72	347.10
6. 0	0,308 1990	387	− 75	354. 0	13. 0	0,310 7116	815	− 72	347. 0
6.10	0,308 2377	398	− 75	353.50	13.10	0,310 7931	824	− 72	346.50
6.20	0,308 2775	408	− 75	353.40	13.20	0,310 8755	836	− 72	346.40
6.30	0,308 3183	419	− 75	353.30	13.30	0,310 9591	844	− 72	346.30
6.40	0,308 3602	429	− 75	353.20	13.40	0,311 0435	854	− 72	346.20
6.50	0,308 4031	440	− 75	353.10	13.50	0,311 1289	863	− 72	346.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
14°. 0′	0,311 2152	873	— 72	346°. 0′	21°. 0′	0,315 6875	1257	— 67	339°. 0′
14.10	0,311 3025	883	— 72	345.50	21.10	0,315 8132	1266	— 66	338.50
14.20	0,311 3908	893	— 72	345.40	21.20	0,315 9398	1275	— 66	338.40
14.30	0,311 4801	902	— 72	345.30	21.30	0,316 0673	1285	— 66	338.30
14.40	0,311 5703	912	— 72	345.20	21.40	0,316 1958	1291	— 66	338.20
14.50	0,311 6615	920	— 72	345.10	21.50	0,316 3249	1299	— 66	338.10
15. 0	0,311 7535	931	— 71	345. 0	22. 0	0,316 4548	1309	— 66	338. 0
15.10	0,311 8466	941	— 71	344.50	22.10	0,316 5857	1317	— 65	337.50
15.20	0,311 9407	950	— 71	344.40	22.20	0,316 7174	1325	— 65	337.40
15.30	0,312 0357	960	— 71	344.30	22.30	0,316 8499	1334	— 65	337.30
15.40	0,312 1317	969	— 71	344.20	22.40	0,316 9833	1342	— 65	337.20
15.50	0,312 2286	978	— 71	344.10	22.50	0,317 1175	1350	— 65	337.10
16. 0	0,312 3264	988	— 71	344. 0	23. 0	0,317 2525	1358	— 65	337. 0
16.10	0,312 4252	997	— 71	343.50	23.10	0,317 3883	1367	— 64	336.50
16.20	0,312 5249	1006	— 70	343.40	23.20	0,317 5250	1375	— 64	336.40
16.30	0,312 6255	1016	— 70	343.30	23.30	0,317 6625	1383	— 64	336.30
16.40	0,312 7271	1025	— 70	343.20	23.40	0,317 8008	1391	— 64	336.20
16.50	0,312 8296	1035	— 70	343.10	23.50	0,317 9399	1398	— 64	336.10
17. 0	0,312 9331	1044	— 70	343. 0	24. 0	0,318 0797	1408	— 64	336. 0
17.10	0,313 0375	1053	— 70	342.50	24.10	0,318 2205	1415	— 63	335.50
17.20	0,313 1428	1061	— 70	342.40	24.20	0,318 3620	1423	— 63	335.40
17.30	0,313 2489	1071	— 70	342.30	24.30	0,318 5043	1431	— 63	335.30
17.40	0,313 3560	1081	— 70	342.20	24.40	0,318 6474	1439	— 63	335.20
17.50	0,313 4641	1090	— 69	342.10	24.50	0,318 7913	1446	— 63	335.10
18. 0	0,313 5731	1099	— 69	342. 0	25. 0	0,318 9359	1455	— 63	335. 0
18.10	0,313 6830	1108	— 69	341.50	25.10	0,319 0814	1462	— 62	334.50
18.20	0,313 7938	1117	— 69	341.40	25.20	0,319 2276	1470	— 62	334.40
18.30	0,313 9055	1125	— 69	341.30	25.30	0,319 3746	1478	— 62	334.30
18.40	0,314 0180	1135	— 69	341.20	25.40	0,319 5224	1485	— 62	334.20
18.50	0,314 1315	1144	— 69	341.10	25.50	0,319 6709	1493	— 62	334.10
19. 0	0,314 2459	1153	— 68	341. 0	26. 0	0,319 8202	1501	— 61	334. 0
19.10	0,314 3612	1162	— 68	340.50	26.10	0,319 9703	1509	— 61	333.50
19.20	0,314 4774	1171	— 68	340.40	26.20	0,320 1212	1516	— 61	333.40
19.30	0,314 5945	1179	— 68	340.30	26.30	0,320 2728	1523	— 61	333.30
19.40	0,314 7124	1188	— 68	340.20	26.40	0,320 4251	1531	— 61	333.20
19.50	0,314 8312	1196	— 68	340.10	26.50	0,320 5782	1539	— 60	333.10
20. 0	0,314 9508	1207	— 68	340. 0	27. 0	0,320 7321	1546	— 60	333. 0
20.10	0,315 0715	1215	— 67	339.50	27.10	0,320 8867	1554	— 60	332.50
20.20	0,315 1930	1223	— 67	339.40	27.20	0,321 0421	1560	— 60	332.40
20.30	0,315 3153	1232	— 67	339.30	27.30	0,321 1981	1568	— 60	332.30
20.40	0,315 4385	1241	— 67	339.20	27.40	0,321 3549	1575	— 59	332.20
20.50	0,315 5626	1249	— 67	339.10	27.50	0,321 5124	1583	— 59	332.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
28°. 0′	0,321 6707	1590	— 59	332°. 0′	35°. 0′	0,328 9287	1863	— 50	325°. 0′
28.10	0,321 8297	1597	— 59	331.50	35.10	0,329 1150	1869	— 50	324.50
28.20	0,321 9894	1605	— 59	331.40	35.20	0,329 3019	1874	— 49	324.40
28.30	0,322 1499	1612	— 58	331.30	35.30	0,329 4893	1879	— 49	324.30
28.40	0,322 3111	1618	— 58	331.20	35.40	0,329 6772	1885	— 49	324.20
28.50	0,322 4729	1626	— 58	331.10	35.50	0,329 8657	1891	— 49	324.10
29. 0	0,322 6355	1632	— 58	331. 0	36. 0	0,330 0548	1897	— 48	324. 0
29.10	0,322 7987	1640	— 58	330.50	36.10	0,330 2445	1901	— 48	323.50
29.20	0,322 9627	1647	— 57	330.40	36.20	0,330 4346	1907	— 48	323.40
29.30	0,323 1274	1653	— 57	330.30	36.30	0,330 6253	1913	— 48	323.30
29.40	0,323 2927	1660	— 57	330.20	36.40	0,330 8166	1918	— 47	323.20
29.50	0,323 4587	1667	— 57	330.10	36.50	0,331 0084	1923	— 47	323.10
30. 0	0,323 6254	1674	— 57	330. 0	37. 0	0,331 2007	1929	— 47	323. 0
30.10	0,323 7928	1681	— 56	329.50	37.10	0,331 3936	1934	— 47	322.50
30.20	0,323 9609	1688	— 56	329.40	37.20	0,331 5870	1940	— 47	322.40
30.30	0,324 1297	1694	— 56	329.30	37.30	0,331 7810	1945	— 46	322.30
30.40	0,324 2991	1701	— 56	329.20	37.40	0,331 9755	1949	— 46	322.20
30.50	0,324 4692	1708	— 55	329.10	37.50	0,332 1704	1955	— 46	322.10
31. 0	0,324 6400	1715	— 55	329. 0	38. 0	0,332 3659	1960	— 46	322. 0
31.10	0,324 8115	1721	— 55	328.50	38.10	0,332 5619	1966	— 45	321.50
31.20	0,324 9836	1727	— 55	328.40	38.20	0,332 7585	1970	— 45	321.40
31.30	0,325 1563	1735	— 55	328.30	38.30	0,332 9555	1975	— 45	321.30
31.40	0,325 3298	1740	— 54	328.20	38.40	0,333 1530	1982	— 45	321.20
31.50	0,325 5038	1746	— 54	328.10	38.50	0,333 3512	1985	— 44	321.10
32. 0	0,325 6784	1753	— 54	328. 0	39. 0	0,333 5497	1989	— 44	321. 0
32.10	0,325 8537	1760	— 54	327.50	39.10	0,333 7486	1995	— 44	320.50
32.20	0,326 0297	1766	— 53	327.40	39.20	0,333 9481	2000	— 44	320.40
32.30	0,326 2063	1773	— 53	327.30	39.30	0,334 1481	2005	— 43	320.30
32.40	0,326 3836	1778	— 53	327.20	39.40	0,334 3486	2010	— 43	320.20
32.50	0,326 5614	1784	— 53	327.10	39.50	0,334 5496	2014	— 43	320.10
33. 0	0,326 7398	1790	— 53	327. 0	40. 0	0,334 7510	2018	— 43	320. 0
33.10	0,326 9188	1797	— 52	326.50	40.10	0,334 9528	2024	— 43	319.50
33.20	0,327 0985	1804	— 52	326.40	40.20	0,335 1552	2028	— 43	319.40
33.30	0,327 2789	1810	— 52	326.30	40.30	0,335 3580	2032	— 43	319.30
33.40	0,327 4599	1816	— 52	326.20	40.40	0,335 5612	2038	— 43	319.20
33.50	0,327 6415	1821	— 51	326.10	40.50	0,335 7650	2042	— 42	319.10
34. 0	0,327 8236	1827	— 51	326. 0	41. 0	0,335 9692	2047	— 42	319. 0
34.10	0,328 0063	1833	— 51	325.50	41.10	0,336 1739	2050	— 42	318.50
34.20	0,328 1896	1839	— 51	325.40	41.20	0,336 3789	2057	— 42	318.40
34.30	0,328 3735	1845	— 50	325.30	41.30	0,336 5846	2060	— 41	318.30
34.40	0,328 5580	1851	— 50	325.20	41.40	0,336 7906	2064	— 41	318.20
34.50	0,328 7431	1856	— 50	325.10	41.50	0,336 9970	2068	— 41	318.10

XXVII. — RAYON VECTEUR. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
42° 0′	0,337 2038	2073	— 41	318° 0′	49° 0′	0,346 2372	2222	— 29	311° 0′
42.10	0,337 4111	2077	— 40	317.50	49.10	0,346 4594	2226	— 29	310.50
42.20	0,337 6188	2081	— 40	317.40	49.20	0,346 6820	2229	— 29	310.40
42.30	0,337 8269	2085	— 40	317.30	49.30	0,346 9049	2231	— 29	310.30
42.40	0,338 0354	2089	— 39	317.20	49.40	0,347 1280	2234	— 28	310.20
42.50	0,338 2443	2094	— 39	317.10	49.50	0,347 3514	2236	— 28	310.10
43. 0	0,338 4537	2098	— 39	317. 0	50. 0	0,347 5750	2241	— 28	310. 0
43.10	0,338 6635	2102	— 39	316.50	50.10	0,347 7991	2242	— 27	309.50
43.20	0,338 8737	2105	— 38	316.40	50.20	0,348 0233	2245	— 27	309.40
43.30	0,339 0842	2110	— 38	316.30	50.30	0,348 2478	2247	— 27	309.30
43.40	0,339 2952	2114	— 38	316.20	50.40	0,348 4725	2249	— 27	309.20
43.50	0,339 5066	2118	— 38	316.10	50.50	0,348 6974	2253	— 26	309.10
44. 0	0,339 7184	2121	— 37	316. 0	51. 0	0,348 9227	2255	— 26	309. 0
44.10	0,339 9305	2125	— 37	315.50	51.10	0,349 1482	2258	— 26	308.50
44.20	0,340 1430	2130	— 37	315.40	51.20	0,349 3740	2260	— 25	308.40
44.30	0,340 3560	2134	— 37	315.30	51.30	0,349 6000	2262	— 25	308.30
44.40	0,340 5694	2137	— 36	315.20	51.40	0,349 8262	2265	— 25	308.20
44.50	0,340 7831	2140	— 36	315.10	51.50	0,350 0527	2267	— 25	308.10
45. 0	0,340 9971	2144	— 36	315. 0	52. 0	0,350 2794	2269	— 24	308. 0
45.10	0,341 2115	2148	— 35	314.50	52.10	0,350 5063	2272	— 24	307.50
45.20	0,341 4263	2152	— 35	314.40	52.20	0,350 7335	2274	— 24	307.40
45.30	0,341 6415	2155	— 35	314.30	52.30	0,350 9609	2276	— 24	307.30
45.40	0,341 8570	2158	— 35	314.20	52.40	0,351 1885	2279	— 23	307.20
45.50	0,342 0728	2162	— 34	314.10	52.50	0,351 4164	2281	— 23	307.10
46. 0	0,342 2890	2166	— 34	314. 0	53. 0	0,351 6445	2283	— 23	307. 0
46.10	0,342 5056	2169	— 34	313.50	53.10	0,351 8728	2285	— 22	306.50
46.20	0,342 7225	2172	— 34	313.40	53.20	0,352 1013	2287	— 22	306.40
46.30	0,342 9397	2175	— 33	313.30	53.30	0,352 3300	2289	— 22	306.30
46.40	0,343 1572	2179	— 33	313.20	53.40	0,352 5589	2291	— 22	306.20
46.50	0,343 3751	2183	— 33	313.10	53.50	0,352 7880	2293	— 21	306.10
47. 0	0,343 5934	2187	— 33	313. 0	54. 0	0,353 0173	2295	— 21	306. 0
47.10	0,343 8121	2189	— 32	312.50	54.10	0,353 2468	2297	— 21	305.50
47.20	0,344 0310	2191	— 32	312.40	54.20	0,353 4765	2299	— 20	305.40
47.30	0,344 2501	2196	— 32	312.30	54.30	0,353 7064	2301	— 20	305.30
47.40	0,344 4697	2199	— 31	312.20	54.40	0,353 9365	2303	— 20	305.20
47.50	0,344 6896	2202	— 31	312.10	54.50	0,354 1668	2304	— 20	305.10
48. 0	0,344 9098	2205	— 31	312. 0	55. 0	0,354 3972	2306	— 19	305. 0
48.10	0,345 1303	2207	— 31	311.50	55.10	0,354 6278	2308	— 19	304.50
48.20	0,345 3510	2211	— 30	311.40	55.20	0,354 8586	2310	— 19	304.40
48.30	0,345 5721	2214	— 30	311.30	55.30	0,355 0896	2312	— 19	304.30
48.40	0,345 7935	2217	— 30	311.20	55.40	0,355 3208	2313	— 18	304.20
48.50	0,346 0152	2220	— 30	311.10	55.50	0,355 5521	2316	— 18	304.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne
56° 0'	0,355 7837	2317	— 18	304° 0'	63° 0'	0,365 6196	2360	— 7	297° 0'
56.10	0,356 0154	2318	— 17	303.50	63.10	0,365 8556	2361	— 7	296.50
56.20	0,356 2472	2319	— 17	303.40	63.20	0,366 0917	2361	— 6	296.40
56.30	0,356 4791	2321	— 17	303.30	63.30	0,366 3278	2362	— 6	296.30
56.40	0,356 7112	2323	— 17	303.20	63.40	0,366 5640	2362	— 6	296.20
56.50	0,356 9435	2324	— 16	303.10	63.50	0,366 8002	2363	— 6	296.10
57. 0	0,357 1759	2326	— 16	303. 0	64. 0	0,367 0365	2363	— 5	296. 0
57.10	0,357 4085	2327	— 16	302.50	64.10	0,367 2728	2363	— 5	295.50
57.20	0,357 6412	2329	— 15	302.40	64.20	0,367 5091	2364	— 5	295.40
57.30	0,357 8741	2330	— 15	302.30	64.30	0,367 7455	2364	— 5	295.30
57.40	0,358 1071	2331	— 15	302.20	64.40	0,367 9819	2364	— 4	295.20
57.50	0,358 3402	2332	— 15	302.10	64.50	0,368 2183	2364	— 4	295.10
58. 0	0,358 5734	2334	— 14	302. 0	65. 0	0,368 4547	2365	— 4	295. 0
58.10	0,358 8068	2335	— 14	301.50	65.10	0,368 6912	2365	— 3	294.50
58.20	0,359 0403	2336	— 14	301.40	65.20	0,368 9277	2365	— 3	294.40
58.30	0,359 2739	2339	— 14	301.30	65.30	0,369 1642	2365	— 3	294.30
58.40	0,359 5078	2339	— 14	301.20	65.40	0,369 4007	2365	— 3	294.20
58.50	0,359 7417	2340	— 14	301.10	65.50	0,369 6372	2366	— 2	294.10
59. 0	0,359 9757	2341	— 14	301. 0	66. 0	0,369 8738	2365	— 2	294. 0
59.10	0,360 2098	2342	— 13	300.50	66.10	0,370 1103	2365	— 2	293.50
59.20	0,360 4440	2343	— 13	300.40	66.20	0,370 3468	2367	— 2	293.40
59.30	0,360 6783	2345	— 13	300.30	66.30	0,370 5835	2366	— 1	293.30
59.40	0,360 9128	2345	— 13	300.20	66.40	0,370 8201	2366	— 1	293.20
59.50	0,361 1473	2346	— 12	300.10	66.50	0,371 0567	2365	— 1	293.10
60. 0	0,361 3819	2347	— 12	300. 0	67. 0	0,371 2932	2366	— 1	293. 0
60.10	0,361 6166	2349	— 12	299.50	67.10	0,371 5298	2365	0	292.50
60.20	0,361 8515	2350	— 11	299.40	67.20	0,371 7663	2366	0	292.40
60.30	0,362 0865	2350	— 11	299.30	67.30	0,372 0029	2365	0	292.30
60.40	0,362 3215	2350	— 11	299.20	67.40	0,372 2394	2365	+ 1	292.20
60.50	0,362 5565	2353	— 11	299.10	67.50	0,372 4759	2365	1	292.10
61. 0	0,362 7918	2353	— 10	299. 0	68. 0	0,372 7124	2365	1	292. 0
61.10	0,363 0271	2353	— 10	298.50	68.10	0,372 9489	2365	1	291.50
61.20	0,363 2624	2355	— 10	298.40	68.20	0,373 1854	2364	2	291.40
61.30	0,363 4979	2355	— 9	298.30	68.30	0,373 4218	2364	2	291.30
61.40	0,363 7334	2355	— 9	298.20	68.40	0,373 6582	2364	2	291.20
61.50	0,363 9689	2356	— 9	298.10	68.50	0,373 8946	2363	2	291.10
62. 0	0,364 2045	2357	— 9	298. 0	69. 0	0,374 1309	2363	3	291. 0
62.10	0,364 4402	2358	— 8	297.50	69.10	0,374 3672	2363	3	290.50
62.20	0,364 6760	2358	— 8	297.40	69.20	0,374 6035	2364	3	290.40
62.30	0,364 9118	2359	— 8	297.30	69.30	0,374 8399	2362	4	290.30
62.40	0,365 1477	2359	— 8	297.20	69.40	0,375 0761	2362	4	290.20
62.50	0,365 3836	2360	— 7	297.10	69.50	0,375 3123	2361	+ 4	290.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite).

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
70° 0′	0,375 5484	2361	+ 4	290° 0	77° 0′	0,385 4008	2324	+ 14	283° 0
70.10	0,375 7845	2361	5	289.50	77.10	0,385 6332	2323	14	282.50
70.20	0,376 0206	2359	5	289.40	77.20	0,385 8655	2322	15	282.40
70.30	0,376 2565	2359	5	289.30	77.30	0,386 0977	2320	15	282.30
70.40	0,376 4924	2359	5	289.20	77.40	0,386 3297	2319	15	282.20
70.50	0,376 7283	2359	6	289.10	77.50	0,386 5616	2318	15	282.10
71. 0	0,376 9642	2358	6	289. 0	78. 0	0,386 7934	2316	16	282. 0
71.10	0,377 2000	2357	6	288.50	78.10	0,387 0250	2315	16	281.50
71.20	0,377 4357	2356	6	288.40	78.20	0,387 2565	2314	16	281.40
71.30	0,377 6713	2356	7	288.30	78.30	0,387 4879	2312	16	281.30
71.40	0,377 9069	2355	7	288.20	78.40	0,387 7191	2310	17	281.20
71.50	0,378 1424	2354	7	288.10	78.50	0,387 9501	2309	17	281.10
72. 0	0,378 3778	2355	7	288. 0	79. 0	0,388 1810	2308	17	281. 0
72.10	0,378 6133	2353	8	287.50	79.10	0,388 4118	2306	17	280.50
72.20	0,378 8486	2353	8	287.40	79.20	0,388 6424	2305	17	280.40
72.30	0,379 0839	2352	8	287.30	79.30	0,388 8729	2303	18	280.30
72.40	0,379 3191	2351	8	287.20	79.40	0,389 1032	2302	18	280.20
72.50	0,379 5542	2350	9	287.10	79.50	0,389 3334	2300	18	280.10
73. 0	0,379 7892	2349	9	287. 0	80. 0	0,389 5634	2299	18	280. 0
73.10	0,380 0241	2349	9	286.50	80.10	0,389 7933	2297	19	279.50
73.20	0,380 2590	2347	10	286.40	80.20	0,390 0230	2296	19	279.40
73.30	0,380 4937	2347	10	286.30	80.30	0,390 2526	2294	19	279.30
73.40	0,380 7284	2346	10	286.20	80.40	0,390 4820	2292	19	279.20
73.50	0,380 9630	2345	10	286.10	80.50	0,390 7112	2290	19	279.10
74. 0	0,381 1975	2343	11	286. 0	81. 0	0,390 9402	2289	20	279. 0
74.10	0,381 4318	2343	11	285.50	81.10	0,391 1691	2287	20	278.50
74.20	0,381 6661	2342	11	285.40	81.20	0,391 3978	2285	20	278.40
74.30	0,381 9003	2342	11	285.30	81.30	0,391 6263	2285	20	278.30
74.40	0,382 1345	2340	12	285.20	81.40	0,391 8548	2282	21	278.20
74.50	0,382 3685	2339	12	285.10	81.50	0,392 0830	2281	21	278.10
75. 0	0,382 6024	2338	12	285. 0	82. 0	0,392 3111	2279	21	278. 0
75.10	0,382 8362	2338	12	284.50	82.10	0,392 5390	2276	21	277.50
75.20	0,383 0700	2336	13	284.40	82.20	0,392 7666	2275	22	277.40
75.30	0,383 3036	2335	13	284.30	82.30	0,392 9941	2273	22	277.30
75.40	0,383 5371	2334	13	284.20	82.40	0,393 2214	2271	22	277.20
75.50	0,383 7705	2332	13	284.10	82.50	0,393 4485	2270	22	277.10
76. 0	0,384 0037	2332	14	284. 0	83. 0	0,393 6755	2268	23	277. 0
76.10	0,384 2369	2330	14	283.50	83.10	0,393 9023	2266	23	276.50
76.20	0,384 4699	2329	14	283.40	83.20	0,394 1289	2264	23	276.40
76.30	0,384 7028	2328	14	283.30	83.30	0,394 3553	2262	23	276.30
76.40	0,384 9356	2327	14	283.20	83.40	0,394 5815	2260	24	276.20
76.50	0,385 1683	2325	+ 14	283.10	83.50	0,394 8075	2259	+ 24	276.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
84° 0′	0,395 0334	2256	+ 24	276° 0′	91° 0′	0,404 3265	2162	+ 33	269° 0′
84.10	0,395 2590	2255	24	275.50	91.10	0,404 5427	2160	33	268.50
84.20	0,395 4845	2252	24	275.40	91.20	0,404 7587	2158	34	268.40
84.30	0,395 7097	2251	25	275.30	91.30	0,404 9745	2155	34	268.30
84.40	0,395 9348	2248	25	275.20	91.40	0,405 1900	2153	34	268.20
84.50	0,396 1596	2246	25	275.10	91.50	0,405 4053	2150	34	268.10
85. 0	0,396 3842	2246	25	275. 0	92. 0	0,405 6203	2148	34	268. 0
85.10	0,396 6088	2243	26	274.50	92.10	0,405 8351	2145	35	267.50
85.20	0,396 8331	2241	26	274.40	92.20	0,406 0496	2142	35	267.40
85.30	0,397 0572	2238	26	274.30	92.30	0,406 2638	2140	35	267.30
85.40	0,397 2810	2236	26	274.20	92.40	0,406 4778	2137	35	267.20
85.50	0,397 5046	2234	26	274.10	92.50	0,406 6915	2134	35	267.10
86. 0	0,397 7280	2232	27	274. 0	93. 0	0,406 9049	2132	36	267. 0
86.10	0,397 9512	2230	27	273.50	93.10	0,407 1181	2129	36	266.50
86.20	0,398 1742	2228	27	273.40	93.20	0,407 3310	2127	36	266.40
86.30	0,398 3970	2226	27	273.30	93.30	0,407 5437	2124	36	266.30
86.40	0,398 6196	2224	28	273.20	93.40	0,407 7561	2121	36	266.20
86.50	0,398 8420	2220	28	273.10	93.50	0,407 9682	2118	37	266.10
87. 0	0,399 0640	2219	28	273. 0	94. 0	0,408 1800	2116	37	266. 0
87.10	0,399 2859	2217	28	272.50	94.10	0,408 3916	2113	37	265.50
87.20	0,399 5076	2215	28	272.40	94.20	0,408 6029	2111	37	265.40
87.30	0,399 7291	2212	29	272.30	94.30	0,408 8140	2108	37	265.30
87.40	0,399 9503	2210	29	272.20	94.40	0,409 0248	2105	38	265.20
87.50	0,400 1713	2208	29	272.10	94.50	0,409 2353	2102	38	265.10
88. 0	0,400 3921	2207	29	272. 0	95. 0	0,409 4455	2099	38	265. 0
88.10	0,400 6128	2204	30	271.50	95.10	0,409 6554	2097	38	264.50
88.20	0,400 8332	2201	30	271.40	95.20	0,409 8651	2094	38	264.40
88.30	0,401 0533	2199	30	271.30	95.30	0,410 0745	2091	39	264.30
88.40	0,401 2732	2196	30	271.20	95.40	0,410 2836	2088	39	264.20
88.50	0,401 4928	2194	30	271.10	95.50	0,410 4924	2085	39	264.10
89. 0	0,401 7122	2192	31	271. 0	96. 0	0,410 7009	2083	39	264. 0
89.10	0,401 9314	2189	31	270.50	96.10	0,410 9092	2080	39	263.50
89.20	0,402 1503	2187	31	270.40	96.20	0,411 1172	2077	40	263.40
89.30	0,402 3690	2185	31	270.30	96.30	0,411 3249	2073	40	263.30
89.40	0,402 5875	2182	32	270.20	96.40	0,411 5322	2071	40	263.20
89.50	0,402 8057	2179	32	270.10	96.50	0,411 7393	2068	40	263.10
90. 0	0,403 0236	2178	32	270. 0	97. 0	0,411 9461	2066	40	263. 0
90.10	0,403 2414	2175	32	269.50	97.10	0,412 1527	2063	40	262.50
90.20	0,403 4589	2173	32	269.40	97.20	0,412 3590	2060	41	262.40
90.30	0,403 6762	2170	33	269.30	97.30	0,412 5650	2056	41	262.30
90.40	0,403 8932	2168	33	269.20	97.40	0,412 7706	2053	41	262.20
90.50	0,404 1100	2165	+ 33	269.10	97.50	0,412 9759	2051	+ 41	262.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
98°. 0′	0,413 1810	2048	+ 41	262°. 0′	105°. 0′	0,421 5158	1915	+ 48	255°. 0′
98.10	0,413 3858	2044	42	261.50	105.10	0,421 7073	1912	48	254.50
98.20	0,413 5902	2042	42	261.40	105.20	0,421 8985	1909	48	254.40
98.30	0,413 7944	2039	42	261.30	105.30	0,422 0894	1905	48	254.30
98.40	0,413 9983	2036	42	261.20	105.40	0,422 2799	1902	48	254.20
98.50	0,414 2019	2033	42	261.10	105.50	0,422 4701	1898	48	254.10
99. 0	0,414 4052	2030	42	261. 0	106. 0	0,422 6599	1894	49	254. 0
99.10	0,414 6082	2027	43	260.50	106.10	0,422 8493	1892	49	253.50
99.20	0,414 8109	2024	43	260.40	106.20	0,423 0385	1889	49	253.40
99.30	0,415 0133	2021	43	260.30	106.30	0,423 2274	1885	49	253.30
99.40	0,415 2154	2017	43	260.20	106.40	0,423 4159	1882	49	253.20
99.50	0,415 4171	2014	43	260.10	106.50	0,423 6041	1878	49	253.10
100. 0	0,415 6185	2011	43	260. 0	107. 0	0,423 7919	1875	50	253. 0
100.10	0,415 8196	2009	43	259.50	107.10	0,423 9794	1871	50	252.50
100.20	0,416 0205	2006	43	259.40	107.20	0,424 1665	1867	50	252.40
100.30	0,416 2211	2002	43	259.30	107.30	0,424 3532	1865	50	252.30
100.40	0,416 4213	2000	43	259.20	107.40	0,424 5397	1861	50	252.20
100.50	0,416 6213	1996	43	259.10	107.50	0,424 7258	1858	50	252.10
101. 0	0,416 8209	1992	44	259. 0	108. 0	0,424 9116	1855	50	252. 0
101.10	0,417 0201	1990	44	258.50	108.10	0,425 0971	1851	51	251.50
101.20	0,417 2191	1987	44	258.40	108.20	0,425 2822	1847	51	251.40
101.30	0,417 4178	1983	44	258.30	108.30	0,425 4669	1843	51	251.30
101.40	0,417 6161	1981	44	258.20	108.40	0,425 6512	1840	51	251.20
101.50	0,417 8142	1977	44	258.10	108.50	0,425 8352	1837	51	251.10
102. 0	0,418 0119	1974	45	258. 0	109. 0	0,426 0189	1834	51	251. 0
102.10	0,418 2093	1971	45	257.50	109.10	0,426 2023	1830	51	250.50
102.20	0,418 4064	1967	45	257.40	109.20	0,426 3853	1826	51	250.40
102.30	0,418 6031	1965	45	257.30	109.30	0,426 5679	1823	52	250.30
102.40	0,418 7996	1962	45	257.20	109.40	0,426 7502	1819	52	250.20
102.50	0,418 9958	1958	45	257.10	109.50	0,426 9321	1815	52	250.10
103. 0	0,419 1916	1955	46	257. 0	110. 0	0,427 1136	1812	52	250. 0
103.10	0,419 3871	1951	46	256.50	110.10	0,427 2948	1809	52	249.50
103.20	0,419 5822	1948	46	256.40	110.20	0,427 4757	1805	52	249.40
103.30	0,419 7770	1945	46	256.30	110.30	0,427 6562	1801	52	249.30
103.40	0,419 9715	1942	46	256.20	110.40	0,427 8363	1798	53	249.20
103.50	0,420 1657	1939	46	256.10	110.50	0,428 0161	1794	53	249.10
104. 0	0,420 3596	1936	47	256. 0	111. 0	0,428 1955	1790	53	249. 0
104.10	0,420 5532	1932	47	255.50	111.10	0,428 3745	1787	53	248.50
104.20	0,420 7464	1929	47	255.40	111.20	0,428 5532	1783	53	248.40
104.30	0,420 9393	1925	47	255.30	111.30	0,428 7315	1780	53	248.30
104.40	0,421 1318	1922	47	255.20	111.40	0,428 9095	1776	54	248.20
104.50	0,421 3240	1918	+ 47	255.10	111.50	0,429 0871	1773	+ 54	248.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique*. (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
112° 0′	0,429 2644	1769	+ 54	248° 0′	119° 0′	0,436 3733	1611	+ 59	241° 0
112.10	0,429 4413	1765	54	247.50	119.10	0,436 5344	1608	59	240.50
112.20	0,429 6178	1761	54	247.40	119.20	0,436 6952	1603	60	240.40
112.30	0,429 7939	1758	54	247.30	119.30	0,436 8555	1599	60	240.30
112.40	0,429 9697	1754	54	247.20	119.40	0,437 0154	1595	60	240.20
112.50	0,430 1451	1751	55	247.10	119.50	0,437 1749	1591	60	240.10
113. 0	0,430 3202	1747	55	247. 0	120. 0	0,437 3340	1587	60	240. 0
113.10	0,430 4949	1744	55	246.50	120.10	0,437 4927	1584	60	239.50
113.20	0,430 6693	1739	55	246.40	120.20	0,437 6511	1580	60	239.40
113.30	0,430 8432	1735	55	246.30	120.30	0,437 8091	1576	60	239.30
113.40	0,431 0167	1732	55	246.20	120.40	0,437 9667	1572	60	239.20
113.50	0,431 1899	1730	55	246.10	120.50	0,438 1239	1568	61	239.10
114. 0	0,431 3629	1725	56	246. 0	121. 0	0,438 2807	1564	61	239. 0
114.10	0,431 5354	1721	56	245.50	121.10	0,438 4371	1560	61	238.50
114.20	0,431 7075	1717	56	245.40	121.20	0,438 5931	1556	61	238.40
114.30	0,431 8792	1714	56	245.30	121.30	0,438 7487	1551	61	238.30
114.40	0,432 0506	1710	56	245.20	121.40	0,438 9038	1548	61	238.20
114.50	0,432 2216	1706	56	245.10	121.50	0,439 0586	1545	61	238.10
115. 0	0,432 3922	1702	56	245. 0	122. 0	0,439 2131	1540	61	238. 0
115.10	0,432 5624	1699	56	244.50	122.10	0,439 3671	1536	61	237.50
115.20	0,432 7323	1695	57	244.40	122.20	0,439 5207	1532	62	237.40
115.30	0,432 9018	1691	57	244.30	122.30	0,439 6739	1529	62	237.30
115.40	0,433 0709	1687	57	244.20	122.40	0,439 8268	1525	62	237.20
115.50	0.433 2396	1684	57	244.10	122.50	0,439 9793	1520	62	237.10
116. 0	0,433 4080	1680	57	244. 0	123. 0	0,440 1313	1517	62	237. 0
116.10	0,433 5760	1676	57	243.50	123.10	0,440 2830	1512	62	236.50
116.20	0,433 7436	1672	57	243.40	123.20	0,440 4342	1508	62	236.40
116.30	0,433 9108	1668	57	243.30	123.30	0,440 5850	1504	62	236.30
116.40	0,434 0776	1665	58	243.20	123.40	0,440 7354	1500	62	236.20
116.50	0,434 2441	1661	58	243.10	123.50	0,440 8854	1496	62	236.10
117. 0	0,434 4102	1657	58	243. 0	124. 0	0,441 0350	1493	63	236. 0
117.10	0,434 5759	1653	58	242.50	124.10	0,441 1843	1488	63	235.50
117.20	0.434 7412	1649	58	242.40	124.20	0,441 3331	1484	63	235.40
117.30	0,434 9061	1646	58	242.30	124.30	0,441 4815	1480	63	235.30
117.40	0,435 0707	1642	58	242.20	124.40	0,441 6295	1476	63	235.20
117.50	0,435 2349	1638	58	242.10	124.50	0,441 7771	1471	63	235.10
118. 0	0,435 3987	1634	59	242. 0	125. 0	0,441 9242	1468	63	235. 0
118.10	0,435 5621	1629	59	241.50	125.10	0,442 0710	1464	63	234.50
118.20	0,435 7250	1626	59	241.40	125.20	0,442 2174	1460	63	234.40
118.30	0,435 8876	1623	59	241.30	125.30	0,442 3634	1456	64	234.30
118.40	0,436 0499	1619	59	241.20	125.40	0,442 5090	1453	64	234.20
118.50	0,436 2118	1615	+ 59	241.10	125.50	0,442 6543	1447	+ 64	234.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
126.° 0′	0,442 7990	1444	+ 64	234.° 0′	133.° 0′	0,448 5065	1269	+ 68	227.° 0
126.10	0,442 9434	1440	64	233.50	133.10	0,448 6334	1265	68	226.50
126.20	0,443 0874	1436	64	233.40	133.20	0,448 7599	1261	68	226.40
126.30	0,443 2310	1431	64	233.30	133.30	0,448 8860	1256	68	226.30
126.40	0,443 3741	1427	64	233.20	133.40	0,449 0116	1252	68	226.20
126.50	0,443 5168	1423	64	233.10	133.50	0,449 1368	1248	68	226.10
127. 0	0,443 6591	1419	65	233. 0	134. 0	0,449 2616	1244	68	226. 0
127.10	0,443 8010	1415	65	232.50	134.10	0,449 3860	1239	68	225.50
127.20	0,443 9425	1411	65	232.40	134.20	0,449 5099	1237	68	225.40
127.30	0,444 0836	1407	65	232.30	134.30	0,449 6336	1231	69	225.30
127.40	0,444 2243	1403	65	232.20	134.40	0,449 7567	1226	69	225.20
127.50	0,444 3646	1399	65	232.10	134.50	0,449 8793	1222	69	225.10
128. 0	0,444 5045	1394	65	232. 0	135. 0	0,450 0015	1218	69	225. 0
128.10	0,444 6439	1390	65	231.50	135.10	0,450 1233	1214	69	224.50
128.20	0,444 7829	1386	65	231.40	135.20	0,450 2447	1210	69	224.40
128.30	0,444 9215	1382	65	231.30	135.30	0,450 3657	1205	69	224.30
28.40	0,445 0597	1378	65	231.20	135.40	0,450 4862	1201	69	224.20
128.50	0,445 1975	1374	66	231.10	135.50	0,450 6063	1197	69	224.10
129. 0	0,445 3349	1370	66	231. 0	136. 0	0,450 7260	1193	69	224. 0
129.10	0,445 4719	1365	66	230.50	136.10	0,450 8453	1188	69	223.50
129.20	0,445 6084	1361	66	230.40	136.20	0,450 9641	1183	69	223.40
129.30	0,445 7445	1357	66	230.30	136.30	0,451 0824	1179	69	223.30
129.40	0,445 8802	1353	66	230.20	136.40	0,451 2003	1175	70	223.20
129.50	0,446 0155	1348	66	230.10	136.50	0,451 3178	1171	70	223.10
130. 0	0,446 1503	1345	66	230. 0	137. 0	0,451 4349	1167	70	223. 0
130.10	0,446 2848	1340	66	229.50	137.10	0,451 5516	1162	70	222.50
130.20	0,446 4188	1337	66	229.40	137.20	0,451 6678	1158	70	222.40
130.30	0,446 5525	1332	67	229.30	137.30	0,451 7836	1154	70	222.30
130.40	0,446 6857	1328	67	229.20	137.40	0,451 8990	1149	70	222.20
130.50	0,446 8185	1324	67	229.10	137.50	0,452 0139	1145	70	222.10
131. 0	0,446 9509	1320	67	229. 0	138. 0	0,452 1284	1141	70	222. 0
131.10	0,447 0829	1315	67	228.50	138.10	0,452 2425	1135	70	221.50
131.20	0,447 2144	1311	67	228.40	138.20	0,452 3560	1132	70	221.40
131.30	0,447 3455	1307	67	228.30	138.30	0,452 4692	1128	70	221.30
131.40	0,447 4762	1303	67	228.20	138.40	0,452 5820	1123	70	221.20
131.50	0,447 6065	1298	67	228.10	138.50	0,452 6943	1119	71	221.10
132. 0	0,447 7363	1294	67	228. 0	139. 0	0,452 8062	1115	71	221. 0
132.10	0,447 8657	1290	67	227.50	139.10	0,452 9177	1110	71	220.50
132.20	0,447 9947	1285	68	227.40	139.20	0,453 0287	1106	71	220.40
132.30	0,448 1232	1282	68	227.30	139.30	0,453 1393	1102	71	220.30
132.40	0,448 2514	1278	68	227.20	139.40	0,453 2495	1097	71	220.20
132.50	0,448 3792	1273	+ 68	227.10	139.50	0,453 3592	1092	+ 71	220.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
140°. 0′	0,453 4684	1089	+ 71	220°. 0′	147°. 0′	0,457 6625	904	+ 73	213°. 0′
140.10	0,453 5773	1084	71	219.50	147.10	0,457 7529	899	73	212.50
140.20	0,453 6857	1080	71	219.40	147.20	0,457 8428	895	73	212.40
140.30	0,453 7937	1075	71	219.30	147.30	0,457 9323	890	73	212.30
140.40	0,453 9012	1071	71	219.20	147.40	0,458 0213	886	73	212.20
140.50	0,454 0083	1067	71	219.10	147.50	0,458 1099	881	73	212.10
141. 0	0,454 1150	1062	71	219. 0	148. 0	0,458 1980	877	73	212. 0
141.10	0,454 2212	1058	71	218.50	148.10	0,458 2857	872	73	211.50
141.20	0,454 3270	1054	72	218.40	148.20	0,458 3729	868	73	211.40
141.30	0,454 4324	1049	72	218.30	148.30	0,458 4597	863	73	211.30
141.40	0,454 5373	1045	72	218.20	148.40	0,458 5460	859	73	211.20
141.50	0,454 6418	1040	72	218.10	148.50	0,458 6319	854	73	211.10
142. 0	0,454 7458	1036	72	218. 0	149. 0	0,458 7173	850	73	211. 0
142.10	0,454 8494	1032	72	217.50	149.10	0,458 8023	846	73	210.50
142.20	0,454 9526	1027	72	217.40	149.20	0,458 8869	841	73	210.40
142.30	0,455 0553	1023	72	217.30	149.30	0,458 9710	836	73	210.30
142.40	0,455 1576	1019	72	217.20	149.40	0,459 0546	832	73	210.20
142.50	0,455 2595	1014	72	217.10	149.50	0,459 1378	828	73	210.10
143. 0	0,455 3609	1010	72	217. 0	150. 0	0,459 2206	822	74	210. 0
143.10	0,455 4619	1005	72	216.50	150.10	0,459 3028	818	74	209.50
143.20	0,455 5624	1001	72	216.40	150.20	0,459 3846	814	74	209.40
143.30	0,455 6625	997	72	216.30	150.30	0,459 4660	810	74	209.30
143.40	0,455 7622	993	72	216.20	150.40	0,459 5470	805	74	209.20
143.50	0,455 8615	988	72	216.10	150.50	0,459 6275	800	74	209.10
144. 0	0,455 9603	983	72	216. 0	151. 0	0,459 7075	796	74	209. 0
144.10	0,456 0586	979	72	215.50	151.10	0,459 7871	792	74	208.50
144.20	0,456 1565	975	72	215.40	151.20	0,459 8663	787	74	208.40
144.30	0,456 2540	970	72	215.30	151.30	0,459 9450	783	74	208.30
144.40	0,456 3510	965	72	215.20	151.40	0,460 0233	778	74	208.20
144.50	0,456 4475	961	72	215.10	151.50	0,460 1011	774	74	208.10
145. 0	0,456 5436	957	72	215. 0	152. 0	0,460 1785	769	74	208. 0
145.10	0,456 6393	953	72	214.50	152.10	0,460 2554	765	74	207.50
145.20	0,456 7346	948	72	214.40	152.20	0,460 3319	760	74	207.40
145.30	0,456 8294	943	72	214.30	152.30	0,460 4079	756	74	207.30
145.40	0,456 9237	939	72	214.20	152.40	0,460 4835	751	74	207.20
145.50	0,457 0176	935	72	214.10	152.50	0,460 5586	747	74	207.10
146. 0	0,457 1111	930	72	214. 0	153. 0	0,460 6333	742	74	207. 0
146.10	0,457 2041	926	72	213.50	153.10	0,460 7075	737	74	206.50
146.20	0,457 2967	921	72	213.40	153.20	0,460 7812	733	75	206.40
146.30	0,457 3888	917	72	213.30	153.30	0,460 8545	729	75	206.30
146.40	0,457 4805	912	73	213.20	153.40	0,460 9274	724	75	206.20
146.50	0,457 5717	908	+ 73	213.10	153.50	0,460 9998	719	+ 75	206.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
154°. 0'	0,461 0717	715	+ 75	206°. 0'	161°. 0'	0,463 6835	524	+ 76	199°. 0'
154.10	0,461 1432	711	75	205.50	161.10	0,463 7359	519	76	198.50
154.20	0,461 2143	706	75	205.40	161.20	0,463 7878	515	76	198.40
154.30	0,461 2849	701	75	205.30	161.30	0,463 8393	510	76	198.30
154.40	0,461 3550	696	75	205.20	161.40	0,463 8903	505	76	198.20
154.50	0,461 4246	692	75	205.10	161.50	0,463 9408	501	76	198.10
155. 0	0,461 4938	688	75	205. 0	162. 0	0,463 9909	496	77	198. 0
155.10	0,461 5626	683	75	204.50	162.10	0,464 0405	492	77	197.50
155.20	0,461 6309	679	75	204.40	162.20	0,464 0897	487	77	197.40
155.30	0,461 6988	674	75	204.30	162.30	0,464 1384	483	77	197.30
155.40	0,461 7662	670	75	204.20	162.40	0,464 1867	478	77	197.20
155.50	0,461 8332	665	75	204.10	162.50	0,464 2345	473	77	197.10
156. 0	0,461 8997	661	75	204. 0	163. 0	0,464 2818	469	77	197. 0
156.10	0,461 9658	656	75	203.50	163.10	0,464 3287	464	77	196.50
156.20	0,462 0314	651	75	203.40	163.20	0,464 3751	460	77	196.40
156.30	0,462 0965	647	75	203.30	163.30	0,464 4211	455	77	196.30
156.40	0,462 1612	643	75	203.20	163.40	0,464 4666	450	77	196.20
156.50	0,462 2255	639	75	203.10	163.50	0,464 5116	446	77	196.10
157. 0	0,462 2894	633	76	203. 0	164. 0	0,464 5562	441	77	196. 0
157.10	0,462 3527	629	76	202.50	164.10	0,464 6003	437	77	195.50
157.20	0,462 4156	624	76	202.40	164.20	0,464 6440	432	77	195.40
157.30	0,462 4780	620	76	202.30	164.30	0,464 6872	427	77	195.30
157.40	0,462 5400	615	76	202.20	164.40	0,464 7299	422	77	195.20
157.50	0,462 6015	610	76	202.10	164.50	0,464 7721	418	77	195.10
158. 0	0,462 6625	606	76	202. 0	165. 0	0,464 8139	414	77	195. 0
158.10	0,462 7231	602	76	201.50	165.10	0,464 8553	409	77	194.50
158.20	0,462 7833	597	76	201.40	165.20	0,464 8962	404	77	194.40
158.30	0,462 8430	592	76	201.30	165.30	0,464 9366	400	77	194.30
158.40	0,462 9022	588	76	201.20	165.40	0,464 9766	395	77	194.20
158.50	0,462 9610	583	76	201.10	165.50	0,465 0161	391	77	194.10
159. 0	0,463 0193	579	76	201. 0	166. 0	0,465 0552	386	77	194. 0
159.10	0,463 0772	574	76	200.50	166.10	0,465 0938	382	77	193.50
159.20	0,463 1346	570	76	200.40	166.20	0,465 1320	377	77	193.40
159.30	0,463 1916	565	76	200.30	166.30	0,465 1697	372	77	193.30
159.40	0,463 2481	560	76	200.20	166.40	0,465 2069	368	77	193.20
159.50	0,463 3041	555	76	200.10	166.50	0,465 2437	363	77	193.10
160. 0	0,463 3596	551	76	200. 0	167. 0	0,465 2800	358	77	193. 0
160.10	0,463 4147	547	76	199.50	167.10	0,465 3158	354	77	192.50
160.20	0,463 4694	542	76	199.40	167.20	0,465 3512	349	77	192.40
160.30	0,463 5236	538	76	199.30	167.30	0,465 3861	345	77	192.30
160.40	0,463 5774	533	76	199.20	167.40	0,465 4206	340	77	192.20
160.50	0,463 6307	528	+ 76	199.10	167.50	0,465 4546	335	+ 77	192.10

XXVII. — Rayon vecteur. — *Partie elliptique.* (Suite.)

Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.	Anomalie moyenne.	Rayon vecteur.	Diff.	Variation séculaire.	Anomalie moyenne.
168°. 0′	0,465 4881	331	+ 77	192°. 0′	174°. 0′	0,466 3879	164	+ 78	186°. 0
168.10	0,465 5212	326	77	191.50	174.10	0,466 4043	160	78	185.50
168.20	0,465 5538	321	77	191.40	174.20	0,466 4203	155	78	185.40
168.30	0,465 5859	317	77	191.30	174.30	0,466 4358	151	78	185.30
168.40	0,465 6176	312	77	191.20	174.40	0,466 4509	146	78	185.20
168.50	0,465 6488	308	77	191.10	174.50	0,466 4655	141	78	185.10
169. 0	0,465 6796	303	77	191. 0	175. 0	0,466 4796	137	78	185. 0
169.10	0,465 7099	299	77	190.50	175.10	0,466 4933	132	78	184.50
169.20	0,465 7398	294	77	190.40	175.20	0,466 5065	127	78	184.40
169.30	0,465 7692	289	77	190.30	175.30	0,466 5192	123	78	184.30
169.40	0,465 7981	284	77	190.20	175.40	0,466 5315	118	78	184.20
169.50	0,465 8265	280	77	190.10	175.50	0,466 5433	114	78	184.10
170. 0	0,465 8545	275	78	190. 0	176. 0	0,466 5547	109	78	184. 0
170.10	0,465 8820	271	78	189.50	176.10	0,466 5656	104	78	183.50
170.20	0,465 9091	266	78	189.40	176.20	0,466 5760	100	78	183.40
170.30	0,465 9357	262	78	189.30	176.30	0,466 5860	95	78	183.30
170.40	0,465 9619	257	78	189.20	176.40	0,466 5955	90	78	183.20
170.50	0,465 9876	252	78	189.10	176.50	0,466 6045	86	78	183.10
171. 0	0,466 0128	248	78	189. 0	177. 0	0,466 6131	81	78	183. 0
171.10	0,466 0376	243	78	188.50	177.10	0,466 6212	76	78	182.50
171.20	0,466 0619	238	78	188.40	177.20	0,466 6288	72	78	182.40
171.30	0,466 0857	234	78	188.30	177.30	0,466 6360	67	78	182.30
171.40	0,466 1091	229	78	188.20	177.40	0,466 6427	63	78	182.20
171.50	0,466 1320	225	78	188.10	177.50	0,466 6490	58	78	182.10
172. 0	0,466 1545	220	78	188. 0	178. 0	0,466 6548	53	78	182. 0
172.10	0,466 1765	215	78	187.50	178.10	0,466 6601	49	78	181.50
172.20	0,466 1980	211	78	187.40	178.20	0,466 6650	44	78	181.40
172.30	0,466 2191	206	78	187.30	178.30	0,466 6694	39	78	181.30
172.40	0,466 2397	201	78	187.20	178.40	0,466 6733	35	78	181.20
172.50	0,466 2598	197	78	187.10	178.50	0,466 6768	30	78	181.10
173. 0	0,466 2795	192	78	187. 0	179. 0	0,466 6798	25	78	181. 0
173.10	0,466 2987	188	78	186.50	179.10	0,466 6823	21	78	180.50
173.20	0,466 3175	183	78	186.40	179.20	0,466 6844	16	78	180.40
173.30	0,466 3358	178	78	186.30	179.30	0,466 6860	12	78	180.30
173.40	0,466 3536	174	78	186.20	179.40	0,466 6872	7	78	180.20
173.50	0,466 3710	169	+ 78	186.10	179.50	0,466 6879	2	78	180.10
					180. 0	0,466 6881		+ 78	180. 0

XXVIII. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La 7e décimale est prise pour unité.)

ARGUM. $3\delta' + 2l'$.	PERT.	ARGUM. $3\delta' + 2l'$.	PERT.	ARGUM. $3\delta' + 2l'$.	PERT.	ARGUM. $3\delta' + 2l'$.	PERT.
0	+ 21	1000	− 16	2000	− 21	3000	+ 16
100	18	1100	− 19	2100	− 18	3100	19
200	15	1200	− 22	2200	− 15	3200	22
300	11	1300	− 24	2300	− 11	3300	24
400	7	1400	− 25	2400	− 7	3400	25
500	+ 3	1500	− 26	2500	− 3	3500	26
600	− 1	1600	− 26	2600	+ 1	3600	26
700	− 5	1700	− 26	2700	5	3700	26
800	− 9	1800	− 25	2800	9	3800	25
900	− 13	1900	− 23	2900	13	3900	23
1000	− 16	2000	− 21	3000	+ 16	4000	21

XXIX. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La 7e décimale est prise pour unité.)

ARGUM. $\delta' + 4l'$.	PERT.	ARGUM. $\delta' + 4l'$.	PERT.	ARGUM. $\delta' + 4l'$.	PERT.	ARGUM. $\delta' + 4l'$.	PERT.
0	+ 5	1000	− 14	2000	− 5	3000	+ 14
100	3	1100	− 14	2100	− 3	3100	14
200	+ 1	1200	− 14	2200	− 1	3200	14
300	− 2	1300	− 14	2300	+ 2	3300	14
400	− 4	1400	− 14	2400	4	3400	14
500	− 6	1500	− 13	2500	6	3500	13
600	− 8	1600	− 12	2600	8	3600	12
700	− 10	1700	− 11	2700	10	3700	11
800	− 12	1800	− 9	2800	12	3800	9
900	− 13	1900	− 7	2900	13	3900	7
1000	− 14	2000	− 5	3000	+ 14	4000	+ 5

XXX. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Vénus.*

(La 7e décimale est prise pour unité.)

Argument δ'.

Arg. l'	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	Arg. l'
0	−31	−31	−28	−22	−14	− 6	+ 1	+ 6	+ 8	+ 8	+ 6	+ 5	+ 4	+ 4	+ 5	+ 4	+ 2	− 3	−10	−18	−27	0
100	−33	−33	−28	−21	−12	− 4	2	6	8	7	7	6	6	7	8	6	3	− 3	−12	−20	−28	100
200	−37	−36	−30	−21	−11	− 3	3	6	7	6	6	7	8	9	9	7	2	− 5	−14	−23	−29	200
300	−41	−39	−31	−21	−11	− 3	3	5	6	6	7	9	10	11	10	6	+ 1	− 8	−16	−24	−30	300
400	−44	−40	−32	−20	− 9	− 2	3	6	7	7	10	11	13	12	10	6	− 1	− 9	−17	−24	−29	400
500	−43	−39	−30	−18	− 7	+ 1	6	9	11	13	14	15	16	14	11	6	− 1	− 9	−16	−23	−27	500
600	−40	−36	−26	−14	− 3	5	11	15	18	19	20	20	19	17	13	7	0	− 7	−15	−21	−24	600
700	−36	−32	−22	−10	+ 2	12	18	23	25	26	26	25	23	19	15	9	+ 2	− 6	−14	−19	−22	700
800	−35	−31	−20	− 7	5	17	24	29	31	31	30	28	25	21	16	10	2	− 6	−14	−19	−21	800
900	−35	−31	−21	− 7	7	19	28	33	34	33	32	29	26	21	15	8	+ 1	− 8	−15	−20	−21	900
1000	−38	−34	−23	− 9	7	19	28	33	34	33	31	28	24	19	13	+ 5	− 3	−11	−18	−22	−22	1000
1100	−41	−36	−25	−10	5	18	26	30	31	30	28	26	22	16	9	0	− 8	−16	−22	−25	−24	1100
1200	−43	−37	−26	−11	4	16	23	27	28	28	27	24	20	14	5	− 4	−13	−21	−26	−27	−25	1200
1300	−41	−35	−24	−10	3	13	20	24	26	27	26	24	19	11	+ 1	− 9	−18	−25	−29	−29	−26	1300
1400	−37	−32	−21	− 9	3	13	18	23	26	27	28	26	20	11	0	−12	−22	−28	−30	−30	−26	1400
1500	−34	−28	−19	− 8	3	11	17	22	26	29	30	28	21	11	− 2	−15	−25	−31	−33	−30	−25	1500
1600	−31	−26	−18	− 8	+ 1	9	15	21	26	30	31	29	[illegible]	9	− 5	−18	−28	−35	−35	−31	−25	1600
1700	−31	−26	−19	−11	− 2	6	13	19	25	29	31	28	20	6	−10	−24	−34	−39	−38	−33	−25	1700
1800	−30	−26	−20	−12	− 5	2	10	17	23	28	30	26	16	+ 2	−15	−30	−40	−44	−42	−35	−26	1800
1900	−29	−25	−19	−13	− 6	2	9	16	22	27	28	24	13	− 2	−20	−36	−45	−48	−44	−36	−27	1900
2000	−26	−21	−16	−10	− 3	4	10	17	24	28	29	23	12	− 5	−23	−38	−47	−49	−44	−36	−27	2000
2100	−20	−15	−10	− 4	+ 2	9	16	22	28	32	31	25	12	− 5	−22	−36	−44	−45	−40	−32	−25	2100
2200	−12	− 7	− 2	+ 4	10	16	22	28	34	36	34	27	15	− 1	−18	−31	−38	−38	−33	−27	−20	2200
2300	− 4	0	+ 5	10	16	22	28	34	38	39	36	29	18	+ 3	−11	−23	−30	−30	−26	−20	−14	2300
2400	+ 2	+ 6	11	16	21	26	32	36	39	39	36	30	19	7	− 6	−16	−22	−23	−19	−14	− 9	2400
2500	7	10	14	18	22	27	32	35	37	36	33	27	19	8	− 3	−12	−16	−17	−15	−10	− 5	2500
2600	9	12	14	17	21	26	29	31	31	30	27	23	17	8	− 1	− 9	−14	−15	−12	− 8	− 4	2600
2700	11	12	14	16	19	22	23	25	25	24	23	20	14	7	− 1	− 8	−12	−13	−10	− 7	− 4	2700
2800	11	11	12	14	15	17	18	19	20	20	19	17	12	6	− 1	− 7	−11	−10	− 8	− 5	− 4	2800
2900	11	10	10	11	11	12	13	15	16	18	17	15	12	6	0	− 5	− 7	− 6	− 5	− 3	− 4	2900
3000	10	9	8	7	6	7	9	12	15	16	16	14	11	6	+ 2	− 2	− 3	− 3	− 2	− 2	− 4	3000
3100	9	6	+ 3	+ 2	+ 1	+ 3	6	10	13	15	15	14	10	6	3	0	0	0	0	− 1	− 4	3100
3200	+ 5	+ 1	− 2	− 4	− 4	− 2	+ 2	7	11	13	13	11	7	5	+ 2	0	0	0	− 1	− 3	− 8	3200
3300	− 1	− 5	− 9	−10	− 9	− 6	− 1	5	8	10	9	7	4	+ 2	0	− 2	− 2	− 3	− 4	− 8	−13	3300
3400	− 9	−13	−16	−16	−14	−10	− 4	+ 2	5	6	6	4	+ 1	− 2	− 4	− 5	− 6	− 7	−10	−14	−19	3400
3500	−17	−21	−22	−21	−18	−13	− 7	− 1	3	4	3	+ 1	− 2	− 4	− 7	− 8	− 9	−11	−13	−18	−24	3500
3600	−23	−26	−26	−25	−21	−14	− 8	− 2	2	3	2	0	− 3	− 5	− 8	− 9	−10	−11	−15	−20	−28	3600
3700	−28	−30	−29	−26	−21	−14	− 8	− 2	2	4	3	+ 1	− 3	− 5	− 6	− 7	− 8	−10	−14	−20	−29	3700
3800	−30	−31	−30	−25	−19	−12	− 5	+ 1	4	5	4	2	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 7	−11	−19	−28	3800
3900	−31	−31	−28	−23	−16	− 9	− 2	3	6	7	5	3	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 4	−10	−19	−27	3900
4000	−31	−31	−28	−22	−14	− 6	+ 1	+ 6	+ 8	+ 8	+ 6	+ 5	+ 4	+ 4	+ 5	+ 4	+ 2	− 3	−10	−18	−27	4000

XXX. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Vénus.* (Suite.)

(La 7e décimale est prise pour unité.)

Argument δ'.

ARG. l'	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	ARG. l
0	−27	−34	−38	−37	−30	−20	−6	+9	+20	+27	+30	+29	+25	+21	+16	+10	+1	−9	−18	−27	−31	0
100	−28	−33	−36	−33	−26	−16	−3	10	20	26	29	28	26	22	18	11	3	−8	−20	−29	−33	100
200	−29	−33	−34	−30	−23	−13	−2	10	19	25	27	27	26	23	19	12	3	−10	−22	−32	−37	200
300	−30	−32	−31	−27	−20	−10	0	10	18	23	25	26	25	24	20	14	2	−12	−26	−36	−41	300
400	−29	−30	−28	−23	−15	−6	+3	12	18	23	25	27	27	26	23	15	3	−13	−28	−39	−44	400
500	−27	−27	−24	−18	−9	−1	8	15	20	24	27	29	31	30	26	18	4	−13	−28	−39	−43	500
600	−24	−23	−19	−12	−3	+4	12	18	23	26	30	32	34	33	29	20	5	−11	−26	−37	−40	600
700	−22	−20	−15	−7	+1	9	16	21	25	28	32	35	36	35	30	21	7	−9	−23	−34	−36	700
800	−21	−18	−12	−4	4	11	17	21	25	28	31	34	35	33	28	19	6	−9	−22	−32	−35	800
900	−21	−17	−11	−3	4	11	16	19	23	26	28	29	30	27	22	14	+2	−11	−23	−32	−35	900
1000	−22	−18	−11	−5	3	9	14	17	20	21	23	23	23	20	15	8	−2	−14	−26	−35	−38	1000
1100	−24	−19	−13	−5	2	7	12	14	16	17	17	16	16	13	10	+4	−6	−18	−30	−38	−41	1100
1200	−25	−20	−14	−6	1	7	11	12	13	13	12	12	11	9	6	0	−9	−20	−31	−40	−43	1200
1300	−26	−21	−13	−6	1	6	9	11	10	10	9	9	8	7	4	−1	−10	−22	−32	−40	−41	1300
1400	−26	−20	−12	−5	2	6	9	9	9	8	8	8	8	7	4	−2	−11	−21	−31	−37	−37	1400
1500	−25	−18	−10	−3	3	6	7	7	7	7	8	9	9	8	4	−3	−12	−21	−29	−34	−34	1500
1600	−25	−16	−9	−3	+2	4	5	5	5	6	8	9	9	7	+2	−5	−14	−22	−29	−32	−31	1600
1700	−25	−16	−9	−4	0	+1	+1	+1	+3	5	7	8	8	4	−1	−9	−17	−24	−30	−32	−31	1700
1800	−26	−18	−11	−6	−4	−4	−3	−2	0	3	6	7	5	+2	−5	−13	−20	−26	−30	−32	−30	1800
1900	−27	−19	−13	−10	−8	−8	−7	−5	−2	1	4	5	3	−2	−8	−16	−22	−27	−30	−31	−29	1900
2000	−27	−20	−15	−13	−12	−10	−9	−6	−3	1	3	4	1	−4	−10	−17	−22	−27	−29	−28	−26	2000
2100	−25	−19	−15	−13	−12	−10	−8	−6	−2	1	3	3	1	−3	−9	−15	−21	−24	−24	−23	−20	2100
2200	−20	−15	−12	−11	−9	−8	−6	−3	0	3	5	5	3	−1	−7	−13	−17	−19	−19	−16	−12	2200
2300	−14	−10	−8	−6	−6	−5	−2	+1	+4	6	8	8	5	+1	−4	−9	−12	−13	−11	−8	−4	2300
2400	−9	−5	−4	−3	−3	−2	0	4	6	9	11	11	9	4	−1	−4	−7	−7	−5	−1	+2	2400
2500	−5	−3	−2	−2	−2	−1	+2	5	9	12	13	13	10	6	+3	0	−1	−1	+1	+4	7	2500
2600	−4	−2	−3	−3	−4	−2	+1	6	10	13	15	14	12	9	6	+4	+4	+4	6	8	9	2600
2700	−4	−4	−5	−7	−7	−5	0	6	11	15	16	15	14	12	10	9	9	9	10	10	11	2700
2800	−4	−6	−9	−11	−11	−7	−1	6	12	16	17	17	16	16	15	14	13	13	12	11	11	2800
2900	−4	−7	−11	−14	−13	−8	0	8	14	19	21	21	21	21	20	20	18	16	14	12	11	2900
3000	−4	−8	−13	−15	−14	−8	0	9	17	23	25	26	27	27	26	24	21	18	15	12	10	3000
3100	−4	−10	−15	−17	−16	−9	0	11	20	27	31	33	33	33	31	28	24	19	15	12	9	3100
3200	−8	−14	−19	−21	−19	−12	−2	11	21	30	35	37	37	35	32	28	23	18	13	9	+5	3200
3300	−13	−19	−25	−28	−25	−18	−5	8	20	30	36	38	38	35	31	25	20	15	9	+4	−1	3300
3400	−19	−26	−33	−36	−33	−25	−12	+3	18	28	35	36	34	30	25	20	14	8	+3	−3	−9	3400
3500	−24	−33	−40	−43	−41	−32	−17	−1	14	25	31	32	29	24	19	13	7	+1	−6	−12	−17	3500
3600	−28	−37	−44	−47	−45	−35	−20	−3	13	24	28	28	25	20	14	8	+1	−6	−12	−18	−23	3600
3700	−29	−38	−45	−49	−45	−34	−19	−2	13	23	27	26	22	17	11	5	−2	−10	−17	−24	−28	3700
3800	−28	−37	−44	−46	−41	−30	−14	+2	16	25	28	26	23	17	12	5	−3	−11	−19	−25	−30	3800
3900	−27	−36	−41	−41	−36	−25	−10	5	18	26	29	28	24	19	14	7	−1	−10	−19	−26	−31	3900
4000	−27	−34	−38	−37	−30	−20	−6	+9	+20	+27	+30	+29	+25	+21	+16	+10	+1	−9	−18	−27	−31	4000

XXXI. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par la Terre.*

(La 7ᵉ décimale est prise pour unité.)

Argument δ'.

Arg. l'	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	Arg. l'
0	+ 1	0	− 1	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 5	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	− 1	0	0	0	0	− 1	0
100	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	− 3	− 3	− 2	− 1	− 1	0	0	0	− 1	− 2	100
200	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	− 3	− 3	− 2	− 1	− 1	0	0	0	− 1	− 2	− 2	200
300	− 4	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	− 1	− 1	0	0	0	− 1	− 1	− 2	− 3	300
400	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0	0	− 1	− 2	− 3	400
500	− 4	− 5	− 5	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 2	2	2	2	1	+ 1	0	− 1	− 2	− 2	500
600	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	+ 1	+ 2	+ 3	3	3	4	3	3	2	2	1	0	0	− 1	− 1	600
700	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	+ 1	2	4	4	5	5	5	4	3	3	2	+ 1	0	0	− 1	− 1	700
800	− 4	− 3	− 2	− 1	+ 1	2	4	5	5	6	6	5	4	3	2	+ 1	0	0	− 1	− 1	− 1	800
900	− 4	− 3	− 2	0	1	3	4	5	6	6	5	5	3	2	+ 1	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	900
1000	− 4	− 3	− 2	0	2	3	4	5	5	5	4	3	+ 2	+ 1	− 1	− 1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 1	1000
1100	− 4	− 3	− 2	0	1	2	3	4	4	4	3	+ 2	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	1100
1200	− 4	− 3	− 2	0	1	2	3	3	3	2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	− 3	− 2	1200
1300	− 3	− 2	− 1	0	1	2	2	2	2	1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	1300
1400	− 2	− 1	0	+ 1	1	2	2	2	2	1	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	− 1	1400
1500	0	0	+ 1	1	2	2	2	2	2	1	0	0	− 1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 1	− 1	0	1500
1600	+ 1	+ 1	2	2	2	2	2	2	2	1	+ 1	+ 1	0	0	− 1	− 1	− 1	− 1	0	+ 1	+ 1	1600
1700	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	1	+ 1	1700
1800	3	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	2	2	2	2	3	2	2	2	2	1	+ 1	+ 1	0	1800
1900	2	+ 1	0	0	0	− 1	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	2	+ 1	0	− 1	− 1	1900
2000	+ 1	0	− 1	− 2	− 2	− 2	− 1	0	1	2	3	3	4	4	3	3	1	0	− 1	− 2	− 3	2000
2100	0	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	1	2	3	4	4	4	3	2	+ 1	− 1	− 2	− 4	− 5	2100
2200	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	1	3	4	5	5	5	4	2	0	− 2	− 4	− 6	− 7	2200
2300	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	− 1	0	2	4	5	6	6	5	4	2	0	− 3	− 5	− 7	− 9	2300
2400	− 3	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	0	+ 2	4	6	7	7	7	6	4	2	− 1	− 4	− 6	− 8	− 10	2400
2500	− 2	− 3	− 3	− 2	− 1	0	+ 2	4	6	8	9	9	8	7	5	2	− 1	− 4	− 6	− 9	− 10	2500
2600	− 2	− 2	− 2	− 1	+ 1	+ 2	4	6	8	9	10	10	9	7	5	2	− 1	− 4	− 7	− 9	− 10	2600
2700	− 1	− 1	− 1	+ 1	2	4	6	8	9	10	10	10	9	7	4	+ 1	− 2	− 5	− 7	− 9	− 9	2700
2800	− 1	0	+ 1	2	4	5	7	9	10	10	10	10	8	6	3	0	− 3	− 6	− 8	− 9	− 9	2800
2900	− 1	0	1	3	4	6	7	9	9	10	9	8	6	4	+ 1	− 2	− 4	− 7	− 8	− 9	− 9	2900
3000	− 1	0	1	3	5	6	7	8	8	8	7	6	4	+ 2	− 1	− 4	− 6	− 8	− 9	− 10	− 9	3000
3100	− 1	0	1	3	4	5	6	6	6	6	5	3	+ 1	− 1	− 3	− 5	− 7	− 9	− 10	− 10	− 9	3100
3200	− 1	0	2	3	4	5	5	5	4	3	+ 2	+ 1	− 1	− 3	− 5	− 7	− 8	− 10	− 10	− 9	− 8	3200
3300	− 1	+ 1	2	3	4	4	4	3	3	+ 1	0	− 2	− 3	− 5	− 6	− 8	− 9	− 9	− 9	− 8	− 8	3300
3400	0	1	2	3	4	3	3	2	+ 1	0	− 2	− 3	− 4	− 6	− 7	− 7	− 8	− 8	− 8	− 7	− 6	3400
3500	+ 2	3	3	4	4	3	3	1	0	− 1	− 2	− 4	− 4	− 5	− 6	− 6	− 6	− 6	− 5	− 5	− 4	3500
3600	3	3	3	4	3	3	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	− 3	− 2	3600
3700	3	3	4	3	3	2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	− 2	− 1	− 1	3700
3800	3	3	3	2	+ 2	+ 1	− 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	− 1	− 1	0	0	0	3800
3900	2	+ 2	+ 1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	− 1	0	0	0	0	0	3900
4000	+ 1	0	− 1	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 5	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	− 1	0	0	0	0	− 1	4000

XXXI. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par la Terre.* (Suite.)

(La 7e décimale est prise pour unité.)

Argument δ''.

Arg. l''	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	Arg. l''
0	− 1	− 1	− 2	− 2	− 3	− 2	− 2	− 1	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	0
100	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	2	3	3	3	2	+ 1	0	− 1	− 1	100
200	− 2	− 3	− 4	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	− 1	0	1	2	3	3	3	2	2	0	− 1	− 2	− 3	200
300	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 4	− 4	− 2	− 1	+ 1	2	3	4	4	3	2	1	0	− 2	− 3	− 4	300
400	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	− 3	− 3	− 1	+ 1	2	3	4	5	4	4	2	1	− 1	− 2	− 3	− 5	400
500	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	+ 1	2	3	4	5	5	5	4	3	1	− 1	− 2	− 4	− 4	500
600	− 2	− 2	− 2	− 2	− 1	0	+ 1	2	4	5	5	6	6	5	4	3	1	− 1	− 2	− 4	− 4	600
700	− 1	− 1	− 1	0	0	+ 1	2	4	5	6	6	6	6	5	4	2	+ 1	− 1	− 3	− 3	− 4	700
800	− 1	0	0	+ 1	+ 2	2	3	4	5	6	6	6	5	4	3	+ 2	0	− 2	− 3	− 3	− 4	800
900	− 1	0	+ 1	1	2	3	3	4	5	5	5	4	4	3	+ 1	0	− 1	− 3	− 3	− 4	− 4	900
1000	− 1	0	+ 1	1	2	3	3	3	3	3	3	+ 2	+ 1	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	1000
1100	− 1	− 1	0	1	1	2	2	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 5	− 5	− 5	− 4	1100
1200	− 2	− 1	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0	0	− 1	− 2	− 2	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	1200
1300	− 2	− 1	0	0	0	0	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	1300
1400	− 1	0	0	0	0	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	1400
1500	0	+ 1	+ 1	0	0	− 1	− 2	− 2	− 3	− 4	− 4	− 5	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 2	− 1	− 1	0	1500
1600	+ 1	1	+ 1	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	0	+ 1	+ 1	+ 1	1600
1700	+ 1	+ 1	0	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	2	2	2	1700
1800	0	0	− 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	+ 1	+ 2	3	3	3	3	3	1800
1900	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 5	− 5	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	+ 1	2	3	3	3	3	3	2	1900
2000	− 3	− 4	− 5	− 5	− 6	− 6	− 6	− 5	− 5	− 4	− 3	− 2	0	1	2	3	3	3	3	2	+ 1	2000
2100	− 5	− 6	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 6	− 5	− 3	− 2	− 1	+ 1	2	3	3	3	3	2	+ 1	0	2100
2200	− 7	− 8	− 9	− 9	− 8	− 8	− 7	− 5	− 4	− 2	− 1	+ 1	2	3	3	3	3	2	+ 1	0	− 2	2200
2300	− 9	− 10	− 10	− 10	− 9	− 7	− 6	− 4	− 2	0	+ 1	2	3	4	4	4	3	2	0	− 1	− 2	2300
2400	− 10	− 10	− 10	− 9	− 8	− 6	− 4	− 2	0	+ 2	3	4	5	5	5	4	3	2	0	− 1	− 3	2400
2500	− 10	− 10	− 10	− 8	− 7	− 4	− 2	+ 1	+ 3	5	6	6	7	6	6	4	3	2	0	− 1	− 2	2500
2600	− 10	− 10	− 9	− 7	− 5	− 2	+ 1	3	5	7	8	8	8	7	6	5	3	1	0	− 1	− 2	2600
2700	− 9	− 9	− 8	− 6	− 3	0	3	5	7	9	9	9	9	8	6	4	3	1	0	− 1	− 1	2700
2800	− 9	− 8	− 7	− 5	− 2	+ 2	4	7	9	10	10	10	9	7	5	4	2	+ 1	− 1	− 1	− 1	2800
2900	− 9	− 8	− 6	− 4	− 1	2	5	7	9	10	10	9	8	6	4	2	+ 1	− 1	− 1	− 1	− 1	2900
3000	− 9	− 8	− 6	− 3	0	3	5	7	8	9	8	7	6	4	+ 2	+ 1	− 1	− 2	− 2	− 2	− 1	3000
3100	− 9	− 8	− 5	− 3	0	2	5	6	7	8	7	6	4	2	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 2	− 1	3100
3200	− 8	− 7	− 5	− 3	0	2	4	6	6	6	5	4	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 3	− 2	− 1	3200
3300	− 8	− 6	− 4	− 2	0	2	3	4	5	4	4	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 3	− 4	− 3	− 2	− 1	3300
3400	− 6	− 5	− 3	− 2	0	2	3	4	4	3	3	2	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	0	3400
3500	− 4	− 3	− 2	0	+ 1	2	3	3	3	3	2	2	+ 1	0	− 1	− 2	− 2	− 1	− 1	+ 1	+ 2	3500
3600	− 2	− 1	− 1	0	1	2	2	3	3	3	2	2	1	0	0	0	0	0	+ 1	2	3	3600
3700	− 1	0	0	0	+ 1	1	2	2	2	2	2	2	2	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 2	2	3	3	3700
3800	0	0	0	0	0	+ 1	+ 1	+ 1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3800
3900	0	0	− 1	− 1	− 1	− 1	0	0	+ 1	+ 1	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	3900
4000	− 1	− 1	− 2	− 2	− 3	− 2	− 2	− 1	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	4000

XXXII. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Jupiter.*

(La 7e décimale est prise pour unité.)

Argument δ^{IV}.

Arg. l^{IV}	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	Arg. l^{IV}
0	−17	−20	−23	−25	−26	−28	−29	−29	−29	−30	−29	−29	−28	−27	−26	−24	−21	−19	−17	−13	−10	0
100	−21	−24	−26	−27	−28	−29	−29	−28	−28	−28	−27	−25	−24	−22	−20	−18	−16	−13	−10	− 7	− 4	100
200	−24	−26	−27	−28	−28	−28	−27	−26	−25	−24	−22	−21	−19	−17	−15	−12	− 9	− 6	− 4	0	+ 3	200
300	−26	−27	−28	−27	−27	−25	−24	−23	−21	−19	−17	−15	−13	−10	− 8	− 6	− 3	0	+ 3	+ 6	9	300
400	−27	−27	−27	−26	−24	−22	−20	−18	−15	−13	−11	− 9	− 6	− 4	− 1	+ 1	+ 4	+ 6	9	12	14	400
500	−27	−27	−26	−24	−21	−18	−15	−12	− 9	− 6	− 4	− 2	+ 1	+ 3	+ 5	8	10	12	14	16	18	500
600	−27	−26	−24	−21	−17	−13	− 9	− 5	− 2	0	+ 3	+ 5	8	10	12	14	16	17	19	20	21	600
700	−27	−25	−23	−18	−13	− 8	− 3	+ 1	+ 5	+ 7	10	12	14	16	17	19	20	21	22	23	23	700
800	−27	−25	−21	−15	−10	− 4	+ 2	6	10	14	16	18	19	21	22	23	24	24	24	24	23	800
900	−27	−24	−19	−13	− 7	0	6	11	16	19	21	23	24	25	25	26	26	25	25	24	23	900
1000	−27	−23	−18	−12	− 5	+ 3	10	15	20	23	25	27	27	28	28	27	26	26	25	23	21	1000
1100	−27	−23	−18	−11	− 3	5	12	18	23	26	28	29	29	29	28	27	26	25	23	21	18	1100
1200	−27	−22	−16	−10	− 2	6	14	20	25	28	30	31	30	30	28	26	25	22	20	18	15	1200
1300	−26	−21	−15	− 8	− 1	7	15	21	26	29	31	31	30	29	27	24	22	20	17	14	11	1300
1400	−24	−20	−14	− 7	+ 1	8	16	22	27	30	31	31	29	27	24	21	18	15	12	9	+ 6	1400
1500	−22	−17	−12	− 5	2	9	16	23	27	30	31	30	28	25	21	18	14	10	7	+ 4	0	1500
1600	−18	−14	− 9	− 3	4	11	17	23	27	30	30	29	26	22	18	14	10	+ 5	+ 2	− 2	− 5	1600
1700	−14	−10	− 5	+ 1	7	13	19	24	28	30	30	28	25	20	15	10	5	0	− 4	− 7	−11	1700
1800	− 9	− 5	0	5	10	16	21	25	29	30	29	27	23	18	12	7	+ 1	− 4	− 9	−13	−16	1800
1900	− 4	0	+ 4	9	14	19	23	27	30	31	30	27	23	17	10	3	− 3	− 9	−14	−18	−21	1900
2000	+ 2	+ 6	10	14	18	23	27	30	31	32	31	27	22	16	9	+ 1	− 6	−12	−18	−22	−26	2000
2100	7	11	15	19	23	27	29	32	34	34	32	28	23	16	8	0	− 8	−15	−21	−26	−29	2100
2200	12	16	20	23	27	30	33	35	35	35	32	29	23	16	8	− 1	− 9	−17	−23	−28	−32	2200
2300	17	21	24	31	31	33	35	37	37	36	33	29	23	16	8	− 1	−10	−18	−25	−30	−34	2300
2400	21	24	28	31	33	35	37	38	38	36	34	29	23	16	8	− 1	−10	−18	−25	−31	−35	2400
2500	25	28	30	33	35	37	38	38	38	36	33	29	23	16	7	− 2	−10	−19	−26	−32	−35	2500
2600	28	30	32	35	36	37	38	38	36	35	31	27	21	14	6	− 2	−11	−19	−26	−32	−35	2600
2700	30	32	33	35	36	37	36	36	34	32	28	24	19	12	4	− 4	−12	−20	−27	−32	−36	2700
2800	31	32	33	34	35	35	34	33	31	28	25	20	15	9	+ 2	− 6	−14	−21	−28	−32	−36	2800
2900	32	32	32	32	32	31	30	29	26	23	20	15	10	+ 4	− 3	−10	−16	−23	−29	−33	−36	2900
3000	31	31	30	29	29	27	25	23	21	18	14	9	+ 4	− 1	− 7	−13	−20	−26	−30	−34	−36	3000
3100	30	28	27	26	24	22	20	18	15	11	+ 7	+ 3	− 2	− 7	−12	−17	−23	−28	−32	−35	−36	3100
3200	27	25	23	21	19	16	14	11	8	+ 4	0	− 4	− 8	−13	−17	−22	−26	−30	−34	−36	−36	3200
3300	23	21	18	15	13	10	+ 7	+ 4	+ 1	− 3	− 7	−10	−15	−18	−22	−26	−30	−33	−35	−36	−36	3300
3400	19	15	12	9	+ 6	+ 3	0	− 3	− 6	−10	−13	−17	−20	−23	−27	−30	−32	−34	−36	−36	−36	3400
3500	13	9	+ 6	+ 2	− 1	− 4	− 7	−10	−13	−16	−19	−22	−25	−28	−30	−32	−34	−35	−35	−35	−34	3500
3600	+ 7	+ 3	− 1	− 4	− 7	−10	−13	−16	−19	−21	−24	−26	−28	−30	−32	−33	−34	−34	−34	−33	−31	3600
3700	0	− 4	− 7	−11	−14	−17	−19	−22	−24	−25	−27	−29	−31	−32	−33	−33	−33	−32	−31	−30	−27	3700
3800	− 6	−10	−13	−16	−19	−22	−24	−25	−27	−28	−30	−31	−31	−32	−32	−31	−30	−29	−28	−25	−22	3800
3900	−12	−15	−19	−21	−24	−25	−27	−28	−29	−30	−30	−30	−30	−30	−29	−28	−26	−25	−22	−20	−17	3900
4000	−17	−20	−23	−25	−26	−28	−29	−29	−29	−30	−29	−29	−28	−27	−26	−24	−21	−19	−17	−13	−10	4000

XXXII. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Jupiter.* (Suite.)

(La 7ᵉ décimale est prise pour unité.)

Argument δ''.

Arg. l''	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	Arg. l''
0	−10	− 7	− 3	+ 2	+ 7	+12	+18	+23	+27	+30	+32	+31	+28	+24	+18	+12	+ 5	− 2	− 8	−13	−17	0
100	− 4	0	+ 4	7	12	16	21	25	28	30	31	30	27	22	15	9	+ 1	− 6	−12	−17	−21	100
200	+ 3	+ 6	9	13	16	19	23	26	29	30	30	28	24	19	13	5	− 3	− 9	−16	−20	−24	200
300	9	12	15	17	20	22	25	27	28	29	28	26	22	16	10	+ 3	− 5	−12	−18	−23	−26	300
400	14	16	19	21	22	24	25	26	27	27	26	23	19	13	7	− 1	− 8	−14	−20	−24	−27	400
500	18	20	21	23	23	24	25	25	25	24	22	19	15	10	+ 4	− 4	−10	−17	−22	−25	−27	500
600	21	22	23	23	23	23	23	22	21	20	18	14	10	5	− 1	− 7	−13	−19	−23	−26	−27	600
700	23	23	24	23	22	21	20	19	17	15	12	9	+ 5	+ 1	− 5	−10	−16	−21	−24	−27	−27	700
800	23	23	22	21	19	18	16	14	12	9	+ 6	+ 3	− 1	− 5	−10	−14	−19	−23	−26	−28	−27	800
900	23	21	20	18	16	14	11	9	+ 6	+ 3	0	− 3	− 7	−10	−14	−18	−22	−25	−27	−28	−27	900
1000	21	19	17	14	12	9	6	+ 3	0	− 3	− 6	− 9	−12	−16	−19	−22	−25	−28	−29	−29	−27	1000
1100	18	15	13	10	7	+ 4	+ 1	− 2	− 5	− 8	−12	−15	−18	−20	−23	−26	−28	−30	−30	−30	−27	1100
1200	15	12	9	6	+ 2	− 1	− 4	− 7	−10	−13	−16	−19	−22	−24	−26	−28	−30	−31	−31	−30	−27	1200
1300	11	8	+ 4	+ 1	− 2	− 5	− 8	−12	−15	−18	−20	−23	−25	−27	−29	−30	−31	−31	−31	−29	−26	1300
1400	+ 6	+ 3	− 1	− 4	− 7	−10	−13	−16	−18	−21	−23	−25	−27	−29	−30	−30	−31	−31	−30	−27	−24	1400
1500	0	− 3	− 6	− 9	−12	−14	−17	−19	−21	−23	−25	−26	−28	−29	−30	−30	−30	−29	−27	−25	−22	1500
1600	− 5	− 8	−11	−14	−16	−18	−20	−22	−23	−25	−26	−27	−28	−28	−28	−28	−27	−26	−24	−22	−18	1600
1700	−11	−14	−16	−18	−21	−22	−24	−25	−25	−26	−26	−27	−27	−27	−26	−25	−24	−23	−20	−17	−14	1700
1800	−16	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−26	−27	−26	−26	−25	−25	−24	−23	−22	−20	−18	−16	−13	− 9	1800
1900	−21	−24	−26	−27	−28	−29	−29	−28	−27	−26	−25	−24	−23	−21	−20	−18	−16	−13	−11	− 7	− 4	1900
2000	−26	−28	−30	−31	−31	−31	−30	−29	−28	−26	−24	−22	−20	−18	−16	−13	−11	− 8	− 5	− 2	+ 2	2000
2100	−29	−31	−33	−33	−33	−33	−31	−30	−27	−25	−22	−19	−17	−14	−12	− 9	− 6	− 3	0	+ 3	7	2100
2200	−32	−34	−35	−36	−35	−34	−32	−29	−27	−24	−20	−17	−14	−11	− 7	− 5	− 1	+ 2	+ 5	9	12	2200
2300	−34	−36	−37	−36	−36	−34	−31	−29	−25	−21	−18	−14	−10	− 7	− 3	0	+ 3	7	10	14	17	2300
2400	−35	−37	−38	−37	−35	−33	−30	−26	−22	−19	−14	−10	− 6	− 2	+ 1	+ 5	8	11	14	18	21	2400
2500	−35	−37	−37	−36	−34	−31	−27	−23	−19	−15	−10	− 6	− 2	+ 3	6	10	13	16	19	22	25	2500
2600	−35	−37	−37	−35	−33	−29	−24	−20	−15	−10	− 6	− 1	+ 4	7	11	14	17	20	23	25	28	2600
2700	−36	−37	−37	−34	−30	−26	−21	−16	−10	− 5	0	+ 4	9	13	16	19	22	24	26	28	30	2700
2800	−36	−36	−35	−32	−28	−23	−17	−11	− 5	0	+ 6	10	14	18	21	24	26	27	29	30	31	2800
2900	−36	−36	−34	−31	−26	−19	−13	− 7	0	+ 6	11	15	19	23	25	28	29	30	31	31	32	2900
3000	−36	−36	−33	−29	−24	−17	−10	− 2	+ 5	11	16	20	24	27	29	31	32	32	32	32	31	3000
3100	−36	−35	−33	−28	−22	−14	− 6	+ 2	9	15	21	25	28	30	32	33	33	33	32	31	30	3100
3200	−36	−35	−32	−27	−20	−12	− 3	5	13	19	25	29	32	33	34	34	34	32	31	29	27	3200
3300	−36	−35	−31	−25	−18	−10	− 1	8	16	22	28	31	33	35	35	34	33	31	29	26	23	3300
3400	−36	−33	−29	−23	−16	− 7	+ 2	10	18	25	30	33	35	35	34	33	31	28	25	22	19	3400
3500	−34	−31	−27	−21	−14	− 5	3	12	20	26	31	34	35	34	33	30	27	24	20	16	13	3500
3600	−31	−28	−24	−18	−11	− 3	6	14	21	27	32	34	34	33	30	27	23	19	15	11	+ 7	3600
3700	−27	−24	−20	−14	− 7	0	8	16	23	28	32	33	33	31	28	23	18	14	9	+ 4	0	3700
3800	−22	−19	−15	− 9	− 3	+ 4	11	18	24	29	32	33	32	29	24	19	14	8	+ 3	− 2	− 6	3800
3900	−17	−13	− 9	− 4	+ 2	8	14	21	26	30	32	32	30	27	21	15	9	+ 3	− 3	− 7	−12	3900
4000	−10	− 7	− 3	+ 2	+ 7	+12	+18	+23	+27	+30	+32	+31	+28	+24	+18	+12	+ 5	− 2	− 8	−13	−17	4000

XXXIII. — Rayon vecteur. — *Perturbations produites par Saturne.*

(La 7ᵉ décimale est prise pour unité.)

Argument δ″.

ARG. l''	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	ARG. l''
0	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 2	− 1	0	+ 1	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 2	+ 1	− 1	− 2	0
200	− 3	− 4	− 4	− 3	− 3	− 2	− 2	− 2	− 1	− 1	+ 1	+ 2	2	3	4	3	3	2	0	− 2	− 3	200
400	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	− 1	0	+ 1	+ 1	2	3	3	4	4	3	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	400
600	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	2	3	3	3	4	4	4	3	2	0	− 2	− 3	− 4	600
800	− 4	− 4	− 3	− 1	0	+ 1	2	3	3	3	3	4	4	3	3	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 4	800
1000	− 4	− 3	− 2	0	+ 1	2	3	4	4	3	3	3	3	2	+ 1	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	1000
1200	− 4	− 3	− 1	+ 1	2	3	4	4	4	3	2	+ 2	+ 1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	1200
1400	− 3	− 2	0	1	3	4	4	4	3	2	+ 1	0	− 1	− 1	− 2	− 2	− 3	− 4	− 4	− 4	− 3	1400
1600	− 3	− 1	0	2	3	4	4	3	2	+ 1	0	− 2	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 4	− 4	− 3	− 3	1600
1800	− 1	0	+ 1	3	3	4	3	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	1800
2000	0	+ 1	2	3	3	3	3	2	0	− 2	− 3	− 4	− 4	− 3	− 3	− 3	− 2	− 2	− 2	− 1	0	2000
2200	+ 1	2	3	3	3	3	2	+ 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 3	− 3	− 2	− 1	− 1	0	0	+ 1	2200
2400	1	3	3	3	3	3	2	0	− 1	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	− 1	0	+ 1	+ 1	+ 1	2	2400
2600	3	3	3	3	3	2	+ 1	0	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 1	0	+ 1	+ 1	2	2	2	3	2600
2800	3	3	3	3	2	2	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	0	2	2	3	3	3	3	2800
3000	3	2	2	2	+ 1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 2	− 2	0	+ 1	2	3	3	3	3	3	3000
3200	2	+ 2	+ 1	+ 1	0	0	− 1	− 2	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	0	2	3	3	3	3	2	2	3200
3400	+ 1	0	0	− 1	− 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	+ 1	2	3	3	3	2	2	+ 1	3400
3600	0	− 1	− 1	− 2	− 2	− 2	− 3	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	0	1	2	3	3	3	2	+ 1	0	3600
3800	− 1	− 2	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 1	0	2	3	3	3	2	1	0	− 1	3800
4000	− 2	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 2	− 2	− 1	0	+ 1	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 2	+ 1	− 1	− 2	4000

XXXIV. — Diamètre apparent de Mercure.

6″,68 à la distance moyenne.

ADDITION.

PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DE MERCURE.

I. — *Valeurs numériques des coefficients* $a'A^{(i)}$, $a'A_1^{(i)}$, ..., *employées dans le calcul des fonctions perturbatrices relatives aux actions des diverses planètes sur Mercure.* (Chap. XV, page 5.)

Nous rapporterons, dans ce qui va suivre, les lettres accentuées à la planète perturbatrice du mouvement de Mercure; et, pour simplifier, nous n'emploierons qu'un accent, quelle que soit la planète perturbatrice considérée.

MERCURE ET VÉNUS.

$a = 0{,}387\,098\,7$, $a' = 0{,}723\,332\,2$, $\log \alpha = \bar{1}{,}728\,4839$.

i	$a'A^{(i)}$	$a'A_1^{(i)}$	$a'A_2^{(i)}$	$a'A_3^{(i)}$	$a'A_4^{(i)}$	$a'A_5^{(i)}$	$a'A_6^{(i)}$	$a'A_7^{(i)}$
0	2,172 17	0,417 53	0,394 69	0,288 87	0,263 92	0,244 10	0,237 06	0,235 2
1	0,605 71	0,780 20	0,347 43	0,308 17	0,262 02	0,246 51	0,237 55	0,235 9
2	0,246 60	0,572 64	0,486 18	0,306 07	0,273 41	0,249 21	0,240 46	0,237 6
3	0,110 78	0,370 02	0,484 23	0,372 45	0,281 42	0,257 83	0,244 57	0,240 9
4	0,052 11	0,226 73	0,404 94	0,410 52	0,319 20	0,267 76	0,252 01	0,245 5
5	0,025 17	0,134 90	0,306 40	0,397 56	0,359 11	0,292 55	0,261 74	0,252 3
6	0,012 38	0,078 77	0,217 48	0,347 85	0,375 73	0,326 16	0,279 9	
7	0,006 16	0,045 39	0,147 68	0,282 27	0,362 28	0,353 0	0,306 9	
8	0,003 10	0,025 91	0,097 09	0,216 43	0,325 00	0,361 7	0,335 1	
9	0,001 57	0,014 68	0,062 27	0,158 89	0,274 49	0,349 2	0,354 4	
10	0,000 80	0,008 27	0,039 19	0,112 56	0,221 22	0,317 2	0,362 6	

i	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_1^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_2^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_3^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_4^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_5^{(i)}$	$\frac{3}{8}\frac{a'}{\alpha^2}C^{(i)}$	$\frac{3}{8}\frac{a'}{\alpha^2}C_1^{(i)}$	$\frac{3}{8}\frac{a'}{\alpha^2}C_2^{(i)}$
0	2,107 1	5,782 2	10,068	15,895	23,070	32,147	4,789 6	28,820	96,289
1	1,517 7	5,349 7	10,030	15,691	22,979	32,019	4,280 1	27,393	93,933
2	0,975 2	4,324 4	9,419	15,319	22,581	31,686	3,371 6	23,822	86,918
3	0,596 1	3,209 6	8,213	14,547	21,958	31,088	2,457 7	19,312	
4	0,354 2	2,250 1	6,704	13,232	21,003	30,241	1,700 7		
5	0,206 7	1,514 9	5,187	11,478	19,572	29,086	1,133 8	10,903	
6	0,119 1	0,989 7	3,842	9,517	17,648	27,507			
7	0,067 9	0,631 8	2,748	7,578					
8	0,038 5	0,396 0	1,910	5,825					

MERCURE ET VÉNUS (Suite).

i	$\frac{a'}{\alpha^4} D^{(i)}$	$\frac{a'}{\alpha^5} D_1^{(i)}$	$a'a\frac{dA^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_1^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_2^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_3^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_4^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_5^{(i)}}{da}$
0	46,66	436,6	0,417 53	1,206 9	1,656 0	1,922 3	2,276 2	
1	44,15	421,8	0,780 20	1,475 0	1,619 4	1,972 6	2,280 7	
2	38,13	382,0	0,572 64	1,545 0	1,890 6	2,011 8	2,339 7	
3	30,70	326,9	0,370 02	1,338 5	2,085 8	2,243 0	2,414 8	
4	23,43	266,5	0,226 73	1,036 6	2,041 4	2,508 4	2,615 6	2,851
5	17,15	208,7	0,134 90	0,747 7	1,805 5	2,629 1	2,899 2	3,033
6	12,13	157,9	0,078 77	0,513 7	1,478 5	2,546 5	3,133 7	
7			0,045 39	0,340 8	1,142 2	2,295 9	3,214 0	3,606
8			0,025 91	0,220 1	0,843 5	1,949 3	3,108 5	3,819
9			0,014 68	0,139 2	0,601 2	1,574 6	2,844 0	3,872
10			0,008 27	0,086 6	0,416 1	1,222 6	2,471	3,761

i	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}a\frac{dB^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}a\frac{dB_1^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}a\frac{dB_2^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}a\frac{dB_3^{(i)}}{da}$
0	5,782 2	25,918		
1	5,349 7	25,409		
2	4,324 4	23,162	64,796	
3	3,209 6	19,635	60,065	
4	2,250 1	15,658	53,103	
5	1,514 9	11,887	44,807	
6	0,989 7	8,673	36,235	
7	0,631 8	6,127	28,230	84,172

MERCURE ET LA TERRE.

$a = 0{,}387\ 098\ 7,\quad a' = 1{,}000\ 000\ 0,\quad \log\alpha = \bar{1}{,}587\ 8217.$

Les valeurs des transcendantes dont dépendent les actions mutuelles de Mercure et de la Terre ont été données dans le Chapitre XIV (Tome IV, Additions, page [3]). Il serait inutile de les reproduire ici.

MERCURE ET MARS.

$a = 0{,}387\ 098\ 7,\quad a' = 1{,}523\ 691,\quad \log\alpha = \bar{1}{,}404\ 9247.$

i	$a'A^{(i)}$	$a'A_1^{(i)}$	$a'A_2^{(i)}$	$a'A_3^{(i)}$	$a'A_4^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_1^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_2^{(i)}$
0	2,033 50	0,069 57	0,040 17	0,005 90	0,002 17	1,161 27	1,518 95	0,613 43
1	0,260 46	0,273 83	0,021 20	0,009 09	0,001 74	0,431 94	0,975 94	0,734 68
2	0,049 77	0,102 38	0,057 13	0,006 48	0,002 35	0,136 04	0,441 11	0,530 00
3	0,010 55	0,032 29	0,033 93	0,013 64	0,001 98	0,040 15	0,170 00	
4	0,002 35	0,009 54	0,014 75	0,010 62	0,003 51	0,011 45	0,059 85	
5	0,000 54	0,002 72						
6	0,000 13							
7	0,000 03							

MERCURE ET MARS (Suite).

i	$a'a\frac{dA^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_1^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_2^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_3^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}a\frac{dB^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}a\frac{dB_1^{(i)}}{da}$
0	0,069 57	0,149 90	0,098 04	0,026 40	1,518 95	2,745 8
1	0,273 83	0,316 22	0,069 67	0,034 22	0,975 94	2,445 3
2	0,102 38	0,216 63	0,133 69	0,028 83	0,441 11	1,501 1
3	0,032 29	0,100 14	0,108 78		0,170 00	
4	0,009 54				0,059 85	

MERCURE ET JUPITER.

$a = 0,387\,098\,7,\qquad a' = 5,202\,798,\qquad \log\alpha = \bar{2},871\,5848.$

i	$a'A^{(i)}$	$a'A_1^{(i)}$	$a'A_2^{(i)}$	$a'A_3^{(i)}$	$a'A_4^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_1^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_2^{(i)}$
0	2,002 776	0,005 570	0,002 820	0,000 035	0,000 009	1,012 56	1,037 91	0,038 46
1	0,074 557	0,074 868	0,000 469	0,000 160	0,000 003	0,112 77	0,227 90	0,118 70
2	0,004 161	0,008 342	0,004 210	0,000 039	0,000 010	0,010 48	0,031 65	0,032 16
3	0,000 258	0,000 775	0,000 779	0,000 264	0,000 003	0,000 91	0,003 65	0,005 53
4	0,000 017	0,000 067	0,000 101	0,000 068	0,000 017	0,000 08	0,000 38	0,000 77

i	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_3^{(i)}$	$a'a\frac{dA^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_1^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_2^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_3^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}\frac{dB^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}\frac{dB_1^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}\frac{dB_2^{(i)}}{da}$
0	0,013 56	0,005 570	0,011 210	0,005 746	0,000 142	1,037 91	1,114 83	0,117 61
1	0,004 82	0,074 868	0,075 806	0,001 417	0,000 491	0,227 90	0,465 29	0,251 86
2	0,011 41	0,008 342	0,016 762	0,008 537	0,000 158	0,031 65	0,095 97	0,098 56
3	0,003 78	0,000 775	0,002 332	0,002 348	0,000 804	0,003 65	0,014 72	0,022 40
4	0,000 78	0,000 067	0,000 270	0,000 406	0,000 273	0,000 38	0,001 92	0,003 87

MERCURE ET SATURNE.

$a = 0,387\,098\,7,\qquad a' = 9,538\,852,\qquad \log\alpha = 2,608\,3256.$

i	$a'A^{(i)}$	$a'A_1^{(i)}$	$a'A_2^{(i)}$	$a'A_3^{(i)}$	$a'A_4^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_1^{(i)}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{\alpha}B_2^{(i)}$
0	2,000 824	0,001 650	0,000 828	0,000 003	0,000 001	1,003 72	1,011 16	0,011 21
1	0,040 606	0,040 657	0,000 075	0,000 025	0,000 000	0,061 06	0,122 50	0,062 01
2	0,001 236	0,002 474	0,001 240	0,000 003	0,000 001	0,003 10	0,009 31	0,009 35
3	0,000 042	0,000 125	0,000 126	0,000 042	0,000 000			

MERCURE ET SATURNE (Suite).

i	$a'a\frac{dA^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_1^{(i)}}{da}$	$a'a\frac{dA_2^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{2}a\frac{dB^{(i)}}{da}$	$\frac{1}{2}\frac{a'}{2}a\frac{dB_1^{(i)}}{da}$
0	0,001 650	0,003 306	0,001 665	1,011 16	1,033 59
1	0,040 657	0,040 808	0,000 227	0,122 50	0,246 51
2	0,002 474	0,004 954	0,002 491	0,009 31	0,028 01
3	0,000 125	0,000 377	0,000 377		

II. — *Expressions des fonctions perturbatrices relatives aux actions des différentes planètes sur Mercure. — Intégrales dont dépendent les perturbations du mouvement de Mercure.* (Chap. XV, page 5.)

La fonction $a'R_1$ est écrite dans la première colonne des tableaux, chaque ligne ne renfermant qu'un terme. Les coefficients sont représentés par leurs logarithmes.

Les fonctions $a'R_{(0,1)}$ ne diffèrent des fonctions $a'R_1$ correspondantes que par quelques-uns des coefficients. On trouve, dans la *seconde* colonne des tableaux, les coefficients qui ont ainsi éprouvé un changement; les coefficients communs n'y sont pas reproduits. On a donc par exemple, en considérant l'action de Vénus sur Mercure :

$$a'R_{(0,1)} = +\bar{2},848\cos(l'-\lambda)+\bar{1},3920\cos(2l'-2\lambda)+\ldots.$$

Les coefficients des fonctions dérivées, colonnes *trois* et *quatre*, sont également représentés par leurs logarithmes, et la quatrième colonne ne contient que les coefficients qui diffèrent de ceux de la troisième. On a ainsi dans la même théorie :

$$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da} = +\bar{1},389\cos(l'-\lambda)+\bar{1},758\cos(2l'-2\lambda)+\ldots.$$

Les colonnes *cinq* à *onze* contiennent les valeurs mêmes des coefficients des fonctions placées en tête de ces colonnes, et tous les termes écrits sur une même ligne horizontale répondent au même argument que le terme correspondant de la fonction $a'R_1$. Pour simplifier l'impression, on a exprimé tous les coefficients en *millièmes* de seconde. On lira donc, toujours dans la même théorie :

$$\mathcal{A}_1 \quad +0'',221\sin(l'-\lambda)+0'',259\sin(2l'-2\lambda)\ldots,$$
$$\mathfrak{C}_1 = +0'',025\cos(l'-\lambda)+0'',086\cos(2l'-2\lambda)\ldots.$$
$$\Lambda_1 = +0'',157\sin(l'-\lambda)+0'',274\sin(2l'-2\lambda)\ldots.$$
$$\mathfrak{I}_1 = -0'',041\sin(l'-\lambda)+0'',042\sin(2l'-2\lambda)\ldots.$$
$$\mathfrak{L}_1 = +0'',002\cos(-6l'+7\lambda-\varpi)+0'',004\cos(-5l'+6\lambda-\varpi),$$
$$\mathfrak{G}_1 = +0'',019\sin(l'-\lambda)+0'',010\sin(2l'-2\lambda)\ldots,$$
$$\mathfrak{S}_1 = -0'',007\cos(\lambda+\varpi-2\tau')-0'',013\cos(l'+\varpi-2\tau').$$

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR VÉNUS.

$e = 0,205\,618$, $e' = 0,006\,833$, $\varkappa = 0,037\,913$.

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{L}_1$	$\mathfrak{N}_1$	$\mathfrak{F}_1$	$\mathfrak{T}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{C}$
$+\bar{1},7823\cos(l'-\lambda)$	$+\bar{2},848$	$+\bar{1},892$	$+\bar{1},389$	+221	+ 25	+ 157				
$+\bar{1},3920\cos(2l'-2\lambda)$		$+\bar{1},758$		+259	+ 86	+ 274				
$+\bar{1},044\cos(3l'-3\lambda)$		$+\bar{1},568$		+111	+ 39	+ 82				
$+\bar{2},717\cos(4l'-4\lambda)$		$+\bar{1},356$		+ 51	+ 18	+ 29				
$+\bar{2},401\cos(5l'-5\lambda)$		$+\bar{1},130$		+ 24	+ 9	+ 11				
$+\bar{2},093\cos(6l'-6\lambda)$		$+\bar{2},896$		+ 12		+ 5				
$+\bar{3},790\cos(7l'-7\lambda)$		$+\bar{2},657$		+ 6		+ 2				
$-\bar{2},622\,e^2\cos(l'-\lambda)$	$+\bar{1},354$	$+\bar{1},885$	$+0,015$	+ 39		+ 21	− 41			
$-\bar{1},660\,e^2\cos(2l'-2\lambda)$		$-\bar{1},758$		− 11	− 7	− 21	+ 42			
$-\bar{1},756\,e^2\cos(3l'-3\lambda)$		$-0,209$		− 21	− 8	− 18	+ 35			
$-\bar{1},714\,e^2\cos(4l'-4\lambda)$		$-0,320$		− 20	− 8	− 12	+ 24			
$-\bar{1},611\,e^2\cos(5l'-5\lambda)$		$-0,321$		− 16	− 6	− 8	+ 15			
$-\bar{1},473\,e^2\cos(6l'-6\lambda)$		$-0,265$		− 12		− 5	+ 9			
$-\bar{1},312\,e^2\cos(7l'-7\lambda)$		$-0,171$		− 8		− 3	+ 5			
$-0,217\,\varkappa^2\cos(l'-\lambda)$	$-0,047$	$-0,733$	$-0,688$	− 6		− 4			+ 19	
$-0,054\,\varkappa^2\cos(2l'-2\lambda)$		$-0,661$		− 3		− 2			+ 10	
$+0,152\,e^4\cos(4l'-4\lambda)$							− 5			
$+\bar{2},543\,e\cos(-6l'+7\lambda-\omega)$		$+\bar{1},334$		− 5		− 2	+ 2	+ 2		
$+\bar{2},767\,e\cos(-5l'+6\lambda-\omega)$		$+\bar{1},478$		− 8		− 4	+ 4	+ 4		
$+\bar{2},978\,e\cos(-4l'+5\lambda-\omega)$		$+\bar{1},590$		− 13	+ 6	− 7	+ 7	+ 7		
$+\bar{1},168\,e\cos(-3l'+4\lambda-\omega)$		$+\bar{1},644$		− 18	+ 9	− 13	+ 14	+ 14		
$+\bar{1},316\,e\cos(-2l'+3\lambda-\omega)$		$+\bar{1},571$		− 19	+ 12	− 21	+ 25	+ 25		
$+\bar{1},334\,e\cos(-l'+2\lambda-\omega)$	$-\bar{2},716$	$+\bar{2},630$	$-\bar{1},352$	− 16	− 3	+ 7	− 9	− 9		
$-\bar{1},320\,e\cos(+\lambda-\omega)$		$-\bar{1},781$		+ 68	− 9	+ 35	− 56	− 56		
$-\bar{1},9982\,e\cos(+l'-\omega)$	$-\bar{1},286$	$-0,1812$	$-\bar{1},854$	+206			−133	−133		
$-\bar{1},8918\,e\cos(2l'-\lambda-\omega)$		$-0,2828$		−998	−157	−2805	+966	+966		
$-\bar{1},714\,e\cos(3l'-2\lambda-\omega)$		$-0,250$		−244	− 55	− 257	+168	+168		
$-\bar{1},508\,e\cos(4l'-3\lambda-\omega)$		$-0,154$		−112	− 29	− 80	+ 60	+ 60		
$-\bar{1},286\,e\cos(5l'-4\lambda-\omega)$		$-0,021$		− 58	− 17	− 31	+ 25	+ 25		
$-\bar{1},056\,e\cos(6l'-5\lambda-\omega)$		$-\bar{1},863$		− 31	− 9	− 14	+ 12	+ 12		
$-\bar{2},818\,e\cos(7l'-6\lambda-\omega)$		$-\bar{1},689$		− 17	− 5	− 6	+ 5	+ 5		
$-\bar{2},577\,e\cos(8l'-7\lambda-\omega)$		$-\bar{1},502$		− 9		− 3	+ 3	+ 3		
$+0,112\,e'\cos(l'-\varpi')$		$+\bar{1},910$		− 8						
$+0,114\,e'\cos(2l'-\lambda-\varpi')$	$+\bar{1},359$	$+0,281$	$+\bar{1},923$	+ 14		+ 27				
$+\bar{1},956\,e'\cos(3l'-2\lambda-\varpi')$		$+0,343$		+ 10		+ 15				
$+\bar{1},758\,e'\cos(4l'-3\lambda-\varpi')$		$+0,293$		+ 5		+ 5				
$-\bar{1},826\,e^3\cos(-3l'+4\lambda-\omega)$		$-0,300$		+ 3		+ 2	− 8	− 3		
$-\bar{1},678\,e^3\cos(-2l'+3\lambda-\omega)$		$-\bar{1},983$		+ 2		+ 2	− 7	− 2		
$-\bar{1},461\,e^3\cos(+l'-\omega)$		$-0,190$		+ 19			− 25	− 8		

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR VÉNUS (Suite).

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{L}_1$	A_1	$\mathfrak{F}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{C}_1$
$+\bar{1},118\, e^3 \cos(2l' - \lambda - \omega)$		$-\bar{1},837$		-15		$+20$	-21	-7		
$+\bar{1},849\, e^3 \cos(3l' - 2\lambda - \omega)$		$+0,213$		$+9$		$+15$	-29	-10		
$+0,027\, e^3 \cos(4l' - 3\lambda - \omega)$		$+0,617$		$+14$		$+11$	-25	-8		
$+0,065\, e^3 \cos(5l' - 4\lambda - \omega)$		$+0,770$		$+14$		$+8$	-19	-6		
$+0,031\, e^3 \cos(6l' - 5\lambda - \omega)$		$+0,821$		$+12$		$+5$	-14	-5		
$+\bar{1},953\, e^3 \cos(7l' - 6\lambda - \omega)$		$+0,812$		$+9$		$+4$	-9	-3		
.... $e^3 \cos(8l' - 7\lambda - \omega)$				$+7$		$+2$	-6	-2		
$+0,457\, e\eta^2 \cos(\lambda - \omega)$		$+1,133$							$+6$	
$+0,639\, e\eta^2 \cos(l' - \omega)$	$+0,550$	$+1,268$	$+1,249$	-7			$+4$	$+4$	$+19$	
$+0,658\, e\eta^2 \cos(2l' - \lambda - \omega)$		$+1,327$		$+16$		$+24$	-8	-8	-45	
$+0,590\, e\eta^2 \cos(3l' - 2\lambda - \omega)$		$+1,321$		$+4$		$+3$	-2	-2	-10	
$-0,485\, e\eta^2 \cos(+\lambda + \omega - 2\tau')$		$-1,098$							-7	-7
$-0,507\, e\eta^2 \cos(l' + \omega - 2\tau')$	$-0,382$	$-1,001$	$-0,965$				-2	$+2$	-13	-13
$-0,156\, e\eta^2 \cos(2l' - \lambda + \omega - 2\tau')$		$-0,832$		-5		-7	$+3$	-3	$+14$	$+14$
$+\bar{1},255\, e^2 \cos(-3l' + 5\lambda - 2\omega)$		$+\bar{1},731$		-3		-2	$+5$	$+5$		
$+\bar{1},316\, e^2 \cos(-2l' + 4\lambda - 2\omega)$		$+\bar{1},605$		-3		-3	$+7$	$+7$		
$+\bar{1},314\, e^2 \cos(+l' + \lambda - 2\omega)$	$+\bar{1},144$	$+\bar{1},830$	$+\bar{1},785$	-10		-3	$+11$	$+11$		
$+\bar{1},867\, e^2 \cos(2l' - 2\omega)$		$+0,314$		-61			$+104$	$+104$		
$+\bar{1},942\, e^2 \cos(3l' - \lambda - 2\omega)$		$+0,500$		-421	-45	$+1001$	$+554$	$+554$		
$+\bar{1},895\, e^2 \cos(4l' - 2\lambda - 2\omega)$		$+0,553$		$+191$	$+33$	$+290$	-200	-200		
$+\bar{1},790\, e^2 \cos(5l' - 3\lambda - 2\omega)$		$+0,531$		$+76$	$+16$	$+59$	-65	-65		
$+\bar{1},651\, e^2 \cos(6l' - 4\lambda - 2\omega)$		$+0,463$		$+41$	$+10$	$+23$	-30	-30		
$+\bar{1},489\, e^2 \cos(7l' - 5\lambda - 2\omega)$		$+0,363$		$+24$	$+6$	$+10$	-15	-15		
$+\bar{1},312\, e^2 \cos(8l' - 6\lambda - 2\omega)$		$+0,239$		$+14$		$+5$	-8	-8		
.... $e^2 \cos(9l' - 7\lambda - 2\omega)$				$+8$		$+3$	-4	-4		
$-0,464\, ee' \cos(3l' - \lambda - \varpi' - \omega)$		$-0,885$		$+34$	$+5$	-111	-31	-31		
$-0,431\, ee' \cos(4l' - 2\lambda - \varpi' - \omega)$		$-0,983$		-17		-33	$+11$	$+11$		
$-0,335\, ee' \cos(5l' - 3\lambda - \varpi' - \omega)$		$-0,990$		-7		-7	$+4$	$+4$		
$+\bar{1},910\, \eta^2 \cos(2l' - 2\tau')$		$+0,457$							$+11$	$+11$
$+\bar{1},718\, \eta^2 \cos(3l' - \lambda - 2\tau')$		$+0,364$		-10		$+20$			$+31$	$+31$
$+\bar{1},504\, \eta^2 \cos(4l' - 2\lambda - 2\tau')$		$+0,235$		$+3$		$+4$			-8	-8
$-\bar{1},264\, e^4 \cos(3l' - \lambda - 2\omega)$		$+\bar{1},716$		-3		-9	-10	-5		
$-\bar{1},980\, e^4 \cos(4l' - 2\lambda - 2\omega)$		$-0,507$		-7		-15	$+21$	$+10$		
$-0,224\, e^4 \cos(5l' - 3\lambda - 2\omega)$		$-0,913$		-8		-7	$+15$	$+8$		
$-0,324\, e^4 \cos(6l' - 4\lambda - 2\omega)$		$-1,110$		-8		-5	$+12$	$+6$		
$-0,347\, e^4 \cos(7l' - 5\lambda - 2\omega)$		$-1,204$		-7		-3	$+9$	$+5$		
.... $e^4 \cos(8l' - 6\lambda - 2\omega)$				-6		-2	$+7$	$+3$		

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR VÉNUS (Suite).

$a'R_1$	$a'R_{(1,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(1,1)}}{da}$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{L}_1$	Λ_1	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{G}_1$	$\mathcal{T}_1$
$-0,925\,e^2\eta^2\cos(3l'-\lambda-2\omega)$		$-1,707$		$+10$		-14	-8	-8	-21	
$-0,934\,e^2\eta^2\cos(4l'-2\lambda-2\omega)$		$-1,759$		-4		-5	$+3$	$+3$	$+9$	
$+0,499\,e^2\eta^2\cos(3l'-\lambda-2\tau')$		$+1,327$		-4		$+5$	$+3$		$+8$	$+8$
$-\bar{1},793\,e^3\cos(3l'-3\omega)$		$-0,400$		$+10$			-18	-18		
$-1,974\,e^3\cos(4l'-\lambda-3\omega)$		$-0,653$		$+38$		-21	-57	-57		
$-0,0189\,e^3\cos(5l'-2\lambda-3\omega)$		$-0,7718$		-664	-91	-8275	$+837$	$+837$		
$-\bar{1},991\,e^3\cos(6l'-3\lambda-3\omega)$		$-0,811$		-47	-8	-50	$+51$	$+51$		
$-\bar{1},919\,e^3\cos(7l'-4\lambda-3\omega)$		$-0,798$		-24	-5	-15	$+22$	$+22$		
$-1,815\,e^3\cos(8l'-5\lambda-3\omega)$		$-0,747$		-14		-7	$+12$	$+12$		
.... $e^3\cos(9l'-6\lambda-3\omega)$				-10		-3	$+6$	$+6$		
.... $e^3\cos(10l'-7\lambda-3\omega)$				-6						
$+0,667\,e^2e'\cos(4l'-\lambda-\varpi'-2\omega)$		$+1,247$		-5		$+3$	$+6$	$+6$		
$+0,7256\,e^2e'\cos(5l'-2\lambda-\varpi'-2\omega)$		$+1,395$		$+93$	$+15$	$+1400$	-94	-94		
$+0,707\,e^2e'\cos(6l'-3\lambda-\varpi'-2\omega)$		$+1,455$		$+7$		$+9$	-6	-6		
$-0,952\,ee'^2\cos(5l'-2\lambda-2\varpi'-\omega)$		$-1,519$		-4		-78	$+3$	$+3$		
$-0,175\,e\eta^2\cos(4l'-\lambda-\omega-2\tau')$		$-0,939$							-6	-6
$-0,068\,e\eta^2\cos(5l'-2\lambda-\omega-2\tau')$		$-0,892$		-30	-3	-315	$+11$	$+11$	$+59$	$+59$
$+0,361\,e'\eta^2\cos(5l'-2\lambda-\varpi'-2\tau')$		$+1,113$		$+2$		$+21$			-4	-4
$+0,080\,e^5\cos(5l'-2\lambda-3\omega)$		$+0,724$		$+25$		$+403$	-68	-41		
$+0,377\,e^5\cos(6l'-3\lambda-3\omega)$						$+5$	-9	-5		
$+0,528\,e^5\cos(7l'-4\lambda-3\omega)$						$+3$	-6	-4		
$+1,196\,e^3e'^2\cos(5l'-2\lambda-3\omega)$						$+6$				
$+\bar{1},189\,e^3\eta^2\cos(5l'-2\lambda-3\omega)$		$+2,092$		$+20$	$+2$	$+176$	-18	-18	-33	
$-\bar{1},731\,e^3\cos(5l'-2\lambda-3\omega)$						-8	$+2$			
$-0,771\,e^4e'\cos(5l'-2\lambda-\varpi'-2\omega)$		$-1,239$		-3		-66	$+9$	$+4$		
$-1,828\,e^2e'\eta^2\cos(5l'-2\lambda-\varpi'-2\omega)$						-26	$+2$	$+2$		
$-0,439\,e^4e'\cos(5l'-2\lambda+\varpi'-4\omega)$						-31	-4	-4		
$-0,522\,e^3\eta^2\cos(5l'-2\lambda-\omega-2\tau')$						-38	$+4$		$+7$	$+7$
$+1,171\,e\eta^4\cos(5l'-2\lambda-\omega-2\tau')$						$+6$				
$+\bar{1},999\,e^4\cos(5l'-\lambda-4\omega)$		$+0,771$		-6		$+2$	$+10$	$+10$		
$+0,113\,e^4\cos(6l'-2\lambda-4\omega)$		$+0,944$		-25		$+31$	$+35$	$+35$		
$+0,148\,e^4\cos(7l'-3\lambda-4\omega)$		$+1,033$		$+41$	$+6$	$+92$	-51	-51		
$+0,130\,e^4\cos(8l'-4\lambda-4\omega)$		$+1,067$		$+13$		$+11$	-15	-15		
$+0,076\,e^4\cos(9l'-5\lambda-4\omega)$		$+1,058$		$+8$		$+4$	-8	-8		
$-0,940\,e^3e'\cos(6l'-2\lambda-\varpi'-3\omega)$		$-1,702$		$+5$		-7	-6	-6		
$-0,983\,e^3e'\cos(7l'-3\lambda-\varpi'-3\omega)$		$-1,808$		-8		-21	$+9$	$+9$		
$+0,362\,e^2\eta^2\cos(7l'-3\lambda-2\omega-2\tau')$		$+1,402$		$+3$		$+5$			-4	-4

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR VÉNUS (SUITE).

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{C}_1$	A_1	$\mathfrak{F}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{E}_1$
$-0,190\,e^5\cos(7l'-2\lambda-5\omega)$						-2	-5	-5		
$-0,275\,e^5\cos(8l'-3\lambda-5\omega)$		$-1,218$		$+25$		-98	-34	-34		
$-0,305\,e^5\cos(9l'-4\lambda-5\omega)$		$-1,291$		-8		$+11$	$+10$	$+10$		
$+1,203\,e^4e'\cos(8l'-3\lambda-\varpi'-4\omega)$		$+2,094$		-6		$+28$	$+8$	$+8$		
$-0,692\,e^3\eta^2\cos(8l'-3\lambda-3\omega-2\tau')$		$-1,692$		$+3$		-9	-2	-2	-3	-3
$+0,353\,e^6\cos(10l'-4\lambda-6\omega)$		$+1,485$		$+15$		$+98$	-20	-20		
$-1,462\,e^5e'\cos(10l'-4\lambda-\varpi'-5\omega)$		$-2,452$		-5		-33	$+6$	$+6$		
$+0,948\,e^4\eta^2\cos(10l'-4\lambda-4\omega-2\tau')$						$+10$				

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR LA TERRE.

$e = 0,205\,618,\qquad e' = 0,016\,770,\qquad \eta = 0,061\,069.$

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{C}_1$	A_1	$\mathfrak{F}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{E}_1$
$+\bar{1},614\cos(l'-\lambda)$	$+\bar{2},381$	$+\bar{1},667$	$+\bar{2},888$	$+46$	$+6$	$+28$				
$+\bar{1},080\cos(2l'-2\lambda)$		$+\bar{1},411$		$+76$	$+28$	$+70$				
$+\bar{2},590\cos(3l'-3\lambda)$		$+\bar{1},089$		$+24$	$+9$	$+15$				
$+\bar{2},121\cos(4l'-4\lambda)$		$+\bar{2},739$		$+8$		$+4$				
$-\bar{1},125\,e^2\cos(l'-\lambda)$	$+\bar{2},781$	$+\bar{2},476$	$+\bar{1},349$	$+6$		$+3$	-7			
$-\bar{1},428\,e^2\cos(2l'-2\lambda)$		$-\bar{1},695$		-6		-7	$+16$			
$-\bar{1},341\,e^2\cos(3l'-3\lambda)$		$-\bar{1},818$		-5		-4	$+9$			
$-\bar{1},845\,\eta^2\cos(l'-\lambda)$	$-\bar{1},496$	$-0,180$	$-0,051$				$+6$			
$+\bar{1},047\,e\cos(-2l'+3\lambda-\omega)$		$+\bar{1},341$		-8	$+5$	-7	$+10$	$+10$		
$-\bar{2},954\,e\cos(+\lambda-\omega)$		$-\bar{1},333$		$+20$	-3	$+12$	-20	-20		
$-\bar{1},808\,e\cos(+l'-\omega)$	$-\bar{2},797$	$-\bar{1},897$	$-\bar{1},317$	$+80$			-57	-57		
$-\bar{1},567\,e\cos(2l'-\lambda-\omega)$		$-\bar{1},909$		-145	-26	-191	$+157$	$+157$		
$-\bar{1},250\,e\cos(3l'-2\lambda-\omega)$		$-\bar{1},754$		-41	-10	-30	$+31$	$+31$		
$-\bar{2},904\,e\cos(4l'-3\lambda-\omega)$		$-\bar{1},526$		-15	-4	-8	$+9$	$+9$		
$-\bar{2},543\,e\cos(5l'-4\lambda-\omega)$		$-\bar{1},258$		-6		-2				
$+0,053\,e'\cos(l'-\varpi')$		$+\bar{1},484$		-10						
$+\bar{1},633\,e'\cos(3l'-2\lambda-\varpi')$		$+\bar{1},973$		$+6$		$+6$				
$-\bar{2},816\,e^3\cos(l'-\omega)$		$-\bar{1},422$		$+4$			-8	-3		
$+\bar{1},168\,e^3\cos(2l'-\lambda-\omega)$		$+\bar{1},269$				$+3$	-8	-3		
$+\bar{1},467\,e^3\cos(3l'-2\lambda-\omega)$		$+\bar{1},930$		$+3$		$+2$	-6	-2		
$+0,163\,e\eta^2\cos(l'-\omega)$	$+\bar{1},943$						$+3$	$+3$	$+10$	
$+0,112\,e\eta^2\cos(2l'-\lambda-\omega)$						$+2$	-2	-2	-7	
$-0,021\,e\eta^2\cos(l'+\omega-2\tau')$	$-\bar{1},672$						-2	-2	-5	-5

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR LA TERRE (Suite).

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{L}_1$	A_1	$\mathfrak{F}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{C}_1$
$+\bar{1},512\,e^2\cos(2l'-2\omega)$		$+\bar{1},879$		-30			$+61$	$+61$		
$+\bar{1},463\,e^2\cos(3l'-\lambda-2\omega)$		$+\bar{1},975$		$+65$	$+8$	$+108$	-95	-95		
$+\bar{1},281\,e^2\cos(4l'-2\lambda-2\omega)$		$+\bar{1},907$		$+15$	$+3$	$+10$	-17	-17		
$+\bar{1},038\,e^2\cos(5l'-3\lambda-2\omega)$		$+\bar{1},756$		$+6$		$+3$	-6	-6		
$-0,124\,ee'\cos(3l'-\lambda-\varpi'-\omega)$		$-0,478$		-17		-40	$+18$	$+18$		
$+\bar{1},484\,\eta^2\cos(2l'-2\tau')$		$+\bar{1},910$		-3					$+9$	$+9$
$+\bar{1},160\,\eta^2\cos(3l'-\lambda-2\tau')$		$+\bar{1},720$		$+3$		$+5$			-7	-7
$-\bar{1},278\,e^3\cos(3l'-3\omega)$		$-\bar{1},811$		$+4$			-7	-7		
$-\bar{1},841\,e^3\cos(4l'-\lambda-3\omega)$		$-\bar{1},976$		-101	-9	-960	$+167$	$+167$		
$-\bar{1},255\,e^3\cos(5l'-2\lambda-3\omega)$		$-\bar{1},977$		-5		-3	$+6$	$+6$		
$+0,173\,e^2e'\cos(4l'-\lambda-\varpi'-2\omega)$		$+0,694$		$+43$	$+5$	$+531$	-62	-62		
$-0,521\,ee'^2\cos(4l'-\lambda-2\varpi'-\omega)$		$-0,889$		-5		-97	$+6$	$+6$		
$-\bar{1},444\,e\eta^2\cos(4l'-\lambda-\omega-2\tau')$		$-0,123$		-12		-107	$+6$	$+6$	$+21$	$+21$
$+\bar{1},886\,e'\eta^2\cos(4l'-\lambda-\varpi'-2\tau')$		$+0,461$		$+2$		$+24$			-5	-5
$+\bar{1},014\,e^4\cos(4l'-\lambda-3\omega)$		$+\bar{1},568$		$+2$		$+19$	-6	-3		
$+0,226\,e^2\eta^2\cos(4l'-\lambda-3\omega)$		$+0,987$		$+4$		$+27$	-5	-5		
$-\bar{1},782\,e^3e'\cos(4l'-\lambda-\varpi'-2\omega)$						-9				
$-0,962\,e^2e'\eta^2\cos(4l'-\lambda-\varpi'-2\omega)$						-12				
$-\bar{1},684\,e^3\eta^2\cos(4l'-\lambda-\omega-2\tau')$						-8				
$+\bar{1},214\,e^4\cos(5l'-\lambda-4\omega)$						$+5$	$+6$	$+6$		

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR JUPITER.

$e = 0,205\,618,\qquad e' = 0,048\,239,\qquad \eta = 0,054\,839.$

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{L}_1$	A_1	$\mathfrak{F}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{C}_1$
$+\bar{2},872\cos(l'-\lambda)$	$+\bar{4},190$	$+\bar{2},874$	$+\bar{4},668$	$+14$		$+7$				
$+\bar{3},619\cos(2l'-2\lambda)$		$+\bar{3},921$		$+124$	$+48$	$+95$				
$+\bar{4},412\cos(3l'-3\lambda)$		$+\bar{4},890$		$+8$		$+4$				
$-\bar{2},016\,e^2\cos(2l'-2\lambda)$		$-\bar{2},316$		-13	-5	-10	$+11$			
$+\bar{3},618\,e\cos(-2l'+3\lambda-\omega)$		$+\bar{3},919$		-17	$+10$	-13	$+20$	$+20$		
$-\bar{3},445\,e\cos(+\lambda-\omega)$		$-\bar{3},749$		$+34$	-6	$+25$	-40	-40		
$-\bar{1},049\,e\cos(+l'-\omega)$	$-\bar{4},589$	$-\bar{1},052$	$-\bar{3},067$	$+346$			-273	-273		
$-\bar{2},097\,e\cos(2l'-\lambda-\omega)$		$-\bar{2},399$		-157	-30	-122	$+186$	$+186$		
$-\bar{3},065\,e\cos(3l'-2\lambda-\omega)$		$-\bar{3},543$		-11	-3	-6	$+9$	$+9$		
$+0,002\,e'\cos(l'-\varpi')$		$+\bar{3},924$		-583						
$+\bar{2},164\,e'\cos(3l'-2\lambda-\varpi')$		$+\bar{2},466$		$+21$	$+8$	$+16$				

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR JUPITER (Suite).

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{L}_1$	Λ_1	$\mathfrak{J}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{G}_2$
$-\bar{4},469\,e^3\cos(l'-\omega)$		$-\bar{4},951$		$+11$			-26	-9		
$+\bar{3},827\,e^3\cos(2l'-\lambda-\omega)$		$+\bar{2},126$		$+4$		$+3$	-13	-4		
$+\bar{1},064\,e\varkappa^2\cos(l'-\omega)$	$+\bar{3},634$	$+\bar{1},096$	$+\bar{2},115$	-12			$+9$	$+9$	$+35$	
$+\bar{3},802\,e^2e'\cos(l'-\varpi')$		$+\bar{2},110$		-38			$+89$			
$-\bar{2},560\,e^2e'\cos(3l'-2\lambda-\varpi')$		$-\bar{2},860$		-2		-2	$+5$			
$-\bar{2},404\,e'\varkappa^2\cos(l'-\varpi')$		$-\bar{2},712$		$+11$					-48	
$-\bar{3},713\,e^2e'\cos(l'+\varpi'-2\omega)$		$-\bar{2},012$		$+30$			$+72$	$+72$		
$-\bar{1},057\,e\varkappa^2\cos(l'+\omega-2\tau')$	$-\bar{3},370$	$-\bar{1},074$	$-\bar{3},851$	$+6$			-5	$+5$	-19	-19
$-\bar{3},614\,e'\varkappa^2\cos(l'+\varpi'-2\tau')$		$-\bar{3},910$							-8	-8
$+\bar{3},618\,e^2\cos(-2l'+4\lambda-2\omega)$		$+\bar{3},919$					$+6$	$+6$		
$+\bar{2},0183\,e^2\cos(+2l'-2\omega)$		$+\bar{2},321$		-638			$+1511$	$+1511$		
$+\bar{3},265\,e^2\cos(3l'-\lambda-2\omega)$		$+\bar{3},743$		$+7$		$+4$	-12	-12		
$-\bar{1},351\,ee'\cos(2l'-\varpi'-\omega)$	$-\bar{3},067$	$-\bar{1},355$	$-\bar{3},546$	$+25$			-20	-20		
$-\bar{2},641\,ee'\cos(3l'-\lambda-\varpi'-\omega)$		$-\bar{2},944$		-27	-5	-22	$+32$	$+32$		
$+0,003\,e'^2\cos(2l'-2\varpi')$		$+\bar{2},101$		-21						
$+\bar{3},924\,\varkappa^2\cos(2l'-2\tau')$		$+\bar{2},229$		-37					$+166$	$+166$
$-\bar{2},413\,e^2e'^2\cos(2l'-2\omega)$		$-\bar{2},713$		$+4$			-9	-9		
$-\bar{2},334\,e^2\varkappa^2\cos(2l'-2\omega)$		$-\bar{2},651$		$+4$			-9	-9	-18	
$+\bar{2},103\,e^2\varkappa^2\cos(2l'-2\tau')$		$+\bar{2},411$		-2			$+6$		$+11$	$+11$
$-\bar{3},054\,e^3\cos(3l'-3\omega)$		$-\bar{3},533$		$+14$			-34	-34		
$+\bar{2},563\,e^2e'\cos(3l'-\varpi'-2\omega)$		$+\bar{2},867$		-72			$+170$	$+170$		
$-\bar{3},292\,e\varkappa^2\cos(3l'-\omega-2\tau')$		$-\bar{3},773$		$+2$					-5	-5
$+\bar{2},469\,e'\varkappa^2\cos(3l'-\varpi'-2\tau')$		$+\bar{2},776$		-4					$+19$	$+19$
$-\bar{3},754\,e^3e'\cos(4l'-\varpi'-3\omega)$							-6	-6		
$+\bar{2},949\,e^2e'^2\cos(4l'-2\varpi'-2\omega)$							$+15$	$+15$		

PERTURBATIONS DE MERCURE PAR SATURNE.

$e = 0,205\,618,\qquad e' = 0,055\,996,\qquad \varkappa = 0,055\,792.$

$a'R_1$	$a'R_{(0,1)}$	$a'a\frac{dR_1}{da}$	$a'a\frac{dR_{(0,1)}}{da}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{L}_1$	Λ_1	$\mathfrak{J}_1$	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{G}_1$	$\mathfrak{E}_1$
$+\bar{3},092\cos(2l'-2\lambda)$	$+\bar{3},393$			$+6$	$+2$	$+4$				
$-\bar{2},785\,e\cos(l'-\omega)$	$-\bar{5},798$	$-\bar{2},786$	$-\bar{4},275$	$+23$			-18	-18		
$-\bar{3},569\,e\cos(2l'-\lambda-\omega)$		$-\bar{3},871$		-7		-6	$+9$	$+9$		
.... $e'\cos(l'-\varpi')$		$+\bar{3},394$		-81						
$+\bar{3},270\,e^2e'\cos(l'-\varpi')$		$+\bar{3},573$		-5			$+12$			
$-\bar{3},872\,e'\varkappa^2\cos(l'-\varpi')$		$-\bar{2},175$							-7	
$-\bar{3},188\,e^2e'\cos(l'+\varpi'-2\omega)$		$-\bar{3},488$		$+4$			$+10$	$+10$		
$+\bar{3},490\,e^2\cos(2l'-2\omega)$		$+\bar{3},792$		-76			$+181$	$+181$		
$+\bar{3},394\,\varkappa^2\cos(2l'-2\tau')$		$+\bar{3},696$		-5					$+20$	$+20$
$+\bar{2},035\,e^2e'\cos(3l'-\varpi'-2\omega)$		$+\bar{2},336$		-10			$+24$	$+24$		

III. — *Inégalités périodiques de la longitude vraie et du rayon vecteur de Mercure.* (CHAP. XV, page 12.)

(CHAP. XV, page 12.)

Continuons, pour simplifier l'écriture, à attribuer un seul accent aux lettres représentant les éléments de la planete troublante, quelle qu'elle soit. Les perturbations de la longitude étant exprimées par une suite de termes de la forme L sin B, et celles du rayon vecteur par une suite de termes de la forme R cos B, on a :

ACTION DE VÉNUS.

B	L	R
0		− 0,007
$l'-\lambda$	+ 0,743	+ 0,093
$2l'-2\lambda$	− 2,135	− 0,421
$3l'-3\lambda$	− 0,454	− 0,078
$4l'-4\lambda$	+ 0,061	
$5l'-5\lambda$	− 0,207	− 0,030
$6l'-6\lambda$	− 0,010	
$3l'-3\lambda-\varpi'+\omega$	+ 0,017	
$5l'-5\lambda-\varpi'+\omega$	+ 0,031	+ 0,005
$-6l'+7\lambda-\omega$	+ 0,014	
$-5l'+6\lambda-\omega$	+ 0,063	− 0,010
$-4l'+5\lambda-\omega$	− 0,006	
$-3l'+4\lambda-\omega$	+ 0,133	− 0,016
$-2l'+3\lambda-\omega$	+ 0,559	− 0,083
$-l'+2\lambda-\omega$	− 0,227	+ 0,035
$+\lambda-\omega$	+ 0,065	− 0,011
$+l'-\omega$	+ 0,300	− 0,042
$2l'-\lambda-\omega$	− 3,813	− 0,143
$3l'-2\lambda-\omega$	− 1,410	− 0,217
$4l'-3\lambda-\omega$	+ 0,310	+ 0,064
$5l'-4\lambda-\omega$	− 0,763	− 0,113
$6l'-5\lambda-\omega$	− 0,021	
$2l'-\lambda-\varpi'$	+ 0,041	
$3l'-2\lambda-\varpi'$	+ 0,071	+ 0,009
$4l'-3\lambda-\varpi'$	− 0,022	− 0,006
$5l'-4\lambda-\varpi'$	+ 0,118	+ 0,018
$2l'-\lambda-2\tau'$	− 0,012	
$5l'-4\lambda-2\tau'$	− 0,026	− 0,003
$-5l'+7\lambda-2\omega$	+ 0,016	
$-3l'+5l-2\omega$	+ 0,046	
$-2l'+4l-2\omega$	+ 0,157	− 0,025
$-l'+3\lambda-2\omega$	− 0,057	
$+2\lambda-2\omega$	+ 0,014	
$+l'+\lambda-2\omega$	+ 0,079	− 0,016
$2l'-2\omega$	− 0,761	+ 0,163
$3l'-\lambda-2\omega$	+ 0,590	+ 0,024
$4l'-2\lambda-2\omega$	+ 0,538	+ 0,045

B	L	R
$5l'-3\lambda-2\omega$	− 3,102	− 0,589
$6l'-4\lambda-2\omega$	− 0,068	− 0,015
$7l'-5\lambda-2\omega$	+ 0,030	
$3l'-\lambda-\varpi'-\omega$	− 0,075	− 0,003
$4l'-2\lambda-\varpi'-\omega$	− 0,059	
$5l'-3\lambda-\varpi'-\omega$	+ 0,451	+ 0,086
$6l'-4\lambda-\varpi'-\omega$	+ 0,015	+ 0,003
$5l'-3\lambda-2\varpi'$	− 0,016	− 0,003
$3l'-\lambda-2\tau'$	+ 0,010	
$5l'-3\lambda-2\tau'$	− 0,099	− 0,019
$-2l'+5\lambda-3\omega$	+ 0,048	
$+l'+2\lambda-3\omega$	+ 0,022	
$2l'+\lambda-3\omega$	− 0,196	+ 0,034
$3l'-3\omega$	+ 0,126	− 0,016
$4l'-\lambda-3\omega$	+ 0,085	− 0,023
$5l'-2\lambda-3\omega$	− 8,244	− 0,039
$6l'-3\lambda-3\omega$	− 0,155	− 0,017
$7l'-4\lambda-3\omega$	+ 0,087	+ 0,026
$8l'-5\lambda-3\omega$	+ 0,021	+ 0,008
$3l'-\varpi'-2\omega$	− 0,016	+ 0,003
$4l'-\lambda-\varpi'-2\omega$	− 0,010	
$5l'-2\lambda-\varpi'-2\omega$	+ 1,390	+ 0,007
$6l'-3\lambda-\varpi'-2\omega$	+ 0,025	
$7l'-4\lambda-\varpi'-2\omega$	− 0,024	− 0,005
$5l'-2\lambda-2\varpi'-\omega$	− 0,078	
$5l'-2\lambda-\omega-2\tau'$	− 0,376	
$5l'-2\lambda-\varpi'-2\tau'$	+ 0,021	
$5l'-2\lambda+\varpi'-4\omega$	− 0,031	
$-2l'+6\lambda-4\omega$	+ 0,014	
$+2l'+2\lambda-4\omega$	− 0,052	
$3l'+\lambda-4\omega$	+ 0,031	
$4l'-4\omega$	+ 0,023	
$5l'-\lambda-4\omega$	− 1,656	+ 0,331
$7l'-3\lambda-4\omega$	+ 0,125	
$8l'-4\lambda-4\omega$	+ 0,068	+ 0,009
$9l'-5\lambda-4\omega$	− 0,019	
$10l'-6\lambda-4\omega$	+ 0,016	

ACTION DE VÉNUS (Suite).

B	L	R
$5l' - \lambda - \varpi' - 3\omega$	+ 0″,276	− 0″,054
$6l' - 2\lambda - \varpi' - 3\omega$	− 0,005	
$7l' - 3\lambda - \varpi' - 3\omega$	− 0,028	
$8l' - 4\lambda - \varpi' - 3\omega$	− 0,012	
$5l' - \lambda - 2\varpi' - 2\omega$	− 0,016	+ 0,003
$5l' - \lambda - 2\omega - 2\tau'$	− 0,077	+ 0,015
$2l' + 3\lambda - 5\omega$	− 0,014	
$5l' - 5\omega$	− 0,422	+ 0,065
$7l' - 2\lambda - 5\omega$	+ 0,026	
$8l' - 3\lambda - 5\omega$	− 0,073	
$9l' - 4\lambda - 5\omega$	− 0,018	
$10l' - 5\lambda - 5\omega$	+ 0,062	+ 0,012

B	L	R
$5l' - \varpi' - 4\omega$	+ 0″,069	− 0″,010
$8l' - 3\lambda - \varpi' - 4\omega$	+ 0,023	
$5l' - 3\omega - 2\tau'$	− 0,020	+ 0,003
$5l' + \lambda - 6\omega$	− 0,111	+ 0,015
$8l' - 2\lambda - 6\omega$	− 0,014	
$10l' - 4\lambda - 6\omega$	+ 0,111	
$5l' + \lambda - \varpi' - 5\omega$	+ 0,019	− 0,003
$8l' - 2\lambda - \varpi' - 5\omega$	− 0,012	
$10l' - 4\lambda - \varpi' - 5\omega$	− 0,033	
$10l' - 4\lambda - 4\omega - 2\tau'$	+ 0,010	
$5l' + 2\lambda - 7\omega$	− 0,030	
$10l' - 3\lambda - 7\omega$	+ 0,022	

ACTION DE LA TERRE.

B	L	R
0		− 0″,003
$l' - \lambda$	+ 0″,209	+ 0,026
$2l' - 2\lambda$	− 0,244	− 0,047
$3l' - 3\lambda$	+ 0,026	
$4l' - 4\lambda$	− 0,037	
$3l' - 3\lambda - \varpi' + \omega$	− 0,011	
$4l' - 4\lambda - \varpi' + \omega$	+ 0,016	
$-4l' + 5\lambda - \omega$	+ 0,011	
$-2l' + 3\lambda - \omega$	+ 0,073	− 0,014
$-l' + 2\lambda - \omega$	− 0,056	+ 0,010
$\lambda - \omega$	+ 0,018	
$+l' - \omega$	+ 0,095	− 0,009
$2l' - \lambda - \omega$	− 0,434	− 0,042
$3l' - 2\lambda - \omega$	+ 0,157	+ 0,033
$4l' - 3\lambda - \omega$	− 0,117	− 0,012
$l' - \varpi'$	− 0,010	
$3l' - 2\lambda - \varpi'$	− 0,039	− 0,008
$4l' - 3\lambda - \varpi'$	+ 0,059	+ 0,008
$4l' - 3\lambda - 2\varpi' + \omega$	− 0,009	
$4l' - 3\lambda + \omega - 2\tau'$	− 0,011	
$-2l' + 4\lambda - 2\omega$	+ 0,020	
$-l' + 3\lambda - 2\omega$	− 0,015	
$+l' + \lambda - 2\omega$	+ 0,030	
$2l' - 2\omega$	− 0,076	+ 0,020
$3l' - \lambda - 2\omega$	+ 0,169	
$4l' - 2\lambda - 2\omega$	− 0,515	− 0,101
$5l' - 3\lambda - 2\omega$	− 0,011	

B	L	R
$3l' - \lambda - \varpi' - \omega$	− 0″,053	
$4l' - 2\lambda - \varpi' - \omega$	+ 0,235	+ 0″,014
$4l' - 2\lambda - 2\varpi'$	− 0,033	− 0,006
$4l' - 2\lambda - 2\tau'$	− 0,038	− 0,007
$2l' + \lambda - 3\omega$	− 0,020	
$3l' - 3\omega$	+ 0,032	
$4l' - \lambda - 3\omega$	− 0,994	
$5l' - 2\lambda - 3\omega$	− 0,011	
$3l' - \varpi' - 2\omega$	− 0,011	
$4l' - \lambda - \varpi' - 2\omega$	+ 0,547	
$4l' - \lambda - 2\varpi' - \omega$	− 0,102	
$4l' - \lambda - \omega - 2\tau'$	− 0,126	
$4l' - \lambda - \varpi' - 2\tau'$	+ 0,026	
$4l' - 4\omega$	− 0,204	+ 0,041
$4l' - \varpi' - 3\omega$	+ 0,113	− 0,022
$4l' - 2\varpi' - 2\omega$	− 0,021	+ 0,004
$4l' - 2\omega - 2\tau'$	− 0,026	+ 0,005
$4l' + \lambda - 5\omega$	− 0,052	+ 0,008
$4l' + \lambda - \varpi' - 4\omega$	+ 0,029	− 0,004
$4l' + 2\lambda - 6\omega$	− 0,014	
$4l' + 2\lambda - \varpi' - 5\omega$	+ 0,008	

ACTION DE JUPITER.

B	L	R
0		− 0″,004
$l' - \lambda$	+ 0″,643	+ 0,117
$2l' - 2\lambda$	− 0,940	− 0,154
$l' - \lambda - \varpi' + \omega$	− 0,212	− 0,041
$2l' - 2\lambda - \varpi' + \omega$	+ 0,011	
$3l' - 3\lambda - \varpi' + \omega$	− 0,033	− 0,006
$l' - \lambda + \varpi' - \omega$	+ 0,148	+ 0,028
$-2l' + 3\lambda - \omega$	+ 0,254	− 0,036
$-l' + 2\lambda - \omega$	− 0,161	+ 0,025
$+\lambda - \omega$	+ 0,032	
$+l' - \omega$	+ 0,319	− 0,023
$2l' - \lambda - \omega$	− 3,300	− 0,602
$3l' - 2\lambda - \omega$	+ 0,029	+ 0,007
$-l' + 2\lambda - \varpi'$	− 0,037	+ 0,006
$+l' - \varpi'$	− 0,601	
$2l' - \lambda - \varpi'$	+ 0,045	+ 0,009
$3l' - 2\lambda - \varpi'$	− 0,123	− 0,019
$-l' + 2\lambda + \varpi' - 2\omega$	+ 0,054	− 0,008
$+l' + \varpi' - 2\omega$	+ 0,023	
$-2l' + 4\lambda - 2\omega$	+ 0,073	− 0,009
$-l' + 3\lambda - 2\omega$	− 0,042	
$+l' + \lambda - 2\omega$	+ 0,085	− 0,017
$2l' - 2\omega$	− 0,518	+ 0,129
$3l' - \lambda - 2\omega$	+ 0,076	+ 0,012

B	L	R
$-l' + 3\lambda - \varpi' - \omega$	− 0″,010	
$+l' + \lambda - \varpi' - \omega$	− 0,212	+ 0″,041
$2l' - \varpi' - \omega$	+ 0,023	
$3l' - \lambda - \varpi' - \omega$	− 0,385	− 0,064
$2l' - 2\varpi'$	− 0,021	
$2l' - 2\varpi'$	− 0,037	
$-l' + 3\lambda + \varpi' - 3\omega$	+ 0,014	
$-2l' + 5\lambda - 3\omega$	+ 0,017	
$-l' + 4\lambda - 3\omega$	− 0,011	
$+l' + 2\lambda - 3\omega$	+ 0,021	− 0,004
$2l' + \lambda - 3\omega$	− 0,126	+ 0,030
$3l' - 3\omega$	+ 0,011	− 0,003
$l' + 2\lambda - \varpi' - 2\omega$	− 0,054	+ 0,008
$3l' - \varpi' - 2\omega$	− 0,062	+ 0,016
$4l' - \lambda - \varpi' - 2\omega$	+ 0,012	
$4l' - \lambda - 2\varpi' - \omega$	− 0,030	
$2l' + 2\lambda - 4\omega$	− 0,034	
$l' + 3\lambda - \varpi' - 3\omega$	− 0,014	
$3l' + \lambda - \varpi' - 3\omega$	− 0,014	
$2l' + 3\lambda - 5\omega$	− 0,010	

ACTION DE SATURNE.

B	L	R
$l' - \lambda$	+ 0″,040	
$2l' - 2\lambda$	− 0,102	− 0″,019
$l' - \lambda - \varpi' + \omega$	− 0,028	
$l' - \lambda + \varpi' - \omega$	+ 0,020	
$-2l' + 3\lambda - \omega$	+ 0,028	
$-l' + 2\lambda - \omega$	− 0,009	
$+l' - \omega$	+ 0,021	
$2l' - \lambda - \omega$	− 0,381	− 0,068

B	L	R
$l' - \varpi'$	− 0″,080	
$3l' - 2\lambda - \varpi'$	− 0,012	
$2l' - 2\omega$	− 0,059	+ 0,015
$l' + \lambda - \varpi' - \omega$	− 0,028	
$3l' - \lambda - \varpi' - \omega$	− 0,049	− 0,009
$2l' + \lambda - 3\omega$	− 0,015	

MÉMOIRE

SUR

LA CONSTRUCTION DES TÉLESCOPES EN VERRE ARGENTÉ,

Par Léon FOUCAULT.

On a souvent remis en discussion les qualités qui distinguent le télescope à réflexion et la lunette achromatique. En réalité, ces instruments ont, l'un et l'autre, rendu d'éclatants services à l'astronomie, et la science les a adoptés tous les deux. Aux télescopes de grande dimension tels que ceux que W. Herschel construisait de sa main, on demande une perception distincte et détaillée des objets célestes; quant aux lunettes achromatiques, qui jamais n'atteignent les mêmes proportions, le degré de stabilité dont elles ont fait preuve les a plus spécialement rendues propres aux observations précises, aux déterminations de position. Les rôles étant ainsi partagés, le télescope à réflexion ne conserve son importance qu'à la condition de garder hautement la supériorité sous le rapport des effets optiques. En Angleterre, où la lutte a été vivement soutenue en faveur des instruments à réflexion, les grands miroirs métalliques sont restés en petit nombre, et les dépenses qu'ils ont occasionnées n'étaient pas de nature à encourager de nombreuses tentatives du même genre. Ajoutons que ces miroirs sont d'un poids tellement considérable, qu'on a toujours hésité à les transporter sur les hautes montagnes, seuls points du globe où il y ait chance d'utiliser toute la puissance des grands instruments. Dans cet état de choses, il nous a semblé que la substitution du verre au métal, dans la construction du miroir, apporterait au télescope une amélioration, pourvu qu'on parvînt à métalliser la surface après coup; or, à cet égard, l'argenture par voie humide, telle qu'on l'obtient par le

procédé Drayton, ne laisse rien à désirer. La solution, par son contact avec le verre, laisse déposer à froid une mince couche d'argent qui, une fois séchée, revêt un très-beau poli par le frottement d'une peau imprégnée d'oxyde de fer. Le 16 février 1857, l'Académie des Sciences a vu passer sous ses yeux un miroir de 10 centimètres obtenu de la sorte, et qui, monté en télescope newtonien, donnait de bonnes images et supportait un grossissement de 150 à 200 fois. Ce miroir existe encore avec son argenture primitive. Il a été conservé comme le premier spécimen qui ait été présenté à une société savante (1).

Après la présentation de ce premier télescope de 20 centimètres de diamètre et de 50 centimètres de longueur focale, nous en avons obtenu sans difficulté un second qui porte 22 centimètres de diamètre pour un foyer de $1^m,50$. Puis abordant un diamètre de 42 centimètres, l'ouvrier, chargé de tailler le miroir, a échoué à cinq reprises différentes. Ce qui a bien forcé de reconnaître l'insuffisance des procédés ordinairement employés pour engendrer des surfaces moins grandes.

En présence d'un insuccès qui compromettait les espérances qu'on avait conçues au sujet des nouveaux miroirs, nous avons senti l'impérieuse nécessité d'étudier la figure des surfaces qui, bien que travaillées avec le plus grand soin, ne produisaient pas l'effet optique voulu; de là sont sortis trois procédés d'examen qui s'appliquent directement aux surfaces réfléchissantes concaves et à l'aide desquels on reconnaît, avec le degré de précision requise, si ces surfaces sont plus ou moins correctement sphériques. Nous avons donc constaté que rarement les opticiens construisent des surfaces qui appartiennent à la sphère, et que ces surfaces en diffèrent d'autant plus qu'elles sont plus étendues. Nous avons pour ainsi dire mis le doigt sur une éminence centrale qui se reproduisait constamment dans le

---

(1) Dans la séance du 7 décembre 1857, l'Académie des Sciences a reçu une réclamation de M. Steinheil fondée sur un article de la *Gazette d'Augsbourg*, concernant l'ouverture de ses ateliers à Munich; nous allons transcrire le passage où l'on mentionne les premiers essais de M. Steinheil :

« Eine für Astronomie interessante Novität bilden auch die neuen Teleskop-Spiegel von Glas. Durch Anwendung der Methode von Liebig Spiegelgläser zu versilbern, gelingt es so schöne Metallflächen aus Glas herzustellen dass auch die Rückseite der Versilberung einen vollkommenen Spiegel bildet, oder leicht durch Anwendung geeigneter Polirmittel dazu gemachtwerden kann. Wenn alsoein gewöhnliches Glas nur auf einer Seite mit genauer Gestalt sphärisch hohl geschliffen wird, so entsteht durch Versilberung derselben ein Teleskop-Spiegel, der, wenn er mit der Zeit auch anlaufen sollte, leicht durch einige Züge wieder herzustellen ist, da die genaue Gestalt durch das Glaserhalten wird. Wir haben durch ein Teleskop dieser Art gesehen, das 4 Zoll Oeffnung hat and bei hundert-maliger Vergrösserung ein wundervoll reines helles Bild Zeigte. So kann begreiflicherweise die Herstellung mächtiger Teleskope sehr leicht und wohlfeil werden. »

(*Allgemeine Zeitung*, n° 84. Lundi 24 mars 1856.)

travail du miroir de 42 centimètres, et cette constatation fut si claire et si manifeste, qu'elle a suggéré la pensée de retoucher localement la surface sans en altérer le poli. Cette tentative, peu encouragée par les hommes de l'art, a cependant parfaitement réussi, et de ce moment l'entreprise, débarrassée de toute entrave, a pris un nouvel essor.

En effet, dès qu'on eut acquis la preuve que la taille d'une bonne surface ne dépendait pas nécessairement d'un travail à exécuter d'emblée, dès qu'il fut démontré qu'on pouvait y revenir indéfiniment, le progrès n'était plus d'arriver précisément à la sphère, mais il consistait désormais à modifier par degrés les surfaces optiques pour les faire tendre vers la courbure parabolique, qui seule est capable de ramener en un foyer commun tous les rayons d'un faisceau parallèle. Les procédés d'examen optique qui d'abord avaient servi à reconnaître la sphéricité des surfaces, modifiés suivant la théorie des foyers conjugués et combinés avec la méthode des retouches locales, ont bientôt permis de conduire telle surface de révolution fournie par l'artiste depuis la sphère jusqu'au paraboloïde, en la faisant passer par tous les ellipsoïdes intermédiaires. Par ce moyen, les instruments, délivrés des aberrations qui compromettaient la netteté des images, ont pu être réduits à de moindres longueurs focales et grandir proportionnellement dans leurs trois dimensions.

Les proportions auxquelles on s'est définitivement arrêté assignent au télescope une longueur qui ne dépasse pas six fois le diamètre du miroir. Nous n'avons adopté ce rapport constant entre le diamètre et la distance focale, qu'après nous être assuré que la convergence exacte des rayons lumineux est la seule condition à remplir pour qu'un instrument donne tout son effet. La surface parabolique remplit cette condition expresse : c'est pourquoi elle communique au télescope une pénétration, ou, comme on dit, un *pouvoir optique*, qui, mesuré avec soin, s'est montré indépendant de la longueur focale et varie proportionnellement au diamètre du miroir. En ramenant à des règles précises la détermination de ces pouvoirs optiques dont l'appréciation était arbitraire, nous avons voulu fournir à ceux qui manient les instruments un moyen d'en apprécier directement la valeur; et de plus nous avons mis en évidence, dans tout instrument d'un diamètre donné, l'existence d'un pouvoir limite ou absolu, qui dépend de la constitution physique de la lumière et vient mettre forcément un terme à nos efforts.

Le télescope, débarrassé successivement du poids énorme de l'ancien miroir métallique et de l'excès de longueur imposé par l'emploi des surfaces sphériques, devenait de plus en plus facile à manier. Nous avons pensé y ajouter un complément utile en le montant parallactiquement sur un support construit en charpente légère.

En publiant ce Mémoire, nous nous proposons non-seulement de constater les résultats acquis, mais nous avons aussi l'intention de faire connaître les procédés pratiques qui ont servi à les obtenir. Sans vouloir abuser des détails, nous nous mettrons à la place de ceux qui auraient le désir de faire l'application de ces mêmes procédés et nous nous expliquerons de manière à les mettre à même de réussir. Telle est la mesure des développements dans lesquels nous croyons devoir entrer.

Nous aurons donc à décrire en premier lieu les divers procédés d'optique géométrique par lesquels on explore les surfaces sphériques concaves; puis nous ferons l'application générale des mêmes procédés à l'étude des surfaces ayant pour section méridienne une section conique, et nous démontrerons que ces procédés d'examen, appelés à se contrôler les uns les autres, sont plus que suffisants pour diriger le travail manuel par lequel on se propose de réaliser une surface proposée.

Passant alors à l'application des procédés, nous emprunterons aux arts les moyens de préparer les miroirs, d'agir sur les surfaces de verre, et de réaliser par des retouches locales une surface correcte. Nous énoncerons les caractères d'une surface parfaite et nous définirons les pouvoirs optiques.

Nous donnerons ensuite les détails pratiques pour métalliser, quelque grandes qu'elles soient, les surfaces du verre par le procédé Drayton, et nous indiquerons les précautions à prendre pour prévenir les déformations des miroirs et les adapter au tube du télescope; nous discuterons la composition des oculaires, et nous terminerons par la description d'un pied parallactique en charpente spécialement applicable aux télescopes à court foyer.

Examen optique des surfaces concaves; trois procédés différents. — Aberration positive et négative.

Quand un miroir ne donne pas de bonnes images, on se contente ordinairement de le rejeter sans chercher à reconnaître en quoi il pèche; on refait la surface à nouveau, et l'on répète le travail jusqu'à ce qu'on juge avoir réussi. Mais sur ce point bien souvent les avis diffèrent. Pourtant il existe des caractères auxquels on reconnaît si une surface réalise sensiblement la figure qui convient aux circonstances où elle doit fonctionner.

Supposons qu'on ait à vérifier un miroir sphérique concave. La propriété d'un pareil miroir est de renvoyer au centre de courbure et sans aberration aucune tous les rayons émanés de ce même centre. Autour de ce point et à très-petite distance sont distribués dans l'espace une infinité de foyers conjugués, qui jouissent sensiblement de la même immunité. Imaginons donc un point lumineux placé à

côté et tout près du centre de courbure : de l'autre côté se forme une image que l'on vient observer avec un microscope faible; si la surface est parfaite, la mise au point est bien définie, l'image est nette, entourée des anneaux de la diffraction, et les altérations qu'elle subit en deçà et au delà du foyer par la variation de la mise au point sont symétriques. Tels sont les caractères d'un foyer parfait formé par un cône de rayons qui se croisent tous au même lieu dans l'espace.

Si l'image manque de netteté, la mise au point, sans être aussi bien définie, produit cependant un maximum de condensation de lumière que l'on peut considérer comme le vrai foyer. Si alors l'image est ronde, on en conclut que la surface du miroir, sans être exactement sphérique, est du moins de révolution autour de son centre, et dès lors il est certain qu'en faisant varier la mise au point, on produira de part et d'autre du foyer des altérations dissemblables et complémentaires l'une de l'autre; des condensations et des raréfactions de lumière, distribuées en anneaux concentriques, apparaîtront disposées d'une manière réciproque, indiquant, dans les zones correspondantes de la surface réfléchissante, des variations du rayon de courbure dont une discussion indique aisément le sens.

En effet, quand on porte au-devant des rayons le microscope oculaire, et qu'on dépasse le foyer, on observe l'état du faisceau avant son point de convergence. Or, si ce point n'est pas unique pour toutes les zones concentriques, celles qui ont le foyer le plus court produisent, au niveau du plan d'observation, une condensation prématurée de lumière qui accuse un foyer plus proche; le contraire a lieu pour les zones qui ont le plus long foyer. Si maintenant on recule l'oculaire de manière à observer l'état des faisceaux après l'entre-croisement des rayons, on constate que les apparences deviennent inverses, tout en conduisant aux mêmes conclusions.

Généralement, dans les surfaces bien faites, les altérations de forme ne proviennent que d'un changement continu du rayon de courbure, qui varie d'une petite quantité et dans un même sens à partir du centre jusqu'au bord. Aussi les deux images qu'on observe symétriquement de part et d'autre du foyer, se présentent-elles habituellement comme des cercles, dont l'un offre une condensation de lumière vers le centre, et l'autre vers la circonférence.

Lorsque la surface à étudier n'est pas de révolution, on en est averti par la déformation des images qui cessent d'être rondes, et se partagent en concamérations d'intensités inégales.

Quand on en vient à l'expérience, on réalise le point lumineux qui sert d'origine aux rayons émis, en collant une lentille plan-convexe à court foyer sur l'une des deux surfaces égales d'un petit prisme rectangle à réflexion totale (*Pl. I, fig.* 1). Une flamme de lampe placée sur le côté, à quelques décimètres de la ligne d'expérience, éclaire par ses rayons horizontaux cette lentille qui se présente norma-

lement; les rayons convergents sont réfléchis totalement par la surface hypoténuse, et vont former, en dehors du prisme, une image de flamme que l'on fait tomber sur un écran opaque, percé en mince paroi d'une très-petite ouverture assimilable à un point.

Cette manière d'examiner les surfaces concaves suffirait à la rigueur pour en faire connaître les moindres imperfections; mais elle se recommande surtout dans les circonstances où il importe de s'assurer que la figure est de révolution. Cependant lorsqu'on se propose d'opérer des retouches, il est utile de recueillir des indications plus précises sur les variations du rayon de courbure : c'est le cas de recourir à un second procédé fondé sur un tout autre principe.

Wire or grid as test object

Dans une région voisine du centre de courbure, on dispose deux droites rapprochées, telles que les deux bords d'un fil métallique de 1 millimètre de diamètre; on éclaire cet objet par un miroir oblique, de telle sorte que, vu de tous les points de la surface du miroir objectif, il se projette sur un fond éclairé; l'image qui vient s'en former tout auprès, s'observe à l'œil nu, ou mieux au moyen d'une petite lunette réduite, par un diaphragme, à 1 millimètre et demi d'ouverture. Dans ces circonstances, l'objet apparaît dans l'étendue d'un disque éclairé dont l'étendue correspond à l'ouverture du miroir, et si les bords ne semblent pas rectilignes, les inflexions qu'ils présentent sont propres à caractériser les variations du rayon de courbure. Pour s'en rendre compte, il suffit de faire le tracé de la marche des rayons à partir de la surface du miroir jusqu'au plan focal de la lunette (*fig.* 2). On voit alors comment le petit diaphragme, en éliminant la majorité des rayons qui ont formé l'image directe *i*, a pour effet de composer l'image transmise *i'* avec des rayons réfléchis par différentes parties du miroir. Or, si le rayon de courbure varie d'une zone à l'autre, l'image *i* manquera de netteté, et l'image *i'* sera formée en chacun de ses points par des faisceaux partiels à foyers différents; elle se courbera dans l'espace, et les angles sous-tendus dans l'œil de l'observateur par les différentes parties de l'image ne seront pas proportionnels aux parties correspondantes de l'objet. En un mot, cette image paraîtra déformée, on y verra des contractions et des dilatations accusant une diminution ou une augmentation du rayon de courbure des éléments correspondants du miroir.

Si l'on veut inspecter d'un coup d'œil le miroir dans toute son étendue, il faut prendre pour objet un réseau régulier à mailles carrées, dont l'image devient très-sensible aux déformations, en quelque point qu'elles se manifestent. Supposons, ce qui arrive le plus souvent, que le miroir, exactement sphérique dans sa partie centrale, s'évase vers les bords par un allongement progressif du rayon de courbure. Soumis à l'épreuve du deuxième procédé, un pareil miroir donne une image dans laquelle toutes les lignes sont courbées comme dans la figure (4), en

tournant leur concvité en dehors. Il en résulte que les mailles vont en croissant d'étendue du centre vers les bords, et varient dans le même sens que le rayon de courbure des éléments correspondants de la surface.

Une déformation inverse du miroir, qui consiste dans un relèvement trop rapide des bords, produit un renversement dans la courbure des lignes (*fig.* 5), d'où résulte que l'étendue des mailles diminue vers les bords du champ, et varie encore dans le même sens que le rayon de courbure. Enfin, il arrive fort souvent que les bords d'un miroir sont abaissés au-dessous du niveau sphérique, et qu'en même temps la surface présente une éminence centrale, limitée tout autour par une sorte de rigole circulaire. En pareil cas, le rayon de courbure varie successivement dans les deux sens du centre jusqu'au bord ; cette particularité se révèle encore très-clairement par les sinuosités des lignes observées (*fig.* 6), dont la disposition fait naître une variation analogue dans l'étendue des mailles qui résultent de leur entre-croisement. On a eu soin de mettre en regard dans la même planche les figures qui représentent les images observées et le profil énormément exagéré des surfaces déformées. Ce deuxième procédé fournit donc, sur la configuration des surfaces qu'on examine, des indications très-sûres et très-faciles à interpréter, mais il manque un peu de sensibilité, et, dans le cas où il laisse percevoir les lignes du réseau sensiblement droites (*fig.* 3), on n'est pas encore certain d'avoir obtenu une surface irréprochable et susceptible de résister à l'épreuve rigoureuse d'un troisième et dernier procédé.

Knife Edge Test

On dispose, comme dans le cas du premier essai, un point lumineux au voisinage du centre de courbure de manière à ne pas masquer les rayons en retour ; après s'être croisés, ces rayons forment un cône divergent dans lequel l'œil se place, pour ensuite se porter au-devant du foyer jusqu'à ce que la surface du miroir paraisse entièrement illuminée ; puis, à l'aide d'un écran à bord rectiligne, on intercepte l'image jusqu'au point de la faire disparaître entièrement. Cette manœuvre produit pour l'œil qui observe une extinction progressive de l'éclat du miroir qui, dans le cas d'une sphéricité exacte, conserve jusqu'au dernier moment et dans toute l'étendue de sa surface une intensité uniforme. Dans le cas contraire, l'extinction n'a pas lieu simultanément sur tous les points, et du contraste des ombres et des lumières résulte pour l'observateur, avec un sentiment de relief exagéré, la perception en clair-obscur des proéminences et des dépressions qui portent atteinte à la figure sphérique. C'est là un effet résultant nécessairement de la marche des rayons qui convergent plus ou moins exactement vers un foyer commun.

Dans l'hypothèse d'une surface parfaite, l'image du point lumineux est un disque nettement terminé qui comprend tous les rayons réfléchis et qui, une fois

masqué par l'écran (*fig.* 7), ne laisse plus aucune lumière parvenir dans l'œil; mais pour peu que ce disque déborde sur l'écran, comme en chacun de ses points passent des rayons réfléchis par la surface entière, cette surface s'illumine plus ou moins et revêt pour l'observateur un éclat uniforme.

Supposons à présent la surface défectueuse : l'image du point, au lieu d'être nettement terminée, va s'entourer d'une auréole lumineuse formée par les rayons en aberration, et quand l'image proprement dite sera masquée par la présence de l'écran, ces rayons, passant outre, iront dans l'œil de l'observateur y dénoncer les éléments de la surface qui ne se présentent pas sous l'incidence voulue.

Dans la *fig.* 8, qui représente l'effet d'une surface à bords trop relevés, on voit clairement que l'écran interceptant le faisceau central qui forme image, laisse cependant passer les rayons venant du bord supérieur. Conséquemment, au moment de l'extinction progressive du faisceau central, ce bord supérieur paraîtra brillant et le bord opposé déjà noir, tandis que la région centrale et régulière présentera une teinte évanouissante uniforme.

Généralement, si la surface soumise à ce genre d'examen est altérée par des éminences et des dépressions distribuées d'une manière quelconque (*fig.* 9), tous les versants inclinés du côté de l'écran paraîtront noirs, et tous les versants inclinés du côté opposé paraîtront brillants. Donc en définitive l'aspect d'une telle surface sera le même que celui d'une surface mate qui présenterait, avec un degré d'exagération extrême, des saillies et des creux semblablement distribués, et qui serait éclairée par une lumière oblique provenant d'une source placée du côté *opposé* à l'écran qui intercepte l'image. Cette règle est importante à consulter si l'on tient à écarter toute incertitude dans l'interprétation des résultats observés, car souvent il arrive que, sous l'influence d'une disposition morale indépendante de la volonté, les creux et les reliefs semblent s'intervertir; mais, quelle que soit la sensation perçue, on est certain d'éviter l'erreur de signe, pourvu que l'on prenne garde à la position de l'écran et qu'on interprète en conséquence la disposition des ombres et des lumières.

Nous avons donc, en résumé, trois procédés à mettre en usage pour contrôler la configuration des surfaces réfléchissantes concaves. Le premier fondé sur l'observation microscopique de l'image d'un point lumineux : il s'applique particulièrement au cas où l'on veut reconnaître si la figure est de révolution. Le second, qui agit par élimination au moyen d'une lunette étroitement diaphragmée appliquée à l'observation de l'image d'un réseau à mailles carrées : il a surtout la propriété de faire connaître les variations du rayon de courbure aux différents points de la surface. Et le troisième, qui est le plus sensible de tous, et qui repose sur l'observation directe de la surface contemplée à l'œil nu par les rayons constitués en foyer et passant aux limites d'un écran opaque. Observer au microscope l'image d'un

point, étudier à la lunette diaphragmée les déformations du réseau, et regarder à l'œil nu la surface au moyen de rayons échappés à l'image interceptée, tels sont les artifices appelés, en se contrôlant mutuellement, à fournir tous les renseignements désirables sur la configuration des surfaces optiques.

Jusqu'à présent nous avons supposé que ces procédés s'appliquaient uniquement à l'examen des surfaces sphériques limitées dans leur application au cas où elles fonctionnent pour des foyers conjugués très-voisins du centre de courbure. Ces restrictions admises, la démonstration en est devenue plus facile et plus claire. Mais, considérés à un autre point de vue, ces procédés prennent un caractère de généralité qui vient en augmenter l'importance.

Faisant abstraction de la surface pour ne considérer que le faisceau réfléchi, les indications fournies par les procédés d'examen s'appliquent au faisceau lui-même, et les particularités qui ont été signalées comme des attributs d'une surface sphérique, deviennent à juste titre les propriétés réelles d'un faisceau lumineux exactement conique.

Or, comme dans les instruments d'optique la netteté des images dépend expressément de la convergence finale des rayons lumineux, ces instruments, quels qu'ils soient, tombent sous le contrôle des mêmes moyens d'épreuve.

Nous ne sommes donc plus assujettis à observer un miroir en son centre de courbure, et puisque le but proposé est de construire des télescopes pour observer des objets situés à l'infini, nous allons prendre le miroir concave tel qu'il sort des mains de l'artiste et le conduire, par une série de transformations, à la figure qu'il convient de lui donner pour le faire fonctionner utilement sur les corps célestes

Ce miroir de verre, même sans être argenté, réfléchit assez de lumière pour qu'on puisse le soumettre à l'épreuve des trois procédés; on l'observe près du centre de courbure, et s'il est sphérique, l'image du point lumineux est ronde, nette et tranchée, les lignes du réseau sont droites et, revenant à l'image du point qu'on contemple par l'écran, on produit l'extinction simultanée sur toute la surface.

Ce fait constaté, on rapproche l'objet de la surface du miroir : nécessairement l'image s'éloigne et l'écartement qui survient entre les deux foyers conjugués exigerait, pour qu'il y eût encore convergence parfaite des rayons réfléchis, que la surface appartînt à un ellipsoïde de révolution. Or, comme elle est restée sphérique, les rayons émanés d'un point ne doivent plus se croiser en un seul point. On constate, en effet, par l'application des trois procédés, qu'il y a aberration, et dans un sens tel, que les différents éléments du miroir donnent leur foyer à plus courte distance à mesure qu'ils s'éloignent de la partie centrale. L'image du point lumineux examinée au microcope commence à s'entourer d'une auréole d'aberration; quand on change la mise au point, on voit cette image dégénérer de part et d'autre

du plan focal en deux images complémentaires, dont l'une, plus rapprochée du miroir, présente au pourtour une accumulation de lumière, et dont l'autre affecte la disposition inverse; les lignes du réseau commencent à se courber en tournant leur convexité à l'extérieur comme dans la figure (5), et l'extinction de l'image par l'écran produit sur la surface du miroir une distribution inégale de lumière (*fig.* 13) qui semble accuser un centre bombé et des bords relevés, avec une rigole circulaire entre deux. A tous ces caractères on reconnaît que la surface du miroir n'est pas celle qui conviendrait à la position actuelle des foyers conjugués et qu'elle en diffère de telle sorte, que le rayon de courbure est relativement trop court et de plus en plus aux divers éléments à mesure qu'ils s'éloignent de la partie centrale. On voit déjà clairement indiquée la modification qu'il faudrait imprimer à cette surface pour la ramener à de meilleures conditions : évidemment il y aurait à la retoucher de manière à rétablir entre les rayons de courbure cette variation qui leur manque, et l'on verra plus loin qu'il y a une infinité de manières d'opérer cette retouche.

Poursuivons : c'est-à-dire rapprochons encore l'objet du miroir, et repoussons du même coup l'image à plus grande distance. L'aberration va croissant, ainsi que les phénomènes qui en décèlent la grandeur et le sens. En sorte qu'il devient manifeste que l'aberration pour une surface sphérique augmente avec la distance des foyers conjugués. Mais supposons que, partant du centre de courbure et avant de passer d'une station à une autre, on maîtrise les phénomènes d'aberration en exécutant les retouches conseillées par les indications des procédés d'examen, la figure du miroir, primitivement sphérique, sera graduellement modifiée par une série de retouches légères qui la feront successivement passer par la série des figures ellipsoïdales ayant le paraboloïde pour limite. Telle est la méthode qui a été suivie avec succès pour obtenir des miroirs à large ouverture donnant sans aberration sensible l'image des objets situés à l'infini.

Lorsqu'on a réussi à détruire toute aberration pour une situation particulière des foyers conjugués, et qu'on revient à l'une des positions précédemment occupées, on voit reparaître en sens inverse l'ensemble des phénomènes qui accusent une aberration dans le cône des rayons convergents. L'image du point lumineux entourée au foyer même d'une auréole lumineuse dégénère, quand on tire à soi le microscope oculaire, en un cercle cerné de lumière avec un centre plus ou moins obscur; les fils du réseau apparaissent courbés dans l'image en tournant leur concavité en dehors (*fig.* 4) et la surface, examinée quand on masque l'image, apparaît (*fig.* 14) avec un creux dans la partie centrale et des bords renversés en arrière. En un mot, tous les phénomènes deviennent inverses de ceux qu'on observe sur une surface sphérique éprouvée en dehors du centre de courbure.

Si l'on convient de considérer comme *positive* l'espèce d'aberration qui résulte le plus souvent de l'extension disproportionnée des surfaces sphériques, on désignera comme *négative* l'aberration de sens inverse qui provient d'une correction exagérée ou inopportune de l'aberration de sphéricité. Mais, pour ne considérer que l'ensemble du faisceau indépendamment de l'appareil chargé d'en opérer la convergence, on peut convenir d'exprimer par aberration positive la constitution d'un faisceau dont les parties centrales convergent les dernières, auquel cas la caustique (*fig.* 10) formée par la suite des rayons entre-croisés a son sommet tourné du côté vers lequel la lumière se dirige; tandis que par aberration négative on entendra désigner la constitution inverse d'un faisceau où les parties centrales convergent les premières : d'où résulte une caustique dont le sommet se tourne vers l'appareil convergent (*fig.* 11). A ces deux états du faisceau lumineux correspondent deux apparences contraires, et comme une même surface ellipsoïde peut donner de l'aberration positive ou négative, suivant qu'elle fonctionne pour des foyers situés en dedans ou en dehors des limites correspondantes à ses propres foyers, il en résulte qu'une même surface peut offrir au troisième procédé les deux aspects opposés. Pour s'en rendre compte, il importe de rechercher quel est le sens géométrique de la figure qui apparaît en pareille circonstance.

Et d'abord il faut bien remarquer que pourvu qu'une surface fonctionne de manière à renvoyer vers l'observateur un faisceau exempt d'aberration, cette surface, quelle qu'elle soit, examinée au troisième procédé, apparaît uniformément éclairée comme si elle était plane. Si donc surviennent des altérations de forme capables de troubler la convergence des rayons, l'aspect de la surface en sera modifié de telle sorte, qu'elle semble différer du plan comme la figure altérée diffère de la figure correcte. En d'autres termes, le relief du solide qui se montre en pareil cas, au lieu de révéler la véritable figure du miroir, fait connaître la figure du solide superposé à la surface correcte.

Supposons, par exemple, qu'une surface sphérique soit mise en observation dans des circonstances où elle devrait présenter la figure ellipsoïde. C'est dire qu'à la surface qui convient s (*fig.* 12) on substitue la surface s' qui ne convient pas. Pour avoir une idée de l'aspect qui devra s'ensuivre, rapportons le cercle et l'ellipse aux mêmes coordonnées, puis construisons la courbe donnée par la variation de la différence des ordonnées correspondantes aux mêmes abcisses. Cette courbe, qui est du 4e degré, est bien celle qui, supposée tournant autour de l'axe, engendrerait une surface conforme à celle qui se dessine en clair-obscur (*fig.* 13 ou 14) sur un miroir soumis au troisième procédé, lorsque ce miroir a pour section méridienne une section conique, et qu'il est éprouvé en dehors des conditions définies par la position de ses propres foyers. On comprend

d'ailleurs qu'il y ait dans cette figure interversion des creux et des reliefs, suivant que la surface réelle du miroir est intérieure ou extérieure à la surface théoriquement correspondante aux positions occupées dans l'espace par l'objet et l'image. Ainsi s'expliquent, dans leur variation progressive et continue, les divers aspects que présente un miroir ellipsoïde considéré à toutes les distances où peut se former l'image résultant du concours des rayons réfléchis.

Des trois procédés qui viennent d'être successivement décrits, un seul à la rigueur suffirait pour guider la main qui doit opérer les retouches et faire passer la surface du miroir par tous les ellipsoïdes qui conduisent à la figure limite du paraboloïde. Mais en les employant concurremment, on est plus assuré de se mettre en garde contre les fausses manœuvres. D'ailleurs ces divers procédés se complètent plutôt qu'ils ne se suppléent les uns les autres. L'expérience a montré bien des fois que, dès qu'ils s'accordent à désigner une surface sans défaut, l'effet optique atteint un degré de perfection qui ne laisse plus rien à désirer; on peut même sciemment laisser persister de légères ondulations qui s'accusent au troisième procédé, sans que l'effet optique en paraisse sensiblement altéré, ce qui semble indiquer que ce genre d'examen réalise, à l'égard des surfaces optiques, une sorte de réactif sensible à l'excès. La difficulté n'est donc plus de constater les imperfections du travail des surfaces, et, pour les rendre irréprochables, ce qui reste à faire, c'est d'attaquer la substance du verre par un agent approprié aux minimes quantités qu'il s'agit de soustraire.

Détails pratiques sur la taille des miroirs en verre, et sur l'exécution des retouches locales.

Quand le miroir de verre n'atteint pas de grandes dimensions, quand son diamètre ne dépasse pas une vingtaine de centimètres, le travail de la surface ne présente pour ainsi dire aucune difficulté, et l'on peut s'en tenir aux procédés en usage dans les bons ateliers d'optique. On commence par préparer une paire de bassins en cuivre un peu plus grands que le verre, on leur donne au tour la courbure voulue, et on les réunit, *balle et bassin*, en les frottant l'un sur l'autre avec de l'émeri de plus en plus fin. Le verre étant mis d'épaisseur, dégrossi et débordé, on le rode à l'émeri et à l'eau sur la partie convexe ou balle, jusqu'à ce que la surface ait pris un douci très-fin et bien uniforme. Ensuite on colle sur ladite balle une feuille de papier que l'on imprègne de rouge d'Angleterre, et, par le frottement prolongé sur ce polissoir, on éclaircit la surface du verre qui finit, avec le temps, par prendre un poli parfait. En opérant ainsi, une main habile obtient ordinairement une surface de révolution qui ne coïncide pas exactement avec la sphère, mais qui en diffère dans le sens favorable à la correction de

l'aberration de sphéricité. Aussi un pareil miroir comporte-t-il souvent une ouverture plus grande que celle qui correspond à la figure rigoureusement sphérique. Mais quand on aborde de plus grands diamètres, on ne peut plus compter sur l'exactitude de cette correction empirique, et il devient nécessaire de recourir à des retouches locales. De plus le prix des bassins augmente dans une proportion très-rapide; leur poids devient considérable, et l'adhérence qui va croissant entre le verre et le métal, rend le travail plus pénible et diminue les chances de succès. Pour ces divers motifs, nous avons renoncé à l'emploi des bassins en métal, et nous en sommes revenu à travailler les miroirs verre sur verre. Dès lors les frais d'établissement ne consistent plus que dans l'acquisition de deux disques en verre de forme et de grandeur appropriées à celles que l'on veut conserver à la pièce.

S'agit-il, par exemple, de construire un miroir de 40 à 50 centimètres, on commence par se procurer, en les coulant dans un moule en fonte, deux disques de verre épais bien recuits, et terminés chacun par un revers convexe. Par un premier travail de dégrossissage opéré mécaniquement, on amène approximativement les deux surfaces principales à la courbure voulue, on déborde circulairement les deux disques en laissant un excès de diamètre à celui qui doit jouer le rôle de balle, on polit le revers de l'autre disque, et sur le pourtour de chacun d'eux on creuse une gorge destinée à recevoir des cordages pour faciliter les manœuvres.

Les deux pièces ainsi préparées, balle et miroir, sont dirigées vers l'atelier des opticiens et confiées à une main habile, afin d'y être travaillées l'une par l'autre avec tous les soins nécessaires pour engendrer une surface de révolution.

L'opération s'exécute sur un *poste* solidement établi, sorte de pilier isolé de toute part et qui porte en son centre un pas de vis sur lequel se montent les molettes qu'on fixe à la poix au revers de l'un et de l'autre disque; verticalement au-dessus de ce centre à vis, on fixe au plafond un fort piton où s'accroche un ressort en hélice capable de supporter le poids du miroir. Enfin, pour donner prise à la main qui doit imprimer le mouvement, un appendice circulaire à rebord saillant et volumineux se monte à vis sur la molette et offre au besoin en son centre un point d'attache au cordage plus ou moins tendu qui, d'autre part, s'unit au ressort de suspension.

La balle en verre étant fixée sur le poste, on étend à la surface un émeri un peu grossier délayé avec de l'eau; on dépose avec précaution le miroir par-dessus et l'on use les deux pièces l'une sur l'autre, en ayant soin de varier les mouvements de manière à distribuer également l'action dans tous les sens. En même temps qu'il tourne autour du poste, l'ouvrier fait circuler sous la main le rebord de la molette, de manière à occuper avec la balle et le miroir des positions relatives constamment changeantes. Peu à peu l'émeri s'écrase, et pour éviter qu'il ne se

dessèche, on l'humecte à tout instant d'eau projetée en gouttelettes sur les parties qui se découvrent tour à tour. Mais à mesure que le travail se prolonge, l'émeri perd son mordant, et parce qu'il devient de plus en plus fin, et parce qu'il s'encombre de parcelles détachées de l'une et de l'autre surface ; au bout d'un certain temps l'ouvrier reconnaît qu'il convient de relever la pièce, d'éponger les deux parties et de renouveler l'émeri.

Il y a un certain art à bien conduire, comme on dit, un émeri de manière à le distribuer uniformément entre les surfaces et à le garder convenablement mouillé pendant un temps suffisant pour qu'il produise tout son effet; entre des mains inhabiles, l'émeri ne s'étend pas bien, ne se lie pas convenablement et s'échappe sans avoir exercé toute son action. On passe alors son temps en fausses manœuvres, on consomme inutilement des poudres, et le travail n'avance pas.

Les premiers émeris sont destinés à produire la coaptation des surfaces ; on reconnaît que ce résultat est obtenu à ce que les parties se meuvent indifféremment l'une sur l'autre dans toutes les directions. On emploie alors les émeris de plus en plus fins, qu'on désigne dans le commerce par le temps ou le nombre de minutes qui en opère la séparation quand on les traite par lévigation dans l'eau. En se succédant entre les surfaces frottantes, ces émeris, à une, à deux....., à quarante, à soixante minutes, communiquent au douci un grain uniforme et velouté dont la finesse se révèle par un ton opalin et demi-transparent.

Si l'on tient à obtenir une surface d'un rayon déterminé, il est prudent, pendant cette longue succession des différents émeris, de consulter de temps en temps le sphéromètre, car dans le cas où il serait indiqué d'augmenter le rayon de courbure, il n'y aurait qu'à fixer le miroir sur le poste et à continuer le travail avec la balle en dessus; dans le cas contraire, il faudrait laisser les choses dans les conditions premières et faire dépasser le miroir en lui imprimant des mouvements étendus. Ces deux manières d'agir sur le rayon de courbure ont une grande efficacité, surtout quand on travaille verre sur verre. On s'en rend compte aisément en considérant qu'aussitôt que les pièces dépassent l'une sur l'autre, la partie qui surplombe presse par son milieu sur le bord de l'autre; d'où il suit que l'usure, au lieu de se distribuer uniformément, porte en majeure partie sur le pourtour de la pièce inférieure et sur le milieu de la pièce supérieure. Il n'en faut pas davantage pour expliquer comment cette inégale répartition de pression et d'usure tend à augmenter la courbure, dans le cas où la partie concave est en-dessus, et à la diminuer lorsqu'on agit dans la position inverse. Quand on sait tenir compte de cette influence, non-seulement on n'a plus à en redouter les effets, mais encore on en tire parti pour maintenir la surface à son degré de courbure jusqu'au moment de commencer le poli.

Le douci étant amené au plus haut degré de finesse et d'uniformité, il s'agit de

le transformer en un poli parfait. On connaît plusieurs procédés pour polir le verre; celui qui a paru le mieux convenir au travail des miroirs est le polissage au papier et au rouge d'Angleterre. Sur la surface même du disque qui a servi à doucir le miroir, on colle à l'empois une feuille de papier dont la trame paraisse aussi égale que possible; au moyen d'une sorte de ménisque en verre appelé *colloir*, on chasse l'excès d'empois vers les bords, et on applique intimement le papier sur le verre; puis, en l'attaquant légèrement par le frottement d'une éponge humide, on détache des parcelles, on *dégarnit* ce papier de manière à soulever une peluche qui, une fois séchée, retient utilement les poudres à polir. Il faut encore passer la pierre ponce, la chasser ensuite avec la brosse, après quoi on étend le rouge d'Angleterre avec un chiffon de papier froissé, et le polissoir est prêt.

Le miroir, lavé et séché, est déposé sur ce polissoir, qui le touche de toute part et qui va l'éclaircir aux premiers frottements; mais avant de mettre la pièce en mouvement, il est indispensable de supporter une partie de son poids en la rattachant au ressort de suspension, au moyen d'une corde suffisamment tendue. A cette disposition on gagne déjà l'avantage de mouvoir sans effort une assez forte masse. Mais ce qui est plus important, c'est qu'en diminuant la pression sur le polissoir on ralentit le dégagement de la chaleur due au frottement, et l'on évite dans une certaine mesure les déformations qui en résultent. Si au contraire on néglige cette précaution, la chaleur qui provient d'un frottement énergique fait bomber les deux pièces, qui bientôt se quittent vers les bords et ne se touchent plus que par le milieu. Le miroir *pivote* sur son centre, la partie moyenne seule se polit, la surface se creuse, et les bords restent mats. Mais, par l'emploi du ressort, on rétablit l'égalité d'action, et tout en prolongeant la durée du polissage, on n'est que plus assuré d'obtenir un bon résultat.

Quand le miroir paraît entièrement poli, on le démonte, on le soumet à un premier examen, et si la surface ne présente pas d'imperfection grave, on entreprend de l'amener par une série de retouches locales à la figure définitive qui doit en faire un miroir objectif parfait.

Pour exécuter convenablement cette délicate opération, il est nécessaire de disposer d'un local fermé où l'on puisse établir une ligne d'expérience quatre ou cinq fois plus longue que la distance focale principale du miroir. A l'une des extrémités, on place le miroir monté dans un cadre qui s'adapte au tube du télescope. Ce tube, débarrassé du prisme et des oculaires, est porté sur deux tréteaux qui le maintiennent dans une position horizontale et l'élèvent à une hauteur commode pour les observations. Des tables occupées par les objets nécessaires à l'examen des surfaces se meuvent dans toute l'étendue de la ligne. De plus, sur un bâti isolé comme un poste d'opticien, on dispose, pour recevoir le

miroir, un bassin en bois dont la courbure s'adapte au revers de la pièce. Enfin on prépare, pour effectuer les retouches, une série de polissoirs dont le diamètre varie du cinquième au tiers de celui de la pièce à retoucher. Ces polissoirs sont en verre recouvert de papier et montés sur molettes en bois ou en liége. On s'en sert pour attaquer le miroir et pour exercer dans des points déterminés une usure de la même nature que celle qui a engendré le poli général de la surface. Mais, pour que cette soustraction de matière s'opère sans rompre la continuité de la courbure, en d'autres termes, pour que les retouches se fondent sans solution de continuité et sans ligne de démarcation perceptible avec la surface primitive, il est indispensable d'apporter le plus grand soin à la préparation des polissoirs. Aussi croyons-nous utile d'aborder les détails pratiques et de donner à ce sujet les renseignements les plus précis.

Dès les premiers essais, on a reconnu que la meilleure courbure à donner au polissoir pour exécuter des retouches partielles n'est pas celle qui coïncide exactement avec la courbure du miroir : le mieux est de lui assurer un léger excès de convexité, parce qu'alors le contact a lieu au centre; par suite, la retouche s'adresse plus directement à l'élément auquel on la destine, et elle se fond dans la surface de part et d'autre du point de contact par une transition insensible. Cependant il ne faudrait pas exagérer cet excès de courbure, car le contact se restreindrait à une étendue qui ne serait plus en rapport avec celle du polissoir. Enfin, lors même que le polissoir aurait la courbure voulue, il importe encore de surveiller attentivement l'état du papier qui sert de véhicule aux poudres polissantes, car parfois il arrive que ces poudres voyagent et qu'en se déplaçant elles décentrent le point d'attaque de manière à dérouter l'opérateur et à fausser la retouche. Il y a donc un ensemble de conditions délicates à remplir. Mais l'art des opticiens offre des ressources qui permettent de surmonter toutes les difficultés.

Quand on veut préparer un polissoir et lui communiquer la courbure précise qui convient au travail de retouche, la marche à suivre consiste à le marier avec une contre-partie en verre de même diamètre et de courbure inverse : on a ainsi, d'après les expressions reçues, une balle et un bassin que l'on rode l'un sur l'autre avec le soin qu'on apporterait à l'exécution d'une bonne surface. Ces disques une fois *réunis*, il faut en vérifier la courbure. Pour cela on pose la partie concave ou bassin sur la grande balle qui a servi au travail du miroir et dont la surface est restée dépolie, et par un frottement développé sur place on fait apparaître une trace blanchâtre qui décèle la répartition des points de contact. Pour que le polissoir qui est convexe arrive à toucher le miroir par son centre, il est clair qu'il faut que le petit bassin touche la grande balle par le bord et y laisse par le frottement une trace annulaire. Tant que ce résultat n'a pas été obtenu, on

continue de modifier par un rodage réciproque la courbure des deux pièces, en ayant soin de tenir le bassin dessus ou dessous, suivant qu'il faut augmenter ou diminuer la courbure; puis enfin, lorsque l'épreuve du frottement sur le dépoli de la grande balle donne une trace annulaire qui va en mourant jusqu'au milieu de la distance au centre, on est sûr que les deux disques ont la courbure voulue, et l'on peut s'occuper de coller les papiers.

A la rigueur il suffirait de garnir le polissoir; mais, de même que les deux pièces ont servi à se régulariser l'une par l'autre en les rodant verre sur verre, de même une fois garnies toutes deux on perfectionne les papiers en les soumettant à un traitement analogue. On colle ces papiers à l'empois dont l'excès s'échappe sous l'action du colloir; on promène à la surface une éponge mouillée en ayant soin d'attaquer légèrement l'espèce d'épiderme formé par l'encollage primitif, et on laisse sécher. Quand l'humidité s'est dissipée, on trouve le papier bien tendu, mais il est comme rugueux et chargé de parcelles roulées en globules qui ont été détachées par l'éponge; on les enlève par le frottement d'une ponce plate et on les chasse avec la brosse. En cet état on pourrait considérer le polissoir comme prêt à entrer en action; cependant, comme le papier peut présenter des inégalités d'épaisseur, nous lui faisons subir une dernière préparation qui a aussi pour effet de soulever un velouté très-propre à fixer et à retenir les poudres. Cette préparation consiste à réunir les deux papiers, à les attaquer l'un par l'autre avec de la ponce pulvérisée et mouillée d'un liquide qui ne décolle pas l'empois. On fixe donc le polissoir sur l'établi, on l'arrose de benzine, on le saupoudre de ponce pilée, on dépose le bassin par-dessus, et l'on agit pendant un certain temps comme si l'on voulait doucir une surface. Peu à peu la benzine s'évapore, la ponce qui formait bouillie redevient pulvérente, et quand on sent qu'elle a une tendance à se réunir en tas, on l'écarte, et on recommence ainsi deux ou trois fois. On donne pour finir un coup de brosse que l'on prolonge avec insistance, et l'on voit le papier recouvrer sa blancheur. Mais si on l'examine avec attention, on reconnaît que la surface s'est avantageusement modifiée en se recouvrant d'un velouté uniforme dont la présence favorise toujours l'action du polissoir.

A la manière dont s'étalent et se fixent soit le rouge, soit le tripoli qu'on ajoute pour donner du mordant, on constate déjà que le traitement à la ponce et à la benzine réalise des conditions d'uniformité qui rarement se rencontrent dans la feuille de papier employée telle quelle. Mais lorsque le travail se prolonge, lorsqu'un polissoir a servi pendant plusieurs heures, on le voit se comporter bien différemment suivant qu'il a subi ou non cette dernière préparation. Quand on omet de réunir les papiers, l'opération marche bien, il est vrai, pendant un certain temps; mais bientôt dans la partie centrale où s'exercent les plus fortes pressions, le papier se tasse, perd

sa porosité et se dépouille de son duvet; il se lisse et ne retient plus les poudres, qui se réfugient vers les bords. En pareil cas, malgré l'excès de courbure du polissoir, l'attaque n'a plus lieu par le centre, ce sont les bords qui mordent; en sorte qu'au lieu de pratiquer des retouches qui se fondent insensiblement les unes dans les autres, on court le risque de tracer des sillons plus ou moins profonds et toujours difficiles à réparer. Si au contraire on a pris soin de roder le polissoir suivant le procédé décrit, comme cette opération met à nu les parties profondes et spongieuses du papier, les poudres s'y logent et s'y fixent d'une manière plus durable, en sorte que la partie centrale garde beaucoup plus longtemps son efficacité. On ne voit pas cette région se lisser, se dégarnir comme dans le premier cas, et l'on ne risque pas de faire de fausses retouches par suite de l'affaissement des parties centrales du polissoir et de la prédominance fâcheuse des bords.

Étant ainsi pourvu de deux ou trois polissoirs de grandeurs différentes et bien adaptés à la courbure moyenne du miroir, rien n'empêche d'entreprendre le travail de retouche. Des trois procédés d'examen qui ont été décrits, deux suffisent à diriger l'opération, le premier et le dernier: c'est-à-dire l'observation microscopique de l'image et la vision directe de la surface par les rayons déviés de l'image interceptée. Ce qui détermine le choix de ces deux procédés, c'est que l'objet lumineux est le même pour tous deux et que, pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'échanger le microscope pour l'écran.

Par un premier examen au voisinage du centre de courbure, on explore la surface, et suivant qu'elle réclame une retouche plus ou moins locale, on détermine la grandeur du polissoir qu'il convient d'employer. Puis on dépose le miroir sur son bassin en bois tapissé d'une étoffe de laine, et l'on procède à la mise en train.

Généralement toute surface qui a séjourné un certain temps au contact de l'air se montre rebelle à l'action du polissoir, si on ne prend soin de la nettoyer de manière à lui communiquer un état d'homogénéité parfaite. On la saupoudre de blanc d'Espagne, on y verse un peu d'eau, et au moyen d'un tampon de coton on en forme une pâte qu'on étend uniformément et qu'on laisse sécher. On saisit ensuite un nouveau tampon léger, bouffant, peu serré, dont on effleure seulement la surface; le blanc peu adhérent se détache, s'échappe au dehors et laisse apparaître le verre uniformément recouvert d'un voile transparent; en continuant de frotter légèrement avec du coton constamment renouvelé, on voit ce voile se dissiper peu à peu et la surface du verre finit par se montrer nette et pure. Toutefois sur une surface préparée de la sorte le polissoir glisse tout d'abord et ne finit par mordre qu'après avoir repassé plusieurs fois sur les mêmes parties. Les points où il commence à prendre se distribuent çà et là, irrégulièrement, par plaques où les poudres s'attachent et où l'on sent naître l'adhérence qui décèle un travail. Ces

plaques grandissent peu à peu; mais tant qu'elles ne sont pas devenues confluentes, l'action du polissoir manque d'uniformité, et il y aurait danger d'altérer la surface si l'on se servait du rouge qui a beaucoup de mordant; il est préférable d'employer, pour commencer, le tripoli de Venise qui s'étend bien sur le papier, qui attaque le verre moins vivement et qui semble avoir qualité pour la mise en train.

Lorsque le polissoir s'applique également bien sur tous les points, lorsque son adhérence est la même partout, on peut remplacer le tripoli par le rouge d'Angleterre, et désormais le travail commence. C'est le moment de chercher d'après l'examen optique des surfaces à se représenter la figure du solide de révolution qui est comme superposé au miroir et en altère la figure, puis il faut se demander quel est le mouvement à donner qui, étant répété un grand nombre de fois, en tournant autour du centre, sera capable d'enlever par usure le solide en excès. Ce mouvement, quel qu'il soit, une fois adopté, devra être exécuté sans changement tel qu'on en a décidé, pendant un certain temps, dix minutes, un quart d'heure, après quoi le miroir sera de nouveau examiné.

Sans doute il pourra arriver qu'on ait mal jugé et que le mouvement exécuté donne un résultat autre que celui qu'on attendait; mais au moins l'épreuve portera un enseignement, tandis que si on variait la manœuvre plusieurs fois entre deux examens, le résultat observé ne conduirait à aucune conclusion précise. Du reste, quand les polissoirs sont bien préparés, qu'ils touchent par le milieu et non par les bords, que le papier ne se glace pas et conserve son velouté, que les poudres ne voyagent pas, il n'y a pas à craindre que les résultats soient en discordance manifeste avec les manœuvres qu'on a exécutées. Le polissoir mené successivement suivant tous les diamètres produira à coup sûr une creusure centrale; mais si on le dirige suivant une série de cordes égales, on ne manquera pas de creuser une rigole annulaire qui s'éloignera du centre à mesure qu'on agira suivant des cordes plus petites, et la largeur de la zone attaquée variera avec l'étendue de la partie frottante et avec l'excès de sa courbure sur celle du miroir. Le mouvement de polissage dirigé suivant toute corde suffit donc déjà pour attaquer tous les points de la surface; mais, afin d'arriver à croiser les traits, on a encore la ressource de tracer des ellipses tournantes plus ou moins allongées, plus ou moins dilatées : seulement il ne faut pas négliger de surveiller l'état du polissoir, de circuler d'un pas uniforme autour de la pièce et de contrôler par un examen fréquemment répété l'effet produit par chaque espèce de retouche. On arrivera ainsi à rendre d'abord la surface sphérique, c'est-à-dire à obtenir au voisinage du centre de courbure une image nette du point lumineux et à produire l'extinction simultanée du faisceau en interceptant cette image par le bord de l'écran opaque.

Une fois réalisé, ce premier résultat, qui déjà témoigne de l'efficacité des re-

touches, prépare la voie au travail qui doit suivre et qui a pour objet de parvenir au paraboloïde de révolution en passant par les ellipsoïdes intermédiaires. Le point lumineux qui était placé au centre de courbure étant rapproché du miroir, le foyer se déplace en sens inverse, et l'examen optique, qui tout à l'heure accusait une surface parfaite, décèle dans cette nouvelle position un commencement d'aberration de sphéricité, l'image s'entoure d'une nébulosité légère, qui disparaît quand on force la mise au point du côté du miroir, et qui s'exagère dans le cas contraire; c'est le caractère de l'aberration positive. En effet, l'écran qui s'avance pour intercepter l'image communique à la surface l'aspect déjà signalé (*fig.* 13). On croit y voir une éminence centrale séparée du bord par une creusure annulaire; mais en variant tant soit peu la distance de l'écran au miroir, on détermine dans l'aspect stéréoscopique de cette surface des changements par suite desquels le fond de la gorge annulaire semble s'approcher plus ou moins du centre de figure. L'interprétation rationnelle de ce phénomène conduit à reconnaître qu'il existe une infinité de manières de retoucher le miroir pour effacer l'aberration : cela revient à dire qu'entre l'ellipsoïde osculateur au centre (*fig.* 15) et l'ellipsoïde tangent au bord de la surface sphérique (*fig.* 17), il existe une infinité d'ellipsoïdes qui ont avec la surface réelle un cercle de contact (*fig.* 16) dont le diamètre peut prendre toute longueur moindre que le diamètre du miroir.

Parmi ces surfaces, vers laquelle faut-il tendre? Cela dépend des dimensions du miroir. Quand son diamètre ne dépasse pas 25 à 30 centimètres, il y a intérêt à adopter la retouche la plus facile à exécuter; or c'est évidemment celle qui, respectant le bord, s'exerce particulièrement sur la partie centrale; mais quand le miroir prend des dimensions plus grandes, il vaut mieux se laisser guider par une autre considération et rechercher le système de retouche qui conduit à enlever le minimum de matière : on est ainsi conduit à partager la retouche entre le bord et le centre et à réserver, conformément à l'indication de la *fig.* 16, la zone qui correspond au cercle de contact. De toutes manières on arrive à opérer le nivellement apparent de la surface et à détruire du même coup l'aberration qui entourait l'image du point lumineux.

Ce résultat constaté, on répète la même opération pour une position plus avancée des foyers conjugués et, par suite, le miroir se modifie en prenant une forme ellipsoïde de plus en plus prononcée. Passant ainsi de station en station, les deux foyers cheminent en sens opposés, et ils indiquent, en s'écartant l'un de l'autre, que l'ellipsoïde subit un allongement correspondant.

Enfin l'image du point, repoussée de proche en proche et toujours maintenue exempte d'aberration, se trouve portée à l'extrémité de la ligne d'expérience. Il s'agit maintenant, par une dernière retouche, de la rejeter toute corrigée à l'infini. Plus la ligne d'expérience sera longue, moins cette dernière phase du tra-

vail semblera hasardeuse; cependant il faut savoir se maintenir dans les limites pratiques. Nous avons supposé que, dans l'emplacement où l'on opère, la distance des deux stations extrêmes est au plus égale à cinq fois la longueur focale du miroir; conservons ces données, et montrons que la dernière retouche peut encore être soumise à un contrôle rigoureux.

Lorsque l'image du point lumineux est reléguée à l'extrémité de la ligne, le point lui-même est encore à une certaine distance du foyer principal, et comme ce dernier est à moitié chemin du centre de courbure, sa position est déterminée. Nommons f le point correspondant au foyer principal, f' la position actuelle du point lumineux, et f'' une de ses positions antérieures, avec la condition de prendre $f'f''$ égal à ff'. En vertu des principes précédemment exposés sur la marche des aberrations positive et négative, il arrivera que si l'on ramène le point lumineux en f'', les apparences seront sensiblement conformes à celles qui devront se montrer lorsque le miroir sera rendu parabolique, et que le point lumineux sera maintenu en f'. Étudions donc le relief de la figure qui se produit alors, puis, ramenant le point lumineux en f', appliquons-nous à reproduire ce relief en modifiant la surface par une dernière retouche. Par ce moyen, on arrive à rejeter sans aberration l'image à l'infini, et à communiquer au miroir une figure voisine du paraboloïde de révolution. Mais s'il est impraticable d'aller observer l'image à l'infini où on l'a repoussée, rien n'est plus aisé, en intervertissant l'image et l'objet, que d'obtenir la vérification du résultat obtenu. On n'a qu'à prendre pour point de mire un objet extérieur situé à une distance aussi grande qu'on voudra, et à l'observer au moyen du miroir monté en télescope newtonien. L'image doit se montrer exempte d'aberration, et présenter des traces de diffractions aux contours de l'objet. Si cet objet est un point lumineux ou s'il affecte l'apparence du réseau à maille carrée, les trois procédés deviennent applicables au foyer principal, et pour peu qu'un défaut perceptible eût échappé à la dernièrere touche, il serait toujours temps d'y revenir et de le faire disparaître.

En résumé, la méthode que nous venons de décrire consiste à soumettre les surfaces à des épreuves optiques, et à les modifier par des retouches faites à la main jusqu'à ce qu'elles se montrent sans défaut. La nature des choses, avec laquelle il faut toujours compter, a permis d'instituer, d'une part, des procédés d'examen et, d'autre part, de recourir à des moyens d'attaquer la substance du verre, qui, sous le rapport de la précision, fussent les uns et les autres au niveau du résultat qu'il fallait obtenir. Si, contrairement à ce que l'expérience a pleinement démontré, les procédés d'examen manquaient de sensibilité, ou si les moyens d'attaque étaient moins délicats, la méthode eût échoué; aussi n'osons-nous affirmer qu'elle soit applicable aux miroirs métalliques, car il n'est pas démontré que l'alliage cristallin dont on les a formés jusqu'ici soit susceptible de supporter in-

définiment comme le verre l'action du polissoir. Mais lors même qu'on échouerait en essayant d'étendre aux miroirs métalliques le bénéfice des retouches locales, il n'y aurait pas à le regretter sérieusement, car l'opération venant à réussir, on n'en tirerait qu'un résultat précaire, et qui se trouverait compromis dès l'instant où le poli s'altérerait sous l'influence des agents atmosphériques. Sur le verre, au contraire, la courbure une fois réalisée peut être considérée comme acquise d'une manière définitive, attendu que les altérations qui surviennent avec le temps n'intéressent que la couche métallique déposée après coup par une opération que rien n'empêche de renouveler indéfiniment.

Définition et détermination numérique des pouvoirs optiques.

La méthode que nous venons de décrire et dont l'application a été répétée un grand nombre de fois a pour effet constant de porter les surfaces optiques à un degré de perfection qu'on atteint assez rapidement, et qu'on ne peut bientôt plus dépasser. Quand on est arrivé à ce point, il y a lieu de se demander si l'impossibilité de progresser encore tient à l'imperfection des procédés, ou si elle provient de ce qu'on a touché le but en réalisant une surface parfaite. Pour nous la question n'est pas douteuse, et nous n'hésitons pas à considérer comme parfaite une surface qui agit sensiblement sur la lumière comme le ferait un miroir rigoureusement conforme à la figure désignée par la théorie.

Lorsqu'une surface approche de ce degré de perfection relative, on voit survenir un ensemble de caractères qui, une fois appréciés, servent de guide à l'opérateur et l'avertissent du moment où il doit considérer son travail comme terminé. En même temps que s'effacent les défauts trahis par les divers procédés d'examen, l'image fournie par une telle surface prend au microscope un aspect particulier qui flatte l'œil, et qui ne se dément pas lors même qu'on y applique des grossissements exagérés. Cet aspect remarquable provient de ce que l'image est alors formée par le groupement d'éléments correctement circulaires. Chacun de ces disques élémentaires est à la vérité entouré d'un certain nombre d'anneaux ; mais, comme ces derniers n'ont qu'une intensité rapidement décroissante, le disque central conserve une supériorité d'éclat qui lui assure la prépondérance dans le tracé précis des contours. Des divers anneaux qui entourent ce disque on n'aperçoit ordinairement que le premier, et comme un intervalle obscur les sépare, il en résulte que ce premier anneau n'apporte dans l'image aucune confusion sensible, et qu'en se superposant à lui-même il se borne à dessiner un pâle cordon qui circule parallèlement aux contours les plus accentués de l'image. La théorie de la diffraction explique ce phénomène, qui dénote que tous les rayons du cône convergent arrivent au sommet dans un

accord de vibration à peu près complet. Si à la surface approximative obtenue par la méthode expérimentale on pouvait substituer une surface rigoureusement exacte, les rayons arriveraient au sommet du cône en concordance parfaite, mais le point lumineux ou plutôt le disque étroit formé par leurs concours n'en serait pas moins entouré d'anneaux. Il n'y a donc pas d'intérêt pratique à pousser la perfection des surfaces au delà du degré nécessaire à l'apparition des phénomènes caractéristiques de la diffraction. Lorsque ces phénomènes se montrent au foyer d'une manière évidente, c'est-à-dire lorsque l'image d'un point formée à miroir entièrement découvert apparaît sous la forme d'un disque entouré d'anneaux circulaires d'une intensité rapidement décroissante, on peut être assuré qu'un pareil miroir, dirigé sur toute espèce d'objet terrestre ou céleste, donnera de bonnes images, et qu'il produira un effet optique en rapport avec son étendue diamétrale.

Mais pour juger sûrement du résultat, et pour en donner une expression moins vague que celle qu'on emprunte habituellement au langage ordinaire, il convient de diriger le miroir monté en télescope newtonien vers une mire lointaine, systématiquement composée de manière à offrir à l'observation des détails placés à la limite de visibilité. On construit ces mires d'épreuve en traçant sur une lame d'ivoire des séries de divisions partagées en groupes successifs où le millimètre est fractionné en parties de plus en plus petites. La largeur du trait doit varier d'un groupe à un autre en proportion telle, que dans chacun d'eux les espaces noircis aient la même étendue que l'intervalle qui les sépare (*fig.* 18). Quand on considère à l'œil nu une pareille mire placée à distance ou qu'on l'observe avec un instrument trop faible, les différents groupes présentent une teinte grise uniforme. Mais si l'on diminue la distance ou si l'on prend des instruments plus puissants, on voit les groupes de divisions les plus écartées se résoudre en traits distincts, tandis que les autres restent confondus. En augmentant le grossissement, et en éclairant suffisamment la mire, on s'assure que dans les groupes qui demeurent uniformément gris, la confusion des traits n'est pas imputable à l'impuissance de l'œil : elle est donc à mettre tout entière sur le compte de l'instrument qui résout l'un des groupes et ne résout pas le suivant. En constatant ainsi quel est le groupe dont les divisions se trouvent par leur rapprochement placées à la limite de visibilité, on acquiert la preuve positive que l'instrument sépare les parties écartées par un certain espace angulaire, et ne sépare pas celles qui sont plus rapprochées les unes des autres. Il suit de là que l'aptitude de l'instrument à pénétrer les détails des objets observés, ou ce qu'on peut appeler son *pouvoir optique*, est inversement proportionnel à l'angle limite de séparabilité des divisions contiguës : il a en définitive pour expression le quotient de la distance de la mire par l'intervalle moyen des dernières parties distinctes.

Nous avons soumis à ce genre d'épreuve un grand nombre de miroirs de toutes

dimensions et de toute longueur focale; ces expériences nous ont conduit à une expression générale des pouvoirs optiques qui est d'une remarquable simplicité. Nous avons trouvé que ce pouvoir optique est indépendant de la longueur focale, qu'il varie uniquement et proportionnellement avec l'étendue transversale du miroir, et qu'il peut être compté sensiblement à raison de 150,000 unités par 10 centimètres de diamètre. Sans avoir opéré des déterminations aussi nombreuses sur les objectifs achromatiques, nous avons cependant reconnu, en les réduisant à leur surface efficace, qu'ils sont soumis à la même loi, et qu'à diamètres égaux, lunette et télescope sont susceptibles du même pouvoir optique.

Ce fait, qui désormais paraît établi, conduit naturellement à rechercher dans la constitution physique de la lumière, et non dans l'imperfection des instruments, l'obstacle qui limite l'extension des effets déjà obtenus. Quelle que soit la variété de construction dont ils sont susceptibles, ces instruments, à mesure qu'ils approchent de la perfection, tendent à accuser des pouvoirs optiques qui soient dans un rapport constant avec les diamètres respectifs des faisceaux admis. On ne saurait donc se refuser à considérer ce rapport comme une constante physique dont la valeur exprime l'aptitude de la lumière à former des images plus ou moins détaillées. En prenant pour unité de longueur le millimètre, auquel on rapporte habituellement l'ondulation lumineuse, on trouve, d'après les mesures expérimentales des pouvoirs optiques, pour la valeur de cette constante, le nombre 1500. Cette constante optique de la lumière est intimement liée à la longueur d'onde et lui est inversement proportionnelle, en sorte qu'elle varie pour les rayons de différentes couleurs de manière à assurer la plus grande puissance de définition aux rayons les plus réfrangibles, ce que l'expérience a confirmé bien des fois notamment, par la netteté remarquable des épreuves photographiques d'objets microscopiques, qui s'engendrent sous l'action prépondérante des rayons ultra-violets.

En général les constantes physiques ont une raison d'être qui découle directement de la nature de l'agent dont elles définissent les propriétés fondamentales. Évidemment ce nombre 1500, qui exprime en quelque sorte la *séparabilité* des éléments lumineux, procède du nombre d'ondulations contenues dans l'unité de longueur, et multiplié par un certain coefficient qui dépend à la fois du procédé employé pour déterminer les pouvoirs optiques, et de l'aptitude physiologique de la rétine à percevoir les impressions différentielles.

Il est à craindre qu'en essayant de donner cours à la notion des pouvoirs optiques nous provoquions, sans le vouloir, l'annonce de pouvoirs impossibles; il n'est rien dont on n'abuse; aussi, pour mettre les observateurs en garde contre des assertions illusoires, avons-nous pris soin d'indiquer les moyens d'obtenir des déterminations comparables, tout en insistant sur l'existence d'une limite absolue à l'exaltation des pouvoirs réalisables par les instruments d'optique.

Il y a cependant à réserver le cas où les instruments seraient éprouvés sur le ciel. Par un temps très-pur il pourra arriver que l'observation des étoiles doubles de grandeurs égales révèle un pouvoir optique plus fort, et jusqu'à deux fois plus élevé que celui qu'on aurait conclu de l'observation de mires terrestres. Voici l'explication de cette discordance possible. Dans la mire terrestre, les détails qu'on cherche à distinguer sont des espaces égaux alternativement noirs et blancs; c'était là une disposition nécessaire pour retomber facilement en toute occasion dans des conditions identiques d'éclairement et d'observation. Mais cette égalité des noirs et des blancs n'est pas à beaucoup près la condition la plus favorable à la résolution de l'ensemble. En effet, dans l'image d'un pareil système la largeur des blancs est égale à leur étendue géométrique augmentée du diamètre sensible inhérent à la grandeur des disques élémentaires, en sorte qu'au moment où ces blancs commencent à se confondre, ils ont une largeur double de celle qu'ils présenteraient, si dans l'objet les parties blanches étaient infiniment petites par rapport aux noires; mais au ciel la dimension réelle des étoiles doubles est infiniment petite par rapport à l'espace qui les sépare. Aussi leur étendue dans l'image se trouve-t-elle réduite à celle des disques élémentaires, ce qui fait que par une atmosphère homogène leur séparation à égalité d'angle sous-tendu est plus facile que celle de la mire. Nous ne sommes pas en mesure de dire combien le pouvoir optique déterminé sur les étoiles l'emporte sur celui que fournit l'observation d'une mire divisée, mais nous avons reconnu qu'il est effectivement plus considérable. Un télescope de 33 centimètres qui nous a fourni la première occasion de revoir le dédoublement du compagnon bleu de γ Andromède, en vertu de son pouvoir optique, évalué à 400,000, semblait ne devoir atteindre que la demi-seconde. Cependant on estime à $\frac{4}{10}$ de seconde le petit arc sous-tendu par le système binaire des étoiles bleues de γ Andromède.

Nous avons exprimé d'une manière générale que dans un instrument parfait le pouvoir optique est indépendant de la distance focale. Si l'on tient à s'en rendre compte, il faut analyser la constitution des images réelles en suivant pas à pas les déductions de la théorie. Dans une image parfaite, le nombre des points distincts dépend évidemment de l'étendue des disques élémentaires qui représentent les différents points de l'objet. Or comme ces disques sont limités par un cercle obscur qui est le lieu géométrique de tous les points où une moitié du faisceau lumineux est en discordance de vibration avec l'autre moitié, il en résulte que l'étendue de ces disques dépend à la fois de la longueur d'onde et de l'angle de convergence des rayons extrêmes. Pour une longueur d'onde invariable, et pour un diamètre constant de la base du faisceau, l'image varie en étendue avec la distance

focale; mais comme l'étendue des disques élémentaires varie sensiblement dans le même rapport, il en résulte que le nombre des parties distinctes ne change pas. C'est en se fondant sur ce genre de considération qu'on a été conduit à construire des instruments à court foyer sans crainte de porter atteinte aux pouvoirs optiques.

Mais si réellement ce pouvoir ne dépend que du diamètre de la surface utile de l'objectif, on doit s'attendre, en réduisant par un diaphragme la surface agissante d'un miroir reconnu comme bon, à diminuer proportionnellement l'effet optique. Ce résultat, qui était prévu, semblait tellement contraire à ce qui arrive ordinairement, qu'il nous a semblé utile de le constater d'une manière directe.

L'expérience a été répétée plusieurs fois sur des instruments de toutes dimensions, et il est maintenant constaté que par l'application des retouches locales on porte les miroirs à ce degré de perfection où ils ne supportent aucun diaphragme sans perdre de leur puissance optique. De là résulte un nouveau caractère et une épreuve bien simple à consulter pour reconnaître la valeur des instruments, car suivant qu'ils perdent ou qu'ils gagnent à être plus ou moins diaphragmés, on jugera d'une manière décisive s'ils approchent plus ou moins de la perfection.

Tous ces faits sont autant de confirmations en faveur de la théorie des ondulations. Dans l'ancienne théorie, le foyer est simplement le point de croisement de rayons indépendants; plus il y a de rayons, plus il y a d'intensité, mais moins il y a de chances que le croisement ait lieu en un point unique. Suivant le système des ondulations, le foyer qui se forme au sein d'un milieu homogène est le centre d'ondes sphériques de mouvements concordants; plus l'onde a d'étendue, mieux ce centre est déterminé. Les rayons que l'on considère géométriquement n'ont pas d'existence individuelle, ce sont de simples directions de propagation. Parmi les prétendus rayons qu'une surface est chargée de grouper en foyer, il n'en est pas d'indifférents; ceux qui vibrent en concordance se constituent effectivement en foyer limité; ceux qui par une imperfection de surface ont subi une différence de marche capable de les mettre en discordance, sont rejetés à une certaine distance des premiers sans jamais en approcher au delà d'une certaine limite; il y a discontinuité entre les rayons concordants et les rayons discordants, et cette discontinuité s'accuse par la présence d'un cercle noir qui règne comme un rempart autour du gros des rayons efficaces. Que si par des retouches locales on s'applique à ramener les rayons déviés, on remarquera que jamais ils ne pénètrent dans cet espace obscur, qu'ils l'évitent et le franchissent comme par l'effet d'un équilibre instable, pour se réunir, en les pressant, au groupe des rayons concordants.

Cette discontinuité dans la marche des rayons appelés à devenir efficaces explique un phénomène dont la singularité nous a souvent frappé. Quand une surface,

même très-incorrecte, est seulement de révolution, le phénomène qui se remarque pendant les tâtonnements de la mise au point consiste en ce que, dans une étendue plus ou moins considérable de part et d'autre du meilleur foyer, on constate la présence d'une image qui ne cesse pas d'être nette, tout en se détachant sur un fond de lumière ambiante. Assurément, si les rayons déviés pouvaient approcher de plus en plus du foyer, ce phénomène n'apparaîtrait pas, attendu que les foyers successifs formés par les différentes zones seraient continûment noyés les uns par les autres. Mais comme en réalité tout foyer est cerné et comme préservé de la confusion par un anneau noir, la zone quelle qu'elle soit qui forme image dans le plan où l'on observe, est bornée, de part et d'autre, de zones inefficaces qui assurent à sa propre image la faculté de dominer sur le fond lumineux formé par la dissémination brusque des autres rayons.

La même explication rend compte du phénomène de doublure qui se produit si fréquemment dans les grands instruments. Les opticiens supposent que la doublure des images est due à un accident de travail, qui partage l'étendue de l'objectif en deux surfaces discontinues séparées par une arête de rebroussement. Cette explication n'est nullement fondée, car jamais on ne constate directement ni intersection, ni discontinuité de surface. En réalité, la doublure des images résulte de la superposition, dans l'appareil convergent, de deux défauts distincts : elle se produit toutes les fois que l'objectif est entaché d'une aberration générale positive ou négative, et que de plus il présente deux sections méridiennes rectangulaires de courbures inégales. On comprend, en discutant les chemins parcourus, qu'en pareil cas il se forme dans le cône convergent deux groupes excentriques de rayons efficaces, et que les rayons centraux laissés en discordances deviennent inefficaces dans leur direction normale. On produit à volonté le phénomène de doublure des images, en choisissant un miroir affecté d'aberration, et en le comprimant suivant un diamètre. Quand l'aberration est positive, la doublure se produit perpendiculairement au diamètre comprimé ; dans le cas contraire, elle se manifeste parallèlement à ce même diamètre.

Si maintenant on considère que cet anneau noir qui entoure l'image focale de chaque point lumineux, et qui concourt si puissamment à donner de la fermeté aux images, a aussi pour effet de rejeter les rayons nuisibles à une distance sensible des rayons utiles, on jugera combien sa présence doit favoriser l'application du troisième procédé d'examen des surfaces, lequel a précisément pour objet d'établir, par l'interposition du bord d'un écran opaque, le départ entre les uns et les autres.

Lorsque par l'effet des retouches tous les rayons nuisibles sont rentrés dans l'ordre, on n'en saurait conclure, comme nous l'avons déjà dit, que la surface

réfléchissante réalise en toute rigueur la perfection géométrique; mais il en résulte que les écarts qui subsistent sont contenus dans des limites dont on peut déterminer, par des considérations très-simples, la minime étendue. La formation d'un foyer exact implique la concordance rigoureuse ou l'égalité absolue des chemins parcourus par tous les rayons. Si donc il y a formation d'un foyer sensiblement parfait, ce n'est pas exagérer que d'admettre que tous les rayons concordent à moins d'une demi-ondulation près, car ceux qui seraient en différence de marche d'une longueur de chemin plus grande, seraient rejetés en dehors du premier anneau noir, et viendraient renforcer les anneaux extérieurs. Or l'ondulation moyenne est d'un demi-millième de millimètre, et la demi-ondulation d'un quart de millième; mais si quelque portion de la surface est en erreur d'une certaine quantité, cette erreur réagira sur les chemins parcourus ou elle sera doublée par la réflexion, et puisque, par hypothèse, tous les rayons s'accordent à moins d'une demi-ondulation, il en résulte que tous les points de la surface réelle approchent de la surface théorique à moins d'un huit-millième de millimètre près, soit un dix-millième. Tel est, indépendamment de l'étendue des surfaces, le degré de précision que comporte l'application des retouches locales poussée jusqu'au point de réaliser des foyers physiquement parfaits. Interrogé sur des quantités de cet ordre, le sphéromètre ne répond plus qu'avec incertitude; comment donc une machine à travailler le verre pourrait-elle les atteindre? Il fallait s'en tenir au travail à la main, et encore la main de l'homme n'agit-elle pas seule, et doit-elle à tout instant se guider d'après les indications mêmes de la lumière.

En résumé, dans ce chapitre, spécialement consacré aux pouvoirs optiques, nous établissons qu'il existe un ensemble de caractères auxquels on reconnaît qu'une surface approche de la perfection. Soumises à l'épreuve des différents procédés d'examen, de telles surfaces cessent de montrer aucun défaut perceptible. Les images qu'elles donnent prennent un bon aspect qui se conserve dans les plus forts grossissements, les contours deviennent vifs et se montrent distinctement accompagnés des franges pâles de la diffraction. De plus, si l'on en vient à l'application des diaphragmes, on reconnaît qu'aucune partie de l'objectif ne peut être masquée sans qu'il en résulte un affaiblissement comparable de l'effet optique.

Afin de donner une expression numérique du pouvoir optique, nous le considérons comme inversement proportionnel à l'angle limite sous lequel s'opère la séparation des plus proches détails distinctement visibles au foyer d'un instrument, et nous prenons pour objet d'épreuve une mire lointaine formée d'espaces contigus alternativement noirs et blancs qui, par leurs distances entre eux et à l'instrument, se placent à la limite de visibilité. Le pouvoir optique se trouve alors

exprimé par le quotient de la distance de la mire au centre optique de l'objectif divisé par l'écartement moyen des parties homologues.

A la suite d'un grand nombre de déterminations effectuées sur des miroirs et des objectifs réfracteurs de toutes dimensions et de toute longueur focale, il est reconnu que le pouvoir optique dépend uniquement du diamètre de la surface efficace, et par suite que ce pouvoir et ce diamètre sont dans un rapport constant qui caractérise la lumière blanche et exprime d'une manière générale la délicatesse de l'agent ou sa puissance virtuelle de séparation.

En prenant pour unité de longueur le millimètre auquel on rapporte habituellement l'ondulation lumineuse, on trouve pour cette constante moyenne de la lumière blanche un nombre sensiblement égal à 1500; d'où l'on tire par une simple proportion la valeur du pouvoir optique maximum d'un objectif de dimension quelconque.

Nous insistons sur l'existence réelle d'un pouvoir limite ou absolu, afin de bien établir ce qu'on doit attendre d'un instrument d'une dimension donnée, et aussi pour détourner les artistes d'annoncer ou de chercher à obtenir des résultats impossibles.

Argenture sur verre, application aux miroirs de télescope.

On connait aujourd'hui un certain nombre de procédés pour réduire l'argent à la surface du verre poli. Dans l'origine, ces procédés ont eu seulement pour objet de former une sorte d'étamage destiné, comme celui des glaces d'appartement, à briller d'un éclat spéculaire du côté appliqué contre le verre et visible à travers sa substance. On n'avait à s'inquiéter ni de l'égalité d'épaisseur de la couche déposée, ni de son adhérence plus ou moins intime, ni du degré de poli qu'elle conservait à son revers; on ne redoutait pas de favoriser la réaction par une certaine élévation de température, mais on avait à tenir compte de la question d'économie.

Dans l'application aux usages de l'optique, les frais d'argenture sont à peu près insignifiants, et l'on a toute latitude pour satisfaire à des conditions qui prennent une importance majeure du moment où la couche métallique chimiquement déposée est appelée à réfléchir la lumière par sa surface extérieure, à former des images et à reproduire en toute exactitude la surface sous-jacente du verre. Le procédé Drayton, auquel l'industrie reproche d'employer comme dissolvants, des alcools très-purs, et comme agents réducteurs, des substances balsamiques et essentielles d'un prix élevé, est celui que nous avons employé à l'époque de nos premiers essais et qui, après trois années d'expérience, nous paraît encore mériter la préférence. Il agit à la température ordinaire, et la couche d'argent qu'il forme

sur le verre est déjà miroitante au sortir du bain; elle présente une épaisseur uniforme et se montre suffisamment adhérente pour supporter le frottement prolongé d'une peau rougie d'oxyde de fer; ainsi polie, elle réfléchit environ 75 pour 100 de la lumière incidente.

Le procédé, tel qu'il nous a été communiqué par MM. Power et Robert, qui disposent actuellement du brevet Drayton, avait déjà subi des perfectionnements qui le rendaient d'une application plus facile et d'un emploi moins dispendieux. En n'hésitant pas à nous en faire part, en y joignant tous les renseignements qui pouvaient suppléer à notre inexpérience, MM. Power et Robert ont singulièrement facilité nos recherches et se sont acquis tous les droits à notre reconnaissance et à nos remercîments.

Nous n'avons rien eu à changer au fond du procédé; mais par la nécessité d'en faire une application nouvelle et très-délicate, nous avons été conduit à régulariser des détails de manipulation, à changer quelque peu les proportions des éléments qui entrent dans la formule et surtout à étudier par excès ou par défaut l'influence empirique de chacun d'eux. C'était la seule marche à suivre pour arriver en toute circonstance à tirer le meilleur parti des produits variables que l'on trouve dans le commerce.

Il y a trois opérations à exécuter successivement sur un miroir de verre pour lui communiquer le vif éclat métallique de l'argent : la préparation ou le nettoyage préalable de la surface, la formation du dépôt d'argent et le polissage de cette même couche de métal.

La préparation de la surface de verre qui doit recevoir le dépôt d'argent exerce une grande influence sur la manière dont la réduction s'opère. La solution argentifère, qui possède la propriété spéciale de se réduire au contact des parois solides et polies, agit d'autant plus vite et forme un dépôt d'autant plus adhérent et homogène, que cette paroi est plus pure de corps étranger à sa propre substance. Mais pour qu'une surface de verre présente ce degré de pureté chimique, il ne suffit pas qu'elle apparaisse à l'œil parfaitement nette et brillante, il faut qu'en la nettoyant on ait recouru à des précautions d'une efficacité assez éprouvée pour n'exiger d'autre vérification que celle de l'argenture même.

Que la surface ait été déjà argentée ou non, on commence par la mouiller de quelques gouttes d'acide nitrique pur que l'on étend rapidement au moyen d'un tampon de coton, puis on lave cette surface à l'eau et on l'essuie avec un linge sec. En cet état la surface ne retient plus que ce qui provient de l'eau elle-même et du linge dont on s'est servi pour l'essuyer. Pour arriver sinon à la purifier d'une manière complète, du moins à lui communiquer un état uniforme, on la saupoudre de blanc d'Espagne, on ajoute assez d'eau distillée pour

former une pâte qu'on étend au moyen d'un tampon de coton. La pièce est laissée à plat pendant le temps nécessaire à l'évaporation de l'eau; les principes solubles se fixent alors dans le blanc qui recouvre la pièce et leur sert d'excipient. Il faut qu'à son tour ce blanc disparaisse. On prend du coton dans la carde, on évite de le serrer, et par un frottement léger on attaque la couche de blanc qui se détache et laisse la surface encore recouverte d'un voile uniforme. C'est ce voile qui, une fois enlevé, laissera le verre dans l'état le plus propice à recevoir l'argenture. On forme donc un nouveau tampon par superposition de couches régulières empruntées à la carde, on en frotte légèrement tous les points de la surface en prenant soin d'écarter la couche superficielle de coton à mesure qu'elle se charge de blanc. Par ce moyen, le voile qui régnait sur le verre se dissipe peu à peu sans solution de continuité, sans ligne de démarcation appréciable. On sent alors que le tampon glisse sur une surface nette; c'est le moment de prendre un tampon plus ferme pour agir énergiquement sur le verre en insistant particulièrement près des bords. Au bout d'un certain temps, quand on suppose que la surface n'a plus rien à gagner, on chasse avec le coton les poussières qui tendent à s'attacher au verre électrisé par le frottement, et l'on pose la pièce sur champ en attendant qu'on l'immerge dans le bain d'argenture. Mais avant de décrire cette manipulation, il convient de donner la formule à suivre pour préparer la solution.

La composition du bain d'argent est assez complexe : il y entre comme matières premières de l'eau, de l'alcool, du nitrate d'argent, du nitrate d'ammoniaque, de l'ammoniaque, de la gomme galbanum et de l'essence de girofles. Avant d'entrer dans le bain définitif, ces éléments s'unissent dans des solutions provisoires dont nous allons donner la composition.

(1). *Ammoniaque étendue*. On part de l'ammoniaque pure du commerce et on l'étend d'eau distillée jusqu'à ce que la solution marque 13 degrés à l'aréomètre de Cartier.

(2). *Nitrate ammoniacal d'ammoniaque*. Dans 200 grammes d'eau, on dissout 100 grammes de nitrate d'ammoniaque sec et on ajoute 100 centimètres cubes de la précédente solution d'ammoniaque étendue; on a ainsi une solution composée comme il suit :

Nitrate d'ammoniaque sec	100 gr.
Eau distillée	200 »
Ammoniaque à 13 degrés (Cartier)	100 c. c.

(3). *Teinture de galbanum*. On trouve dans le commerce, sous le nom de gomme galbanum, une gomme-résine un peu molle, blonde et douée d'une forte odeur vireuse; on rejette celle qui est friable ou compacte et sans odeur, ou verdâtre et

mêlée d'une sorte de chapelure inerte. On prend environ 20 grammes de la substance pour 80 centimètres cubes d'alcool rectifié à 36 degrés, on malaxe le tout dans un mortier de porcelaine chauffé à 40 ou 50 degrés, et l'on obtient une solution de la partie résineuse troublée par une gomme insoluble. On décante dans un flacon et on laisse reposer. On filtre la partie liquide, on épuise le dépôt opaque et par addition d'alcool on ramène cette solution à marquer 29 degrés à l'aréomètre de Cartier.

(4). *Teinture de girofles*. C'est une solution qui résulte du mélange de l'alcool et de l'essence dans les proportions suivantes :

Essence de girofles	25 c. c.
Alcool à 36 degrés (Cartier)	75 »

De tous les produits déjà énumérés on forme ensuite un mélange ainsi composé :

Nitrate d'argent fondu	50 gr.
Eau distillée	100 c. c.
Nitrate ammoniacal d'ammoniaque (2)	7 »
Ammoniaque étendue (1)	24 »
Alcool rectifié à 36 degrés (Cartier)	450 »
Teinture de galbanum (3)	110 »

On fait d'abord dissoudre le nitrate d'argent dans l'eau, puis on ajoute le nitrate d'ammoniaque, qui a pour effet d'empêcher la solution de précipiter par l'addition de l'ammoniaque libre. L'alcool vient à son tour, et en dernier la teinture de galbanum. En d'autres termes, les produits doivent être incorporés les uns aux autres, suivant l'ordre même où ils figurent dans la formule.

La solution qui en résulte brunit promptement et forme un précipité qui se dépose en quelques jours. On décante la partie claire et on la porte dans l'obscurité, où on la conserve pour l'usage sous la désignation de *solution normale*. Cette solution, inactive par elle même, est cependant très-disposée à se réduire au contact du verre du moment où l'on y ajoute 3 pour 100 de teinture de girofles (4).

Cependant le dépôt qui se forme rapidement à 15 ou 20 degrés centigrades, malgré le bon aspect qu'elle présente, ne possède pas toute la consistance nécessaire pour résister à un polissage ultérieur. L'addition de 4 à 5 pour 100 d'eau pure, qui ralentit la réaction, communique en même temps au dépôt d'argent une plus grande solidité. Si l'on ajoutait trop d'eau, la solution deviendrait de plus en plus tardive, et la couche d'argent à peine formée s'arrêterait dans son développement à un degré de minceur où elle ne posséderait pas encore son entier coefficient de réflexion. C'est donc à l'observation et à l'expérience à décider précisément de la quantité d'eau qu'il convient d'ajouter à la solution normale pour en obtenir le meilleur dépôt.

Il en est de même de l'ammoniaque qui, entrant dans le mélange en très-petite quantité, n'est presque jamais dosée du premier coup d'une manière assez précise. Par insuffisance d'ammoniaque, la solution peut rester tardive, et alors il y a à distinguer si ce défaut provient d'un excès d'eau ou du manque d'alcali. Quand c'est l'ammoniaque qui manque, le dépôt d'argent retiré du bain présente une couleur violette très-prononcée et semble recouvert d'un voile blanchâtre. Si au contraire l'alcali était en excès, la solution sous l'influence du girofle se réduirait en masse et au détriment de l'action élective des parois, et le dépôt sortant du bain serait terni et recouvert d'une couche pulvérulente d'un gris foncé. La juste proportion d'ammoniaque est celle qui communique au dépôt une riche couleur d'or tirant sur le rose, avec formation d'un léger voile gris-cendré. Mais tandis que l'addition de l'eau s'effectue par centièmes, les tâtonnements qui concernent l'ammoniaque pure et concentrée ne doivent porter que sur les millièmes. Si par une erreur on avait ajouté de l'ammoniaque en excès, la solution ne serait pas perdue pour cela, car il serait facile de la réparer par l'acide nitrique : il n'en résulterait qu'une légère augmentation dans la dose du nitrate d'ammoniaque qui n'exerce pas sur le dépôt d'influence nuisible. En somme, c'est par l'eau et l'ammoniaque qu'on met pour ainsi dire les solutions au point. Pour éviter les pertes de temps, on fera bien de préparer à l'avance de grandes quantités de solution normale, de les réunir dans un seul flacon, de les traiter en masse pour les amener au point, et de les conserver hermétiquement bouchées sous la dénomination de *solution éprouvée*.

On ne doit tenter d'argenter une pièce importante que lorsqu'on a une solution déjà ancienne et éprouvée d'avance. L'opération s'exécute pour les grandes pièces dans des bassines en cuivre argentées intérieurement par la galvanoplastie, et qui ne s'attaquent pas au contact du nitrate d'argent. Il faut qu'elles soient de grandeur appropriée à celle de la pièce et que le diamètre du fond dépasse de 3 à 5 centimètres celui de la surface à argenter. Pour les miroirs de petites dimensions, on peut se contenter des porcelaines plates que l'on trouve dans le commerce.

Il est indispensable de terminer le revers des miroirs par une surface polie, et de laisser cette surface libre de tout obstacle qui, gênant, l'accès de la lumière, empêcherait de surveiller les progrès de l'argenture; aussi, dès qu'un miroir est assez grand pour qu'on ne puisse plus le manier avec sécurité en le saisissant uniquement par les bords, devient-il nécessaire de creuser sur la tranche une gorge où s'insèrent deux anses de cordes solidement fixées par plusieurs tours de ficelle. Il faut encore préparer trois fiches en bois, ou mieux en baleine, effilées en biseau, que l'on glisse sous le bord du miroir aussitôt après son immersion dans le bain pour l'isoler du fond du vase et ménager un espace à la circulation du liquide. Enfin,

quand on opère sur des pièces d'un poids considérable, on fait reposer la bassine sur une planche garnie de courbes qui en forment une sorte de berçoir. Dans tous les cas, l'opération doit se faire au grand jour et dans un local porté à une température de 15 à 20 degrés, car la lumière et la chaleur exercent une influence indispensable sur la réduction de l'argent.

Lors même que la surface à argenter aurait subi un nettoyage irréprochable, si l'immersion dans le bain n'était pas faite avec toutes les précautions requises, il pourrait encore survenir dans l'argenture diverses espèces de taches, des inégalités ou des temps d'arrêt. La bassine étant nettoyée au blanc d'Espagne, on prépare, pour y verser la solution, un grand cornet de papier collé que l'on engage dans un entonnoir comme un papier à filtrer et dont on coupe la pointe pour ménager un orifice d'écoulement de 2 à 3 millimètres de diamètre. Cet orifice est maintenu à 3 ou 4 centimètres au-dessus du fond de la bassine. Au moment même d'opérer, on mélange, en les agitant dans un même vase, la solution éprouvée et les 3 pour 100 de teinture de girofles qui déterminent la réaction; on en verse aussitôt dans la bassine une petite quantité que l'on se hâte d'étaler avec un tampon de coton, puis, aussitôt, on verse dans le cornet le reste qui s'écoule par l'orifice en renouvelant sa surface, et ne rencontre en se répandant que des parois déjà mouillées. On saisit alors le miroir par les anses, on le présente obliquement pour le faire reposer d'abord sur l'angle de la surface principale, et on l'abaisse d'un mouvement uniforme qui détermine l'envahissement progressif de la nappe liquide; on glisse pour l'isoler du fond les fiches en trois points équidistants, et l'on pose la bassine sur le berçoir en l'exposant librement au grand jour. A partir de ce moment, on n'a plus qu'à agiter doucement le liquide en inclinant l'appareil d'un côté et de l'autre, et en faisant tourner de temps en temps la bassine sur elle-même.

Dans les premiers instants avant que la réaction commence, la surface immergée dans un liquide moins réfringent que le verre donne des objets extérieurs une image perceptible à travers l'épaisseur du disque; mais bientôt, sous l'influence du premier dépôt, cette image s'affaiblit, prend une teinte brunâtre, s'éteint presque complétement, puis soudain reparaît avec un éclat métallique où l'on juge que la réflexion a changé de nature. La durée du temps qui s'écoule entre l'immersion du miroir et la réapparition de l'image réfléchie est importante à noter, parce qu'elle sert de guide pour la durée totale de la réaction, qui généralement n'exige qu'un temps cinq à six fois plus long pour engendrer l'argenture complète. Dans les conditions moyennes de température et de lumière, la réapparition de l'image a lieu cinq minutes après l'immersion, et par un séjour dans le bain, qui se prolonge vingt à vingt-cinq minutes de plus, la couche d'argent acquiert toute l'épaisseur convenable.

Dès qu'on juge le dépôt suffisamment épaissi, on doit retirer le miroir, le laisser égoutter jusqu'à ce que le liquide menace de sécher, et le déposer dans une seconde bassine contenant de l'alcool ordinaire étendu par l'eau au point de marquer 67 degrés à l'alcoomètre de Gay-Lussac ou 25 degrés à l'aréomètre de Cartier. On l'agite jusqu'à ce que les égouttures ne soient plus colorées, et on le transporte dans une troisième bassine contenant de l'eau ordinaire filtrée. Une certaine agitation communiquée sans faire émerger la surface peut hâter la dissolution de l'alcool dans l'eau, mais il est toujours prudent de prolonger ce lavage au delà des six à huit minutes strictement nécessaires.

Le miroir est enfin porté dans l'eau distillée et de là posé sur sa tranche en contact avec un linge dans une position presque verticale, où on le laisse sécher. Quand l'opération a été bien conduite, on voit la nappe d'eau se retirer peu à peu et laisser à découvert une surface d'un jaune d'or tirant sur le rose et recouverte d'un léger voile gris-cendré. Examinée par transparence, cette couche d'argent ne laisse apercevoir que les objets vivement éclairés et les colore fortement en bleu.

Il s'agit maintenant d'enlever ce léger voile qui colore l'argent et diminue son éclat. L'expérience a appris qu'il faut commencer par frotter cette surface avec une peau de chamois disposée en un tampon mollement rembourré de coton cardé. On doit se garder d'étendre sur cette peau aucune poudre à polir, attendu que le frottement de ce premier tampon a principalement pour effet de fouler le dépôt d'argent, d'écraser le velouté inhérent à sa structure, et de lui communiquer une solidité qui lui permette de supporter un polissage complet.

Un singulier phénomène, qui ne manque jamais de se produire, semble démontrer qu'en effet, sous la douce pression exercée par cette peau, la couche d'argent se modifie dans sa constitution. La transparence dont elle jouit à un faible degré en sortant du bain, diminue notablement par le frottement, le bleu transmis devient plus foncé comme si de très-petits interstices capables de transmettre de la lumière blanche venaient à s'oblitérer par suite de l'écrasement des parties saillantes. Toujours est-il qu'une fois polie la couche d'argent, qui a plutôt perdu que gagné, transmet évidemment moins de lumière qu'auparavant. Quand le tampon de peau nue a produit son effet, on en prend un second disposé de même sorte, mais imprégné de rouge d'Angleterre fin et lavé avec le plus grand soin. On le promène légèrement en rond sur toutes les parties de la surface en insistant particulièrement sur les bords, qui ont toujours une tendance à rester en retard. Peu à peu l'argent recouvre sa blancheur et contracte un poli qui reproduit celui de la surface sur laquelle il repose. C'est le poli du verre dans sa perfection, rehaussé par l'intensité de l'éclat métallique. Pendant une heure ou deux, suivant l'étendue de la surface à polir, l'éclat spéculaire

va toujours croissant. Mais enfin, dès que le miroitage des objets ombrés donne un reflet d'un beau noir, on doit s'abstenir de prolonger un traitement qui finirait par altérer la texture de la mince couche d'argent.

Telle est dans tous ses détails la marche que nous avons suivie pour argenter régulièrement les miroirs de verre, sans que la surface en éprouve le moindre changement perceptible aux différents procédés d'examen.

Nous ne prétendons pas que tant de précautions soient rigoureusement indispensables à la réussite d'une argenture suffisante pour l'usage; mais ayant maintes fois observé que rarement on se résigne à accepter les moindres défauts qui viennent troubler l'uniformité d'une belle surface, nous avons compris que nous serions tenu d'indiquer, quels qu'ils soient, les moyens d'obtenir des miroirs sans taches.

Détails de construction sur les télescopes de grande dimension; disposition des oculaires; changements de grossissement; montage du miroir. — Nouveau pied parallactique en charpente.

En sortant des mains de Newton, le télescope a été bien des fois remanié par les savants et les artistes. Dans cet instrument, l'image formée au foyer du miroir ne se présente pas aussi naturellement à l'observation que celle qui résulte du concours de rayons réfractés; les dispositions qu'on a imaginées pour la rendre accessible reposent sur des artifices qui prêtent matière à discussion. Newton a pris dès l'origine le parti le plus sage, qui consiste à rejeter l'image sur le côté, et à l'observer au moyen d'un oculaire monté sur la paroi du tube, et dirigé perpendiculairement sur l'axe. Le cône des rayons convergents était réfléchi par un miroir plan incliné à 45 degrés qui était nécessairement placé en deçà du foyer, à une distance au moins égale au rayon du tube.

En vue d'éviter la perte d'intensité causée par une seconde réflexion métallique, on a tenté de remplacer le miroir oblique, par un prisme à réflexion totale qui agit sur le faisceau sans lui faire subir d'autre perte que celle qui provient de l'absorption et des réflexions partielles aux deux surfaces normales. Mais dans les grands instruments le prisme tend à prendre des proportions telles, qu'il devient presque irréalisable. Dans les instruments à court foyer, tels que ceux que nous avions en vue, ce prisme devait prendre des dimensions plus grandes encore, et menaçait, par ses imperfections propres, d'exercer sur les images la plus fâcheuse influence.

Nous avons pris le parti de briser près du sommet le cône des rayons par un prisme de petite dimension qui laisse l'image à l'intérieur du tube, pour aller ensuite chercher cette image au moyen d'un oculaire composé. Quelles que soient les préventions des observateurs contre l'oculaire à quatre verres, on ne peut mé-

connaître les nombreux avantages que présente cette disposition. Elle résout toute difficulté, car, au moyen d'un prisme réduit aux dimensions seulement suffisantes pour ne pas restreindre l'étendue du champ, elle réalise le bénéfice de la réflexion totale; de plus, comme ce prisme vient se placer à petite distance du foyer, il est hors d'état de compromettre l'image lors même qu'il laisserait à désirer relativement à la qualité de la matière, à l'exécution des surfaces et à la précision des angles. Enfin, ce qui ne nuit en rien, l'image vue dans l'oculaire à quatre verres se trouve redressée.

Cependant, comme l'oculaire composé a été conçu et organisé à l'occasion des lunettes, il arrive qu'en l'associant tel quel à des miroirs paraboliques à court foyer on fait reparaître une certaine aberration de sphéricité; c'est-à-dire que dans cet oculaire où se trouvent deux verres qui jouent réellement le rôle d'objectif, on recommence à éprouver les imperfections des courbures sphériques. A cet inconvénient le remède est bien simple : il consiste à opérer une dernière retouche qui, en sacrifiant l'image du miroir, aura pour effet de reporter la netteté sur l'image résultante du système optique composé du miroir et de la partie objective de l'oculaire. Par ce moyen, le miroir et le système des verres amplificateurs de l'image sont invariablement associés l'un à l'autre, et pour varier le grossissement on se borne à changer le système des deux autres verres, qui est en tout conforme à l'oculaire astronomique ordinaire. Nous n'en sommes donc plus à construire des miroirs exactement paraboliques, et nous croyons mieux faire en les terminant par une surface expérimentale, qui possède expressément la propriété d'agir de concert avec le système des verres amplificateurs de l'oculaire, pour assurer la perfection à l'image résultante.

Les considérations que nous avons développées, en parlant de la formation des images, nous ont servi à évaluer le degré de précision que réclame l'exécution des retouches locales; ces mêmes considérations déterminent la limite où les déformations accidentelles du miroir commenceraient à nuire à la qualité des images. Si l'on veut que les images conservent leur netteté, il est indispensable que dans toutes les positions imprimées au miroir les divers éléments de la surface restent solidaires entre eux à la précision d'un dix-millième de millimètre, car tout déplacement relatif qui excéderait cette minime quantité mettrait certains rayons en discordance avec les autres, et les jetterait en dehors du groupe efficace. On comprend dès lors l'extrême importance des précautions à prendre pour détourner du miroir les forces qui tendraient à en altérer la figure.

Lorsque le miroir est placé au fond du tube et que l'instrument est obliquement dirigé vers un point quelconque du ciel, la pesanteur agit suivant deux com-

posantes restangulaires, l'une qui tend à comprimer le miroir dans la direction du diamètre compris dans un plan vertical, l'autre qui le presse contre les parties résistantes sur lesquelles il repose par son revers. Ces deux composantes, qui varient en sens contraires avec la direction de l'instrument, demandent à être combattues isolément. A celle qui comprime le miroir sur sa tranche, on ne peut opposer que la rigidité de la matière qui, sous un poids donné, prend une valeur maximum lorsqu'on termine le revers du miroir par une surface suffisamment convexe. Nous avons trouvé avantageux de faire tailler la face postérieure du miroir sur une courbe telle, que l'épaisseur aille en doublant du bord vers le centre où elle atteint au moins le dixième du diamètre. Ce n'est là du reste qu'un palliatif qui n'obvie pas radicalement à la déformation, mais en réalité cette composante diamétrale de la pesanteur n'est que peu redoutable, et parce qu'elle diminue à mesure que l'instrument s'élève vers le zénith, et parce que l'aplatissement qui pourrait en résulter dans la totalité des faisceaux convergents se corrigerait aisément par l'emploi d'une lentille cylindrique.

L'autre composante, dont l'intensité varie en sens inverse de la première, exerce sur l'image une influence beaucoup plus fâcheuse. A mesure que l'instrument se dresse, les parties solides sur lesquelles le miroir s'appuie font saillir les parties correspondantes de la surface, et déterminent des ondulations qui s'accusent au foyer par de longues traînées de lumière. Il faut supprimer ces pressions locales et les répartir uniformément sur toute l'étendue du revers du miroir. Solidairement avec la monture de ce miroir on fixe un plancher en bois, et l'on ménage entre deux un espace où l'on glisse un sac circulaire en caoutchouc qui, une fois gonflé, s'applique sur le verre. Le tube étroit qui conduit l'air dans ce coussin, circule le long du corps de l'instrument, se prolonge jusqu'à l'oculaire, et se termine par un robinet. En soufflant avec la bouche, l'observateur peut ainsi, sans perdre l'image de vue, régler à son gré la pression et l'amener précisément au degré suffisant pour que le miroir flotte dans sa monture, sans la presser ni par l'une ni par l'autre surface. Il est clair que dans ces conditions, le miroir échappe à la pesanteur, quant aux effets de la composante qui s'exerce totalement sur le coussin pneumatique. Le jeu régulier de l'appareil n'exige nullement que le miroir ait du ballottement dans sa monture, et l'addition du coussin n'augmente pas cette instabilité de l'axe optique qu'on a jusqu'à présent reprochée au télescope. Rien n'empêche d'assujettir le miroir dans son barillet en le saisissant près des bords en trois points équidistants. Le coussin, qui ne peut plus se déplacer en masse, n'en continue pas moins, suivant la pression, à modifier la surface et à réagir distinctement sur la netteté de l'image. Le cadre qui porte l'ensemble du miroir, du barillet, et du coussin pneumatique, se rattache au corps du télescope par des vis calantes

et butantes qui servent à régler l'axe optique par rapport au prisme et à le maintenir dans une position définie.

Le corps des nouveaux télescopes est en bois; il a la forme d'un tube octogonal. Des diaphragmes largement ouverts, et fixés intérieurement de distance en distance, communiquent au système une rigidité dont on tire partie dans la manière de le monter parallactiquement. Au tiers de sa longueur comptée à partir du miroir on a fixé (*fig.* 19) deux tourillons montés perpendiculairement sur la direction de l'axe de figure. D'un autre côté, on a construit une table tournante à deux colonnes, roulant par des galets sur un plateau orienté parallèlement à l'équateur et maintenu dans cette position par un bâti en charpente. Les deux colonnes de la table tournante sont armées de coussinets pour recevoir les tourillons du corps de l'instrument; de plus elles gardent l'écartement voulu et la hauteur suffisante pour le laisser passer librement. Le télescope étant donc posé à sa place se trouve suspendu parallactiquement, car son double mouvement s'exécute en déclinaison autour des tourillons, et en ascension droite autour de l'axe de la table tournante. L'observation prolongée d'un astre exige que l'instrument soit arrêté en déclinaison; c'est pourquoi on fixe sur le plateau tournant une sorte de bras dont l'extrémité se rattache en quelque point du corps du télescope par une barre à coulisse et à serrage qui figure un côté variable dans un triangle, et détermine l'ouverture de l'angle opposé.

Un disque métallique divisé à sa circonférence, et monté sur l'axe des tourillons, fait l'office de cercle de déclinaison, et des divisions tracées sur le contour du plateau équatorial figurent les parties d'un cercle horaire; mais les positions qu'ils indiquent ne comportent pas plus de précision que n'en exige la recherche d'un astre qu'on veut mettre dans le champ.

Ce système de pied ne constitue à vrai dire qu'un support disposé parallactiquement pour la commodité des observations, les mouvements en sont doux, et rien n'empêchera d'y ajouter au besoin un rouage moteur.

On construit en ce moment une semblable monture pour le télescope de 42 centimètres établi depuis plusieurs mois à l'Observatoire impérial. Le miroir a été fondu à Saint-Gobain, puis dégrossi et débordé dans l'usine Sautter et Cie, spécialement consacrée à la construction des phares lenticulaires. Depuis lors M. Sautter a préparé pour l'avenir, de bien plus grands disques, et nous avons reçu de lui l'assurance d'une coopération qui ne reculerait que devant une impossibilité matérielle; soulagée d'une préparation qui exigeait un outillage spécial, la maison Secretan a fait tout le reste, sauf les dernières retouches dont elle n'aurait pas accepté la responsabilité. Par les soins intelligents de M. Eichens, qui a la direction des ateliers, la partie mécanique se perfectionne et s'achève, en sorte qu'avant peu nous serons en possession de l'appareil complet.

Nous voici parvenu au terme de cette série de détails, qu'il fallait tous indiquer, sous peine de laisser à d'autres le soin de rechercher ce que la pratique nous avait enseigné. Nous les avons donnés à titre de renseignements pour ceux qui souhaiteraient de reproduire les effets que nous avons obtenus. Parmi ces détails d'exécution, il en est un grand nombre que nous avons recueillis dans les ateliers de M. Secretan, et nous nous plaisons à reconnaître que ces rapports de chaque jour avec des ouvriers habiles, des contre-maîtres intelligents, et un chef d'établissement doué d'un esprit éclairé, nous ont considérablement abrégé notre tâche.

Cette tâche en quoi consistait-elle? Nous nous étions proposé, ou plutôt nous avions reçu du Directeur de l'Observatoire la mission de préparer les voies pour la taille des objectifs de grand diamètre. Fallait-il se contenter d'appliquer empiriquement en grand les méthodes dont on s'est contenté jusqu'ici pour le travail des verres? Quels résultats pouvait-on se flatter d'obtenir en compensation de l'accroissement des dépenses? A quoi jugerait-on d'avoir réussi? Savait-on seulement si dans l'état actuel, nos meilleurs instruments laissent carrière à d'importants progrès? N'y aurait-il pas en optique comme en mécanique un maximum d'effet utile qui viendrait tôt ou tard limiter nos efforts? Toutes ces questions étaient implicitement comprises dans la mission que nous avions reçue du Directeur.

En cherchant à les résoudre, il y avait danger, nous le voyons aujourd'hui, de s'engager dans une voie qui vraisemblablement était sans issue. Heureusement nous avons pris le chemin détourné et, délaissant provisoirement la réfraction, nous avons emprunté à la réflexion les moyens d'agir plus simplement sur la lumière, et d'en former correctement ce point focal où se révèle toute la théorie physique des images. Comme nous n'avions affaire qu'à une seule surface, comme par le fait même de la réflexion, la ligne d'expérience repliée sur elle-même se contenait à l'intérieur d'un emplacement fermé, et ramenait le point et l'image à proximité l'un de l'autre, nous avons pu, sans nous écarter de la figure sphérique, nous familiariser avec les moyens d'agir sur les surfaces de verre, de les observer et de les modifier à la demande des phénomènes optiques. Appliquant ensuite les mêmes procédés au cas où le point et l'image s'éloignent progressivement l'un de l'autre, nous avons vu se réaliser naturellement les surfaces qui procèdent des sections coniques, et qui étaient désignées depuis si longtemps comme spécialement propres aux usages de l'optique; et maintenant que l'expérience est acquise, nous n'hésiterions pas à faire sur les objectifs achromatiques, l'application d'une méthode qui n'a rien à redouter de la complication analytique des surfaces. Cependant les miroirs de verre qui n'étaient qu'accessoires, ont emprunté à l'argenture un éclat métallique si remarquable, que maintenant ils rivalisent avec les objectifs de même dimension.

Sans perdre de vue l'objet principal de ce travail, qui était de fournir des résultats pratiques, nous avons été conduit, chemin faisant, à reconnaître l'insuffisance des considérations purement géométriques sur lesquelles on se fondait pour établir la théorie des instruments d'optique. Tous les faits observés condamnent un système dans lequel on ne tient aucun compte du caractère périodique de l'agent lumineux, où par suite on néglige l'élément principal qui intervient dans le mécanisme de la formation des images; ils démontrent au contraire qu'au foyer des surfaces appropriées par leur degré de précision à la constitution intime de la lumière, les rayons obéissent au principe fondamental des interférences. Ainsi se justifie dans ses dernières conséquences une doctrine que l'esprit humain s'est donnée pour guide, et qui paraît devoir embrasser l'universalité des phénomènes de l'optique physique.

THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA TERRE

AUTOUR

DE SON CENTRE DE GRAVITÉ,

PAR J.-A. SERRET.

La question du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité est une des plus importantes de l'astronomie; la rotation uniforme de notre planète autour d'un axe sensiblement fixe dans son intérieur nous offre de précieuses ressources pour la mesure du temps, et la connaissance des mouvements de cet axe dans l'espace absolu combinés avec le déplacement de l'écliptique permet à l'astronome de rapporter la marche des astres à des plans fixes et de comparer aux observations les conséquences de la théorie.

Laplace, dans le Livre V de la *Mécanique céleste*, et Poisson, dans le Tome VII des *Mémoires de l'Institut*, ont traité le problème du mouvement de rotation de la terre; je me propose ici de reprendre l'étude de ce mouvement et d'en exposer la théorie avec détail : la solution que je présente aux géomètres et aux astronomes me paraît à la fois plus simple et plus complète que celles des savants illustres que j'ai cités.

Ce Mémoire est divisé en six sections; la section I est une sorte d'introduction destinée à faciliter l'intelligence des développements ultérieurs, et qui en même temps doit éviter au lecteur l'obligation de recourir à d'autres ouvrages; j'ai réuni dans cette section toutes les formules générales relatives au mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe ou autour de son centre de gravité, sur lesquelles repose la solution du problème que j'ai en vue.

La section II est consacrée à l'évaluation de la fonction des forces pertur-

batrices du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, forces qui proviennent des attractions du Soleil et de la Lune. Dans le calcul de cette fonction, j'ai eu égard, à l'exemple de Poisson, aux termes provenant de la différence qui peut exister entre l'aplatissement de l'hémisphère boréal de la Terre et celui de l'hémisphère austral, ainsi qu'aux termes sans doute beaucoup plus petits qui proviennent de la non-symétrie de la Terre autour de son axe, et qui contiennent en facteur la parallaxe de la Lune ou celle du Soleil. Conformément à la méthode systématique que j'ai adoptée, j'ai réuni dans cette section toutes les diverses formules qui doivent concourir à la solution définitive du problème, de manière à dégager celle-ci de tout ce qu'elle renferme d'accessoire.

Dans la section III, je considère le mouvement de l'axe instantané de rotation de la Terre, relativement aux axes principaux d'inertie. J'établis d'une manière rigoureuse la permanence presque parfaite des pôles à la surface de notre sphéroïde et l'invariabilité de la vitesse angulaire de rotation; enfin je démontre que la durée du jour sidéral est constante, c'est-à-dire qu'elle n'est affectée que d'inégalités périodiques qui sont tout à fait insensibles. Poisson est le premier qui ait établi ce dernier point d'une manière incontestable; il est nécessaire d'avoir égard, comme il l'a fait, aux termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices, et ce que Laplace avait donné antérieurement à ce sujet n'est pas suffisant. La méthode dont j'ai fait usage est très-différente de celle de Poisson, qui a pris pour point de départ les formules générales de la variation des constantes arbitraires; l'analyse développée par ce grand géomètre est sans doute très-élégante, mais elle me paraît offrir des complications inutiles que je crois avoir évitées. En terminant cette troisième partie, j'établis les deux équations différentielles qui déterminent l'inclinaison de l'équateur sur un plan fixe et l'angle que forme l'intersection de ces deux plans avec une droite fixe située dans le plan fixe.

Toute cette analyse suppose la Terre entièrement solide; or il n'est pas évident que les oscillations de l'Océan et les mouvements de l'atmosphère soient sans influence sur les déplacements de l'axe instantané de rotation. Laplace a établi que cette influence est complétement insensible; je renvoie pour ce point au Livre V de la *Mécanique céleste*.

Les sections IV et V sont consacrées à la recherche des formules de la précession et de la nutation. J'ai pris pour point de départ les formules du mouvement elliptique, pour la Lune comme pour le Soleil, mais j'ai discuté avec soin l'influence des inégalités de la Lune. J'ai conservé dans la nutation de la longitude deux petits termes qui ont respectivement pour arguments l'anomalie moyenne du Soleil et celle de la Lune; le coefficient du premier de ces termes, qui est à peu près double de l'autre, ne dépasse guère *un dixième de seconde*. Ces

deux termes sont introduits dans l'expression de la nutation par l'équation du centre du Soleil et par celle de la Lune, et c'est à eux que j'ai comparé les termes qui proviennent des diverses inégalités lunaires. Il résulte de cette discussion que toutes ces inégalités n'introduisent dans la nutation de la longitude et dans celle de l'obliquité que des termes inférieurs aux deux que j'ai choisis pour points de comparaison et que les astronomes négligent complétement dans leurs calculs. A la vérité l'inégalité connue sous le nom de *variation* et qui a pour argument deux fois la longitude moyenne de la Lune moins deux fois la longitude moyenne du Soleil, introduit dans chacune des deux formules de nutation un terme qui dépend du double de la longitude du Soleil, et qui doit être conservé pour être réuni au terme de même argument dû à l'action directe du Soleil sur la Terre. Poisson avait fait cette remarque, en ajoutant que le terme dont il s'agit ne devait pas être pris en considération, comme étant au-dessous de la centième partie du petit terme dû à l'action directe; mais cette assertion est inexacte et la vraie valeur est au moins deux fois plus considérable. Toutefois on ne doit point avoir égard aux termes dont je viens de parler, parce qu'ils sont détruits presque complétement par les termes qu'introduit l'inégalité du rayon vecteur qui dépend du même argument que la variation.

Pour la réduction en nombres des coefficients de mes formules, j'ai fixé l'origine du temps au 1er janvier 1850; j'ai admis pour l'obliquité moyenne de l'écliptique à cette époque et pour la constante de la précession, les valeurs employées dans le tome II des *Annales*, j'ai emprunté à M. Peters la valeur de la constante de la nutation; enfin j'ai adopté les valeurs données par M. Le Verrier pour les inégalités séculaires des éléments de l'orbite de la Terre. Au moyen de toutes ces données, j'ai repris le calcul de la masse de la Lune que je trouve égale à $\frac{1}{83}$ environ de la masse de la Terre, avec un coefficient de correction dépendant des corrections qu'il peut y avoir lieu de faire subir aux valeurs admises pour les constantes de la précession et de la nutation; j'ai calculé également le rapport du plus grand moment principal d'inertie de la Terre (relativement au centre de gravité) à la moyenne des deux autres, et j'ai trouvé que ce rapport est sensiblement égal à celui des nombres 306 et 305.

Les formules de nutation auxquelles je me suis arrêté n'offrent que des différences insignifiantes avec celles que M. Le Verrier a calculées, d'après les données numériques de M. Peters, dans le tome II des *Annales*. Ces formules suffisent et au delà pour les besoins ordinaires de l'astronomie; cependant dans les recherches délicates qui se rapportent à l'aberration et à la parallaxe annuelle des étoiles, il peut être utile de connaître les principaux des termes que j'ai né-

gligés. La discussion à laquelle je me suis livré et dont j'ai parlé plus haut pouvait aisément donner tous ces termes, et j'en ai montré un exemple en calculant ceux qui proviennent de la variation lunaire et de l'inégalité correspondante du rayon vecteur; mais ayant spécialement en vue l'exposition théorique du mouvement de rotation de la Terre, je n'ai point insisté sur cet objet et je n'ai pas cherché à reprendre des calculs qui ont été exécutés par M. Peters. Dans son travail sur la détermination de la constante de la nutation, ce savant astronome a repris le calcul de la nutation de la longitude et de celle de l'obliquité; il n'a point admis les formules du mouvement elliptique à l'égard de la Lune, et il a pris pour les coordonnées de cet astre les valeurs qui résultent de la théorie de M. Damoiseau; je n'ai pas cru devoir reproduire les calculs de M. Peters, mais j'ai pensé faire une chose utile en indiquant les résultats qu'il a obtenus. En comparant mes formules à celles de M. Peters déduites d'une analyse différente, on ne pourra manquer de remarquer la coïncidence parfaite qu'elles présentent.

Pour terminer cette étude du mouvement de rotation de la Terre, il restait à déterminer les inégalités séculaires de la durée du jour moyen; cette question fait l'objet de la section VI de mon Mémoire. La solution se réduit au calcul de l'ascension droite du Soleil en tenant compte des déplacements de l'écliptique et de l'équateur; on en déduit ensuite aisément l'angle horaire de cet astre pour un méridien terrestre déterminé. Le temps pendant lequel cet angle s'accroît de quatre angles droits est la durée du jour solaire; le calcul de l'inégalité séculaire dont cette durée est affectée n'offre aucune difficulté; on reconnaît que la durée du jour solaire moyen est actuellement décroissante, mais la diminution est tellement faible, qu'il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

SECTION I.

Formules générales relatives au mouvement de rotation d'un corps solide.

1. Il résulte des principes fondamentaux de la mécanique générale que le mouvement d'un corps autour de son centre de gravité est exactement le même que si ce centre de gravité était invariablement fixé, et que toutes les forces qui sollicitent les différents points dans le mouvement réel fussent appliquées de la même manière à ces mêmes points; aussi les formules qui se rapportent au mouvement d'un corps autour d'un point fixe, conviennent-elles à notre problème. Pour connaître

toutes les circonstances du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, il suffit de savoir déterminer à chaque instant les positions qu'occupent dans l'espace trois axes rectangulaires liés invariablement au corps et passant par le point fixe. La situation de ces axes mobiles, relativement à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace, est déterminée par le moyen de trois angles, et il s'agit de trouver les valeurs de ces angles en fonction du temps, connaissant les forces motrices qui agissent sur le corps.

Définition des variables qui seront adoptées. — Soient O le point fixe autour duquel le corps peut tourner dans tous les sens; OX, OY, OZ les trois axes rectangulaires fixes dans l'espace; OX_1, OY_1, OZ_1 les axes rectangulaires fixes dans le corps et mobiles avec lui. Nous supposerons que les deux systèmes d'axes aient une disposition semblable, c'est-à-dire qu'on puisse amener les directions OX, OY, OZ à coïncider respectivement avec OX_1, OY_1, OZ_1 en faisant tourner le premier système d'axes autour du point O. Cette coïncidence peut être produite à chaque instant au moyen de trois rotations successives effectuées chacune autour d'un certain axe, et les angles décrits dans ces trois rotations sont précisément ceux que nous nous proposons d'introduire; il est très-important de définir ces angles d'une manière précise. Soit NN' l'intersection des plans XY et X_1Y_1, et supposons que le système (OX, OY, OZ) tourne autour de OZ toujours dans le même sens, et de manière que le mouvement initial de OX se fasse vers le prolongement de l'axe OY; désignons par ψ l'angle qui a été décrit par OX lorsque cet axe coïncide avec l'une ou l'autre des deux directions de NN'; soit OX' celle de ces deux directions que l'on veut choisir et OY' la position qu'a prise OY après la rotation. Le nouveau système d'axes (OX', OY', OZ) est tel, que le plan des deux derniers contient l'axe OZ_1 et, par conséquent, en faisant tourner ce système autour de OX', on pourra faire coïncider OZ avec OZ_1; nous supposerons que cette rotation soit effectuée de telle manière que le mouvement initial de OZ se fasse vers OY', et nous désignerons par ω l'angle qui a été décrit par l'axe OZ; dans ce deuxième mouvement, l'axe OY' décrit aussi un angle égal à ω et prend la position nouvelle OY''. Le système d'axes (OX', OY'', OZ_1) auquel nous sommes ici conduits, est tel, que le plan des deux premiers contient les axes OX_1, OY_1; donc, au moyen d'une dernière rotation, exécutée autour de OZ_1, on pourra faire coïncider OX' avec OX_1, OY' avec OY_1; nous supposerons que dans cette rotation le mouvement initial de OX' se fasse vers OY', et nous désignerons par φ l'angle qui a été décrit par OX' et par OY' lorsque ces axes coïncident respectivement avec OX_1 et OY_1.

Par les conventions que nous adoptons, la situation des axes OX_1, OY_1, OZ_1 à

l'égard des axes fixes OX, OY, OZ sera déterminée sans ambiguïté au moyen des trois angles ψ, ω, φ. Chacun de ces angles peut varier de 0° à 360°; mais comme les droites mobiles qu'ils déterminent reprennent les mêmes positions quand on les fait tourner, dans un sens ou dans l'autre, d'une ou de plusieurs circonférences, il s'ensuit que ψ, ω, φ pourront, si on le veut, recevoir toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Et réciproquement, par l'addition ou la soustraction d'un multiple de la circonférence, on pourra ramener ces angles à être renfermés entre 0° et 360°. J'ajoute qu'on peut faire en sorte que l'angle ω reste toujours compris entre 0° et 180°. En effet, dans la première des rotations que nous avons considérées, on a fait coïncider l'axe OX avec l'une ou l'autre des deux directions de NN', à volonté; si, après avoir adopté l'une de ces directions pour en faire l'axe OX', on vient à en changer, la direction OY' sera aussi remplacée par la direction opposée, et il est clair que l'angle ω de la deuxième rotation sera remplacé par $360° - \omega$. L'angle ω est donc compris entre 0° et 180° ou entre 180° et 360°, suivant qu'on prend pour OX' l'une ou l'autre des deux directions de NN'; nous pouvons d'après cela supposer, dans ce qui va suivre, ω compris entre 0° et 180°, ψ et φ entre 0° et 360°. Enfin nous ferons remarquer que ω est toujours égal à l'angle dièdre formé par les angles plans ψ et φ.

Si l'on désigne par x, y, z, les coordonnées d'un point M du corps, relatives aux axes fixes, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même point relativement aux axes mobiles OX_1, OY_1, OZ_1, on pourra obtenir les valeurs de x, y, z en fonction de x_1, y_1, z_1 et des angles ψ, ω, φ, en appliquant trois fois de suite les formules qui servent à passer, dans un plan, de deux axes rectangulaires à deux autres axes semblablement disposés. La première transformation donnera x et y en fonction de deux coordonnées auxiliaires x', y' et de l'angle ψ; la deuxième donnera y' et z en fonction d'une nouvelle auxiliaire y'', de z_1 et de l'angle ω; enfin la troisième transformation donnera y'' et x' en fonction de x_1, de y_1 et de l'angle φ. Les formules relatives à ces trois transformations sont, comme on sait,

$$\begin{cases} x = x'\cos\psi + y'\sin\psi, \\ y = -x'\sin\psi + y'\cos\psi, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y''\cos\omega + z_1\sin\omega, \\ z = -y''\sin\omega + z_1\cos\omega, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = y_1\cos\varphi + x_1\sin\varphi, \\ x' = -y_1\sin\varphi + x_1\cos\varphi. \end{cases}$$

Si, entre ces six équations, on élimine les trois auxiliaires x', y' et y'', il vient

$$(1) \qquad \begin{cases} x = ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(2)\quad \begin{cases} a = \cos\omega\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi, \\ b = \cos\omega\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi, \\ c = \sin\omega\sin\psi, \\ a' = \cos\omega\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi, \\ b' = \cos\omega\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi, \\ c' = \sin\omega\cos\psi, \\ a'' = -\sin\omega\sin\varphi, \\ b'' = -\sin\omega\cos\varphi, \\ c'' = \cos\omega. \end{cases}$$

D'après la théorie de la transformation des coordonnées, les quantités a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' sont les cosinus des angles que les axes fixes OX, OY, OZ forment respectivement avec les axes mobiles OX_1, OY_1, OZ_1. Ces cosinus satisfont, comme on sait, à des relations diverses, toutes comprises dans les formules (2), et parmi lesquelles il nous suffira de rappeler les suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Les neuf cosinus que nous considérons ici sont des fonctions du temps t; et, en différentiant les équations (5) et (6), on obtient

$$(7)\quad \begin{cases} ada + a'da' + a''da'' = 0, \\ bdb + b'db' + b''db'' = 0, \\ cdc + c'dc' + c''dc'' = 0, \end{cases}$$

et

$$(8)\quad \begin{cases} (bda + b'da' + b''da'') = -(adb + a'db' + a''db'') = r\,dt, \\ (adc + a'dc' + a''dc'') = -(cda + c'da' + c''da'') = q\,dt, \\ (cdb + c'db' + c''db'') = -(bdc + b'dc' + b''dc'') = p\,dt, \end{cases}$$

p, q, r désignant de nouvelles variables qui jouent un rôle important dans la théorie que nous considérons.

Les neuf équations (7) et (8) peuvent être partagées en trois groupes.

savoir :

$$\left\{\begin{array}{l} ada + a'da' + a''da'' = 0, \\ bda + b'da' + b''da'' = rdt, \\ cda + c'da' + c''da'' = -qdt, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} adb + a'db' + a''db'' = -rdt, \\ bdb + b'db' + b''db'' = 0, \\ cdb + c'db' + c''db'' = pdt, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} adc + a'dc' + a''dc'' = qdt, \\ bdc + b'dc' + b''dc'' = -pdt, \\ cdc + c'dc' + c''dc'' = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on ajoute les équations de chaque groupe, après les avoir multipliées respectivement par a, b, c, puis par a', b', c', puis enfin par a'', b'', c'', il viendra, en ayant égard aux équations (3) et (4),

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} da = (br - cq)\,dt, \\ da' = (b'r - c'q)\,dt, \\ da'' = (b''r - c''q)\,dt, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} db = (cp - ar)\,dt, \\ db' = (c'p - a'r)\,dt, \\ db'' = (c''p - a''r)\,dt, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} dc = (aq - bp)\,dt, \\ dc' = (a'q - b'p)\,dt. \\ dc'' = (a''q - b''p)\,dt. \end{array}\right.$$

Les équations (8) définissent les nouvelles variables p, q, r que nous aurons à considérer; mais il est indispensable d'exprimer les valeurs de ces variables en fonction des angles ψ, ω, φ et de leurs différentielles. On a, par les équations (2),

$$c'' = \cos\omega, \qquad \frac{c}{c'} = \operatorname{tang}\psi, \qquad \frac{a''}{b''} = \operatorname{tang}\varphi,$$

et, en différentiant, il vient

$$dc'' = -\sin\omega\, d\omega, \qquad c'dc - cdc' = \frac{c'^2 d\psi}{\cos^2\psi}, \qquad b''da'' - a''db'' = \frac{b''^2 d\varphi}{\cos^2\varphi};$$

remplaçant dans ces équations, dc, dc', dc'', da'' et db'' par leurs valeurs tirées des formules (9), on a

$$(b''p - a''q)\,dt = \sin\omega\, d\omega,$$

$$(ac' - ca')\,qdt + (cb' - bc')\,pdt = \frac{c'^2}{\cos^2\psi}\,d\psi,$$

$$(a''^2 + b''^2)\,rdt - (a''p + b''q)\,c''dt = \frac{b''^2}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

remplaçant enfin les cosinus a, b, c, etc., par leurs valeurs tirées des équations (2), il vient

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\omega}{dt} = q\sin\varphi - p\cos\varphi, \\ \sin\omega\,\dfrac{d\psi}{dt} = q\cos\varphi + p\sin\varphi, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = r + \cot\omega\,(q\cos\varphi + p\sin\varphi), \end{array}\right.$$

et si l'on résout ces équations par rapport à p, q, r, on obtiendra

$$(11)\qquad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\omega \dfrac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \dfrac{d\omega}{dt}, \\ q = \cos\varphi \sin\omega \dfrac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \dfrac{d\omega}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} - \cos\omega \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

2. *De la vitesse des différents points du corps mobile.* — Soient comme précédemment x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du corps, relativement aux axes fixes; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même point relativement aux axes mobiles. Désignons aussi par U la vitesse du point M et par u, v, w les composantes de cette vitesse suivant les axes mobiles; ces composantes peuvent s'exprimer simplement, comme on va le voir, par le moyen des trois quantités p, q, r Les composantes de la vitesse U suivant les axes fixes sont exprimées respectivement par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et l'on a, par la loi de la composition des vitesses,

$$u = a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt},$$

$$v = b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt},$$

$$w = c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt};$$

on a d'ailleurs, en différentiant les équations (1),

$$\frac{dx}{dt} = x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = x_1\frac{da'}{dt} + y_1\frac{db'}{dt} + z_1\frac{dc'}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = x_1\frac{da''}{dt} + y_1\frac{db''}{dt} + z_1\frac{dc''}{dt};$$

si donc on ajoute ces dernières équations après les avoir multipliées respectivement par a, a', a'', puis par b, b', b'', puis par c, c', c'', on aura, en faisant usage des formules (7) et (8),

$$(12)\qquad \begin{cases} u = qz_1 - ry_1, \\ v = rx_1 - pz_1, \\ w = py_1 - qx_1, \end{cases}$$

d'où

$$(13)\qquad U = \sqrt{(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2}.$$

3. *De l'axe instantané de rotation et de la vitesse angulaire du corps autour de cet axe.* — Les équations (12) montrent qu'il existe à chaque instant des points du corps dont la vitesse est nulle, et que ces points sont situés sur une droite I passant par le point fixe et ayant pour équations, relativement aux axes liés au corps,

$$(14)\qquad \frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}.$$

Pour tous les points du corps situés sur la droite I, on a effectivement $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, en sorte que ces points sont immobiles pendant un temps infiniment petit dt; par conséquent le mouvement du corps pendant cet instant est un mouvement de rotation autour de la droite I. Cette droite est dite, pour cette raison, *axe instantané de rotation*.

La distance du point M du corps à l'axe instantané, c'est-à-dire à la droite représentée par les équations (14), est égale, comme on sait, à

$$\frac{\sqrt{(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

on aura donc la *vitesse angulaire* du corps autour de l'axe instantané en divisant la vitesse U d'un point quelconque M par la distance dont nous venons de rappeler l'expression. En désignant par o cette vitesse angulaire, on a ainsi

$$(15)\qquad o = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2};$$

on voit que $\frac{p}{o}$, $\frac{q}{o}$, $\frac{r}{o}$ sont les cosinus des angles que l'une des directions de l'axe instantané forme avec les axes mobiles liés au corps; en d'autres termes, p, q, r sont les projections sur les mêmes axes de la vitesse angulaire du corps autour de l'axe instantané.

Si l'on suppose qu'entre les équations (14) on élimine le temps dont p, q, r sont fonctions, on obtiendra l'équation d'une surface conique liée au corps et mobile avec lui. Cette surface conique sera le lieu géométrique de toutes les droites liées au corps et qui sont telles, que chacune coïncide à son tour avec l'axe instantané de rotation.

A l'égard des axes fixes, les équations de l'axe instantané sont évidemment

$$\frac{x}{ap + bq + cr} = \frac{y}{a'p + b'q + c'r} = \frac{z}{a''p + b''q + c''r}.$$

et si l'on suppose qu'on ait éliminé le temps entre ces équations, on obtiendra l'équation d'une surface conique fixe dans l'espace et qui sera le lieu géométrique des diverses positions que prend l'axe instantané.

Il résulte de là que l'axe instantané de rotation décrit deux surfaces coniques, l'une fixe dans l'espace, l'autre fixe dans le corps et mobile avec lui. Le cône mobile est constamment tangent au cône fixe; car soient I l'axe instantané à l'époque t, J la génératrice du cône fixe qui sera l'axe instantané à l'époque $t+dt$, et J_1 celle des génératrices du cône mobile qui coïncidera avec cet axe instantané à la même époque $t+dt$. Pendant le temps dt, les points de I sont immobiles et le corps tourne autour de cet axe, de façon que J_1 coïncide avec J à la fin de l'intervalle dt. On voit donc qu'à cet instant le fuseau infiniment petit IJ_1 du cône mobile coïncide avec le fuseau IJ du cône fixe; en sorte que les deux cônes ont deux génératrices infiniment voisines communes; en d'autres termes, ils sont tangents. On voit en outre que les fuseaux infiniment petits qui composent la surface du cône mobile viennent s'appliquer successivement sur ceux du cône fixe, d'où il suit que le premier cône roule sans glisser sur la surface du deuxième. Or le mouvement du cône mobile qui est lié invariablement au corps entraîne et détermine le mouvement de celui-ci, d'où il résulte que l'on peut, avec M. Poinsot, énoncer la proposition suivante :

« De quelque manière qu'un corps se meuve autour d'un point fixe, ce mouve-
» ment ne peut être autre chose que celui d'un certain cône dont le sommet est
» en ce point et qui roule actuellement sans glisser sur la surface d'un autre cône
» fixe de même sommet. » (*Mémoire sur la rotation des corps.*)

Mais les deux cônes dont il vient d'être question peuvent se réduire à une simple droite; en d'autres termes, il peut arriver que l'axe instantané soit immobile, auquel cas il devient un axe *permanent* de rotation. Il faut remarquer que l'axe instantané ne peut être fixe dans le corps sans être en même temps immobile dans l'espace absolu. Car si l'axe instantané est fixe dans le corps, les points dont la vitesse est nulle sont toujours les mêmes et par suite ils sont immobiles pendant tout le mouvement. On pourrait au surplus tirer immédiatement ce résultat de nos formules.

4. *De la force vive du corps, et des moments par rapport aux axes* OX_1, OY_1, OZ_1 *des quantités de mouvement que possèdent ses différents points.* — Si l'on désigne par dm la masse du point M dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, par $2T$ la force vive du corps, on aura $2T=\sum U^2\,dm$, ou, à cause de l'équation (13),

$$2T=\sum[(qz_1-ry_1)^2+(rx_1-pz_1)^2+(py_1-qx_1)^2]\,dm,$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments du corps. Jusqu'à présent nous avons laissé indéterminés les axes rectangulaires fixes dans le corps; nous supposerons ici que ces axes coïncident avec les axes principaux d'inertie relatifs au point O, nous désignerons par A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes OX_1, OY_1, OZ_1, et nous supposerons que A soit le plus petit moment et C le plus grand. On aura d'après cela

$$(16)\quad \begin{cases} \sum y_1 z_1\, dm = 0, & \sum z_1 x_1\, dm = 0, & \sum x_1 y_1\, dm = 0, \\ \sum (y_1^2 + z_1^2)\, dm = A, & \sum (z_1^2 + x_1^2)\, dm = B, & \sum (x_1^2 + y_1^2)\, dm = C, \end{cases}$$

et il viendra alors

$$(17)\qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Les composantes parallèles aux axes OX_1, OY_1, OZ_1 de la quantité de mouvement de l'élément dm sont $u\,dm$, $v\,dm$, $w\,dm$; si donc on désigne par L, M, N les sommes des moments, par rapport aux mêmes axes, des quantités de mouvement de tous les éléments du corps, on aura

$$\begin{cases} L = \sum (wy_1 - vz_1)\,dm = \sum [y_1(py_1 - qx_1) - z_1(rx_1 - pz_1)]\,dm, \\ M = \sum (uz_1 - wx_1)\,dm = \sum [z_1(qz_1 - ry_1) - x_1(py_1 - qx_1)]\,dm, \\ N = \sum (vx_1 - uy_1)\,dm = \sum [x_1(rx_1 - pz_1) - y_1(qz_1 - ry_1)]\,dm, \end{cases}$$

et, en ayant égard aux formules (16), ces équations se réduisent à

$$(18)\qquad L = Ap,\qquad M = Bq,\qquad N = Cr,$$

en sorte que les quantités p, q, r sont respectivement de même signe que les moments L, M, N, auxquels elles sont proportionnelles. Si l'on désigne par G le moment résultant des quantités de mouvement que nous considérons, on aura

$$(19)\qquad G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2};$$

en outre l'axe de ce moment résultant fera, avec les axes OX_1, OY_1, OZ_1, des angles ayant respectivement pour cosinus $\frac{Ap}{G}$, $\frac{Bq}{G}$, $\frac{Cr}{G}$.

Les vitesses dont tous les points du corps sont animés à un instant donné, pourraient être produites par des forces instantanées, agissant à cet instant sur le corps supposé en repos. Toutes ces forces sont réductibles à un *couple*, à cause

du point fixe, et si l'on décompose ce couple en trois autres dont les axes soient parallèles à OX_1, OY_1, OZ_1, les moments des couples composants seront évidemment égaux à L, M, N respectivement ; par suite, le moment du couple résultant lui-même sera égal à G.

L'axe du moment résultant ou du couple dont le corps est animé à un instant donné, coïncide avec l'axe instantané de rotation, lorsque les trois moments d'inertie A, B, C sont égaux entre eux, et si ces moments, sans être rigoureusement égaux, diffèrent très-peu, les deux axes resteront toujours très-voisins l'un de l'autre. Le cosinus de l'angle formé par ces deux axes est effectivement égal à

$$\frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

expression dont le minimum est $\frac{2\sqrt{AC}}{C+A}$, dans notre hypothèse de $A < B < C$; on en conclut que le sinus de l'angle des axes que nous considérons ne peut jamais surpasser la fraction $\frac{C-A}{C+A}$.

5. *De l'accélération des différents points du corps.* — Considérons l'accélération du point M du corps, et désignons par u_1, v_1, w_1 les composantes de cette accélération, suivant les axes OX_1, OY_1, OZ_1. Les composantes suivant les axes fixes sont exprimées par $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; on aura donc, par la loi de la composition des accélérations,

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= a\frac{d^2x}{dt^2} + a'\frac{d^2y}{dt^2} + a''\frac{d^2z}{dt^2},\\ v_1 &= b\frac{d^2x}{dt^2} + b'\frac{d^2y}{dt^2} + b''\frac{d^2z}{dt^2},\\ w_1 &= c\frac{d^2x}{dt^2} + c'\frac{d^2y}{dt^2} + c''\frac{d^2z}{dt^2};\end{aligned}\right.$$

on a en outre, soit par la loi de la composition des vitesses, soit par les formules précédemment établies,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= au + bv + cw,\\ \frac{dy}{dt} &= a'u + b'v + c'w,\\ \frac{dz}{dt} &= a''u + b''v + c''w,\end{aligned}\right.$$

d'où, en différentiant,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \left(a\frac{du}{dt} + b\frac{dv}{dt} + c\frac{dw}{dt}\right) + \left(u\frac{da}{dt} + v\frac{db}{dt} + w\frac{dc}{dt}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \left(a'\frac{du}{dt} + b'\frac{dv}{dt} + c'\frac{dw}{dt}\right) + \left(u\frac{da'}{dt} + v\frac{db'}{dt} + w\frac{dc'}{dt}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \left(a''\frac{du}{dt} + b''\frac{dv}{dt} + c''\frac{dw}{dt}\right) + \left(u\frac{da''}{dt} + v\frac{db''}{dt} + w\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Si donc on ajoute ces trois dernières équations, après les avoir multipliées respectivement par a, b, c, puis par a', b', c', puis enfin par a'', b'', c'', il viendra, en ayant égard aux équations (7) et (8),

$$\left\{\begin{aligned}
u_1 &= \frac{du}{dt} + qw - rv,\\
v_1 &= \frac{dv}{dt} + ru - pw,\\
w_1 &= \frac{dw}{dt} + pv - qu.
\end{aligned}\right.$$

Remplaçant enfin u, v, w, et leurs dérivées par leurs valeurs tirées des équations (12), on obtient

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
u_1 &= \left(z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt}\right) + q(py_1 - qx_1) - r(rx_1 - pz_1),\\
v_1 &= \left(x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt}\right) + r(qz_1 - ry_1) - p(py_1 - qx_1),\\
w_1 &= \left(y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt}\right) + p(rx_1 - pz_1) - q(qz_1 - ry_1).
\end{aligned}\right.$$

6. *Des moments des forces d'inertie, par rapport aux axes* OX_1, OY_1, OZ_1. — Les composantes de la force d'inertie relative à l'élément dm sont $-u_1 dm$, $-v_1 dm$, $-w_1 dm$; si donc on désigne par $-L_1$, $-M_1$, $-N_1$, les sommes des moments de toutes les forces d'inertie, par rapport aux axes OX_1, OY_1, OZ_1, on aura

$$L_1 = \sum(w_1y_1 - v_1z_1)\,dm,\qquad M_1 = \sum(u_1z_1 - w_1x_1)\,dm,\qquad N_1 = \sum(v_1x_1 - u_1y_1)\,dm.$$

Ces équations subsistent ainsi que les formules (20), quels que soient les axes OX_1,

OY_1, OZ_1, mais nous supposerons ici, comme au n° 4, que ces axes coïncident avec les axes principaux du corps; alors en faisant usage des formules (20) et (16), on aura

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} L_1 &= A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr,\\ M_1 &= B\frac{dq}{dt} - (C-A)pr,\\ N_1 &= C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq. \end{aligned}\right.$$

7. *Équations générales du mouvement d'un corps solide qui ne peut que tourner autour d'un point fixe, ou du mouvement d'un corps libre autour de son centre de gravité.* — Soient $X_1 dm$, $Y_1 dm$, $Z_1 dm$, les composantes suivant les axes principaux OX_1, OY_1, OZ_1 de la force motrice qui est appliquée à l'élément dm du corps. Soient P, Q, R les sommes des moments de toutes les forces qui sollicitent les différents points, par rapport aux mêmes axes, en sorte qu'on ait

$$(22)\quad P = \sum (y_1 Z_1 - z_1 Y_1)\,dm,\quad Q = \sum (z_1 X_1 - x_1 Z_1)\,dm,\quad R = \sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\,dm,$$

les équations du mouvement du corps seront, par le principe de d'Alembert,

$$L_1 = P,\qquad M_1 = Q,\qquad N_1 = R,$$

c'est-à-dire, à cause des équations (21),

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= -(C-B)qr + P,\\ B\frac{dq}{dt} &= +(C-A)pr + Q,\\ C\frac{dr}{dt} &= -(B-A)pq + R. \end{aligned}\right.$$

Les quantités données P, Q, R dépendent en général des angles ψ, ω, φ, et elles peuvent en outre contenir le temps explicitement. En joignant aux équations (23) les équations (10) ou (11), on aura un système de six équations qui détermineront les six inconnues p, q, r, ψ, ω, φ en fonction du temps. Ces équations ont été formées dans l'hypothèse d'un corps dont un point est fixe; mais, ainsi que nous l'avons fait observer en commençant, elles s'appliquent aussi au cas du mouvement d'un corps libre autour de son centre de gravité. Il ne faut pas ou-

blier que les coordonnées x_1, y_1, z_1, se rapportent aux axes principaux d'inertie du corps relatifs au point fixe ou au centre de gravité.

8. *Cas où il existe une fonction des forces.* — Soient $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ les composantes, suivant les axes fixes de la force motrice qui sollicite l'élément dm; l'expression $Xdx+Ydy+Zdz$ est évidemment égale à $X_1udt+Y_1vdt+Z_1wdt$, ou, à cause des équations (12), égale à $(y_1Z_1-z_1Y_1)pdt+(z_1X_1-x_1Z_1)qdt+(x_1Y_1-y_1X_1)rdt$; donc, en remplaçant pdt, qdt, rdt, par leurs valeurs tirées des équations (11), on aura

$$\begin{aligned} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz = &\ (y_1Z_1-z_1Y_1)(\sin\varphi\sin\omega\,d\psi-\cos\varphi\,d\omega)\\ &+(z_1X_1-x_1Z_1)(\cos\varphi\sin\omega\,d\psi+\sin\varphi\,d\omega)\\ &+(x_1Y_1-y_1X_1)(d\varphi-\cos\omega\,d\psi). \end{aligned}$$

La caractéristique d exprime ici, comme dans tout ce qui précède, des différentielles relatives au temps; mais il est évident que l'analyse qui nous a conduit à la dernière équation revient simplement à exprimer les différentielles dx, dy, dz, par le moyen des équations (1) et (2), en fonction des angles ψ, ω, φ, et de leurs différentielles, et à substituer les valeurs obtenues dans l'expression $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$; d'où il suit que l'équation précédente ne cessera pas d'avoir lieu, si l'on considère ψ, ω, φ comme des variables indépendantes, ou, ce qui revient au même, si les différentielles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ deviennent arbitraires. On aura donc aussi, quelles que soient $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \sum dm\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) = &\ P(\sin\varphi\sin\omega\,d\psi-\cos\varphi\,d\omega)\\ &+Q(\cos\varphi\sin\omega\,d\psi+\sin\varphi\,d\omega)+R(d\varphi-\cos\omega\,d\psi). \end{aligned}\right.$$

Lorsque l'expression précédente est la différentielle exacte d'une fonction V, par rapport aux variables ψ, ω, φ, ainsi que cela arrive dans la question que nous avons en vue, la fonction V est dite la *fonction des forces*. On peut alors exprimer les moments P, Q, R au moyen des dérivées partielles de V; on a effectivement

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dV}{d\psi}=(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\sin\omega-R\cos\omega,\\ &\frac{dV}{d\omega}=Q\sin\varphi-P\cos\varphi,\\ &\frac{dV}{d\varphi}=R; \end{aligned}\right.$$

et, en résolvant par rapport à P, Q, R, il vient

$$(26)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\omega}\dfrac{dV}{d\psi} + \dfrac{\cos\omega\sin\varphi}{\sin\omega}\dfrac{dV}{d\varphi} - \cos\varphi\dfrac{dV}{d\omega}, \\ Q = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\omega}\dfrac{dV}{d\psi} + \dfrac{\cos\omega\cos\varphi}{\sin\omega}\dfrac{dV}{d\varphi} + \sin\varphi\dfrac{dV}{d\omega}, \\ R = \dfrac{dV}{d\varphi}. \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, il suffira pour achever la formation des équations différentielles du problème, d'exprimer, en fonction des angles ψ, ω, φ, la fonction V définie par la formule

$$(27)\qquad dV = \sum dm\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Si l'on porte dans les équations (23) les valeurs précédentes de P, Q, R, et celles de p, q, r, tirées des équations (11), on obtiendra trois équations différentielles du deuxième ordre pour déterminer les variables principales ψ, ω, φ. En résolvant ces trois équations par rapport aux dérivées $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\omega}$, $\frac{dV}{d\varphi}$, et en désignant par ψ', ω', φ', les dérivées $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, il est aisé de s'assurer qu'elles deviennent

$$(28)\qquad \frac{d\frac{dT}{d\psi'}}{dt} - \frac{dT}{d\psi} = \frac{dV}{d\psi}, \quad \frac{d\frac{dT}{d\omega'}}{dt} - \frac{dT}{d\omega} = \frac{dV}{d\omega}, \quad \frac{d\frac{dT}{d\varphi'}}{dt} - \frac{dT}{d\varphi} = \frac{dV}{d\varphi},$$

T désignant, comme précédemment, la demi-force vive qui, d'après les formules (17) et (11), a pour expression

$$(29)\quad T = \tfrac{1}{2}\left[A(\psi'\sin\varphi\sin\omega - \omega'\cos\varphi)^2 + B(\psi'\cos\varphi\sin\omega + \omega'\sin\varphi)^2 + C(\varphi' - \psi'\cos\omega)^2\right].$$

L'équation dite des forces vives peut se déduire aisément des équations (28) ou des équations (23). Par exemple, en ajoutant les équations (23) après les avoir multipliées respectivement par p, q, r, il vient, à cause de la formule (17),

$$\frac{dT}{dt} = Pp + Qq + Rr;$$

or le second membre de cette équation est précisément égal au second membre de la formule (24), divisé par dt, lorsque dans celle-ci on prend pour $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ les variations qui ont lieu pendant le temps dt. D'ailleurs la différentielle dV qui forme le premier membre de l'équation (24) est relative aux seules variations $d\psi$,

$d\omega$, $d\varphi$, on aura donc

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dV}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{dV}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt},$$

ou

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dV}{dt} - \left(\frac{dV}{dt}\right), \tag{30}$$

$\frac{dV}{dt}$ désignant le quotient par dt de la différentielle totale de V, tandis que $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ représente la dérivée partielle de V par rapport à t, prise en regardant ψ, ω, φ comme constantes.

On obtient immédiatement les équations (28) quand on emploie la méthode générale de Lagrange ; quoique ces équations ne renferment plus que les véritables inconnues du problème, il convient, en général de conserver les deux systèmes (23) et (11), et cela est surtout utile dans l'application que nous avons en vue. Il y a effectivement deux choses à étudier dans le mouvement d'un corps autour de son centre de gravité, ou autour d'un point fixe quelconque ; d'une part le mouvement dans l'espace des axes principaux d'inertie du corps, lequel est déterminé par les angles ψ, ω, φ ; et, d'autre part, les changements de position de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes principaux. Il est donc essentiel de ne pas abandonner entièrement la considération des variables p, q, r.

SECTION II.

De la fonction des forces perturbatrices du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

9. Nous avons formé, dans la section précédente, les équations différentielles du mouvement d'un corps solide qui ne peut que tourner autour d'un point fixe, et dont les différents points sont sollicités par des forces quelconques données. Ces équations différentielles sont celles qui composent les systèmes (23) et (10), et, d'après une remarque déjà faite, elles peuvent être appliquées au cas du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. Alors A, B, C désignent dans ces équations les moments d'inertie de la Terre relatifs aux axes principaux OX_1, OY_1, OZ_1 qui se coupent au centre de gravité O, et nous admettrons, comme précédemment, que A soit le plus petit moment et C le plus grand ; nous rappellerons encore que les variables p, q, r sont les projections sur les axes principaux de la vitesse angulaire θ de la Terre autour de son axe instantané de rotation, et

que les angles ψ, ω, φ sont ceux qui fixent la position des mêmes axes principaux à l'égard de trois axes rectangulaires OX, OY, OZ qui passent par le centre de gravité et dont les directions demeurent invariables; le sens dans lequel chacun de ces angles doit être compté et les limites entre lesquelles il varie ont été déterminés avec précision dans la section précédente. Enfin les équations (26) donneront les valeurs des moments P, Q, R qui figurent dans les équations (23), quand on connaîtra la fonction V des forces perturbatrices du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité; nous allons nous occuper ici de l'évaluation de cette fonction.

Les forces qui agissent sur la Terre pour modifier son mouvement de rotation ne sauraient provenir que de l'attraction des astres en présence desquels elle se trouve. Soient L la masse de l'un de ces astres; ξ, η, ζ les coordonnées de son centre de gravité par rapport aux axes OX, OY, OZ; ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du même centre de gravité par rapport aux axes principaux d'inertie de la Terre. Désignons aussi, conformément aux notations de la section I, par x, y, z les coordonnées de l'élément dm de la Terre relatives aux axes OX, OY, OZ, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées qui se rapportent aux axes OX_1, OY_1, OZ_1, et par Δ la distance du même élément dm au centre de gravité de L; soit enfin f le coefficient de l'attraction, c'est-à-dire la force avec laquelle s'attirent mutuellement deux points matériels dont les masses sont égales à l'unité de masse, et dont la distance est égale à l'unité de longueur

Nous admettrons, sauf à revenir tout à l'heure sur ce point, que l'action de l'astre L sur l'élément dm est la même que si la matière dont cet astre est formé était réunie tout entière à son centre de gravité. La force qui sollicite l'élément dm sera dès lors égale à $\frac{f\mathrm{L}\,dm}{\Delta^2}$, et les cosinus des angles que forme la direction de cette force avec les directions des axes OX, OY, OZ seront $\frac{\xi - x}{\Delta}$, $\frac{\eta - y}{\Delta}$, $\frac{\zeta - z}{\Delta}$. Si donc on n'a égard qu'à la seule action de l'astre L, on aura, d'après l'équation (27) de la section I,

$$dV = \sum \frac{f\mathrm{L}\,dm}{\Delta^3}\left[(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz\right] = \sum -f\mathrm{L}\,dm\frac{d\Delta}{\Delta^2};$$

par conséquent, la partie de V qui provient de L sera

$$(1) \qquad V = \sum \frac{f\mathrm{L}\,dm}{\Delta}.$$

Chacun des astres que l'on voudra considérer donnera un terme semblable, et la somme de tous ces termes composera la valeur complète de V.

Comme la distance de l'astre L à la Terre est toujours assez grande relativement aux dimensions de celle-ci, même quand il s'agit de la Lune, l'expression précédente de V peut être développée en une série très-convergente. On a

$$\Delta = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\eta_1 - y_1)^2 + (\zeta_1 - z_1)^2},$$

et, si l'on désigne par ρ la distance du centre de gravité de L au centre de gravité de la Terre, on aura

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \tag{2}$$

et

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho}\left[1 - 2\,\frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{\rho^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ou, en développant, par la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = {} & \frac{1}{\rho} + \frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{\rho^3} + \frac{3}{2}\,\frac{[\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)]^2}{\rho^5} \\ & + \frac{5}{2}\,\frac{[\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)]^3}{\rho^7} + \frac{35}{8}\,\frac{[\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)]^4}{\rho^9} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Si l'on porte cette valeur de $\frac{1}{\Delta}$ dans la formule (1), en négligeant les termes de degré supérieur au deuxième par rapport aux coordonnées x_1, y_1, z_1, et que l'on désigne par δV la quantité dont la fonction V se trouve diminuée par le fait de cette suppression, on aura

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{fL}{\rho}\sum dm - \frac{fL}{2\rho^3}\sum (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,dm + \frac{fL}{\rho^3}\left[\xi_1 \sum x_1\,dm + \eta_1 \sum y_1\,dm + \zeta_1 \sum z_1\,dm\right] \\ & + \frac{3}{2}\,\frac{fL}{\rho^5}\left[\begin{array}{l} \xi_1^2 \sum x_1^2\,dm + \eta_1^2 \sum y_1^2\,dm + \zeta_1^2 \sum z_1^2\,dm + 2\eta_1\zeta_1 \sum y_1 z_1\,dm \\ + 2\zeta_1\xi_1 \sum z_1 x_1\,dm + 2\xi_1\eta_1 \sum x_1 y_1\,dm \end{array}\right] \\ & + \delta V. \end{aligned} \tag{4}$$

Cette formule se simplifie beaucoup en observant que l'on a, par la propriété du centre de gravité,

$$\sum x_1\,dm = 0, \qquad \sum y_1\,dm = 0, \qquad \sum z_1\,dm = 0,$$

et, par celle des axes principaux d'inertie,

$$\sum y_1 z_1 dm = 0, \qquad \sum z_1 x_1 dm = 0, \qquad \sum x_1 y_1 dm = 0;$$

en outre, comme la fonction V ne figure pas dans nos équations, et que celles-ci renferment seulement les dérivées partielles $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\omega}$, $\frac{dV}{d\varphi}$, on peut supprimer de l'expression précédente de V tous les termes qui sont indépendants des variables ψ, ω, φ. Or les coordonnées ξ, η, ζ qui se rapportent à des axes de directions invariables, ne dépendent pas de ces angles et il en est par conséquent de même de la distance ρ; on devra donc supprimer de l'expression de V les termes indépendants des coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1. Les réductions dont nous venons de parler étant effectuées, notre valeur de V ne contiendra plus que les carrés des coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1, et l'on pourra éliminer l'une de ces coordonnées, ζ, par exemple, au moyen de la formule (2); on remplacera donc ζ_1^2 par $\rho^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2$, ou plus simplement par $-\xi_1^2 - \eta_1^2$ en négligeant la partie ρ^2 qui produirait dans V un terme indépendant des angles ψ, ω, φ. On aura ainsi

$$V = \frac{3}{2}\frac{fL}{\rho^5}\left[\xi_1^2 \sum (x_1^2 - z_1^2)\, dm + \eta_1^2 \sum (y_1^2 - z_1^2)\, dm\right] + \delta V;$$

et comme on a, d'après les notations de la section I,

$$\sum (y_1^2 + z_1^2)\, dm = A, \qquad \sum (z_1^2 + x_1^2)\, dm = B, \qquad \sum (x_1^2 + y_1^2)\, dm = C,$$

il viendra

$$(5) \qquad V = \frac{3}{2}\frac{fL}{\rho^5}\left[(C - A)\,\xi_1^2 + (C - B)\,\eta_1^2\right] + \delta V.$$

La partie de V que nous venons de calculer est de beaucoup la plus considérable; il est cependant nécessaire pour notre objet de considérer aussi la partie que nous avons désignée par δV, afin de pouvoir examiner plus tard la part que cette quantité peut avoir dans le phénomène que nous nous proposons d'étudier. On obtiendra la partie principale de δV, par la formule (1), en prenant pour $\frac{1}{\Delta}$ la somme des termes du troisième degré en x_1, y_1, z_1 contenus dans le second membre de la formule (3); si l'on désigne par $\delta^2 V$ la partie de δV qui proviendrait des termes de degré supérieur au troisième, et que l'on fasse usage de la

formule (2), on trouvera aisément

$$(6)\quad \begin{aligned} \partial V = {} & \frac{3}{4} f L \iota \left[\mathcal{A} \left(\frac{\xi_1}{\rho^5} - \frac{5}{3} \frac{\xi_1^3}{\rho^7} \right) + \mathcal{B} \left(\frac{\eta_1}{\rho^5} - \frac{5}{3} \frac{\eta_1^3}{\rho^7} \right) + \mathcal{C} \left(\frac{\zeta_1}{\rho^5} - \frac{5}{3} \frac{\zeta_1^3}{\rho^7} \right) \right] \\ & + \frac{15}{4} \frac{f L \iota}{\rho^7} \left[\mathcal{D} \xi_1 (\eta_1^2 - \zeta_1^2) + \mathcal{E} \eta_1 (\zeta_1^2 - \xi_1^2) + \mathcal{F} \zeta_1 (\xi_1^2 - \eta_1^2) + 4 \mathcal{G} \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \right] \\ & + \partial^2 V, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\sum (3 y_1^2 x_1 + 3 z_1^2 x_1 - 2 x_1^3)\, dm = \mathcal{A} \iota, \quad \sum (3 z_1^2 y_1 + 3 x_1^2 y_1 - 2 y_1^3)\, dm = \mathcal{B} \iota, \quad \sum (3 x_1^2 z_1 + 3 y_1^2 z_1 - 2 z_1^3)\, dm = \mathcal{C} \iota,$$

$$\sum (y_1^2 - z_1^2) x_1\, dm = \mathcal{D} \iota, \quad \sum (z_1^2 - x_1^2) y_1\, dm = \mathcal{E} \iota, \quad \sum (x_1^2 - y_1^2) z_1\, dm = \mathcal{F} \iota, \quad \sum x_1 y_1 z_1\, dm = \mathcal{G} \iota;$$

nous supposerons que ι désigne, dans ces formules, le *rayon moyen* de la Terre, et alors $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ représenteront des quantités de même nature que les moments d'inertie A, B, C.

Pour avoir la partie la plus considérable de $\partial^2 V$, on substituera pour $\frac{1}{\Delta}$ dans la formule (1) les termes du quatrième degré en x_1, y_1, z_1 contenus dans le second membre de la formule (3); alors, en faisant usage de la formule (2) et en désignant par $\partial^3 V$ la partie de $\partial^2 V$ qui proviendrait des termes de degrés supérieurs au quatrième, on trouvera

$$(7)\quad \begin{aligned} \partial^2 V = {} & -\frac{5}{8} f L \iota^2 \left[\mathcal{A}' \left(\frac{\xi_1^2}{\rho^7} + 7 \frac{\eta_1^2 \zeta_1^2}{\rho^9} \right) + \mathcal{B}' \left(\frac{\eta_1^2}{\rho^7} + 7 \frac{\zeta_1^2 \xi_1^2}{\rho^9} \right) + \mathcal{C}' \left(\frac{\zeta_1^2}{\rho^7} + 7 \frac{\xi_1^2 \eta_1^2}{\rho^9} \right) \right] \\ & + \frac{5}{4} \frac{f L \iota^2}{\rho^7} \left[\mathcal{D}' \eta_1 \zeta_1 \left(1 - 7 \frac{\xi_1^2}{\rho^2} \right) + \mathcal{E}' \zeta_1 \xi_1 \left(1 - 7 \frac{\eta_1^2}{\rho^2} \right) + \mathcal{F}' \xi_1 \eta_1 \left(1 - 7 \frac{\zeta_1^2}{\rho^2} \right) \right] \\ & + \frac{35}{4} \frac{f L \iota^2}{\rho^9} \left[\mathfrak{G}' \eta_1 \zeta_1 (\eta_1^2 - \zeta_1^2) + \mathfrak{H}' \zeta_1 \xi_1 (\zeta_1^2 - \xi_1^2) + \mathfrak{I}' \xi_1 \eta_1 (\xi_1^2 - \eta_1^2) \right] \\ & + \partial^3 V, \end{aligned}$$

formule où l'on a fait, pour abréger,

$$\sum (y_1^4 + z_1^4 - 6 y_1^2 z_1^2)\, dm = \mathcal{A}' \iota^2, \quad \sum (z_1^4 + x_1^4 - 6 x_1^2 z_1^2)\, dm = \mathcal{B}' \iota^2, \quad \sum (x_1^4 + y_1^4 - 6 x_1^2 y_1^2)\, dm = \mathcal{C}' \iota^2,$$

$$\sum (y_1^2 + z_1^2 - 6 x_1^2) y_1 z_1\, dm = \mathcal{D}' \iota^2, \quad \sum (z_1^2 + x_1^2 - 6 y_1^2) z_1 x_1\, dm = \mathcal{E}' \iota^2, \quad \sum (x_1^2 - y_1^2 - 6 z_1^2) x_1 y_1\, dm = \mathcal{F}' \iota^2,$$

$$\sum (y_1^2 - z_1^2) y_1 z_1\, dm = \mathfrak{G}' \iota^2, \quad \sum (z_1^2 - x_1^2) z_1 x_1\, dm = \mathfrak{H}' \iota^2, \quad \sum (x_1^2 - y_1^2) x_1 y_1\, dm = \mathfrak{I}' \iota^2.$$

Il n'était pas nécessaire d'effectuer ces calculs pour reconnaître que la partie de V qui provient de l'attraction de L, peut être développée en une série dont les différents termes sont multipliés, à partir du deuxième, par les puissances successives du rapport $\frac{r}{\rho}$, rapport qui n'est autre chose que la parallaxe de l'astre. Mais les résultats que nous venons d'obtenir vont nous permettre d'apprécier d'une manière convenable le degré de petitesse des termes qui sont contenus dans les expressions de δV et de $\delta^2 V$.

10. Nous verrons, dans la section suivante, que l'axe instantané de rotation de la terre ne s'écarte jamais que d'une quantité insensible de l'axe du plus grand moment d'inertie C, et tout porte à penser que la matière est distribuée à peu près symétriquement autour de cet axe, de telle manière que la différence des deux moments A et B doit être très-petite, non-seulement par rapport à l'un de ces moments, mais encore par rapport aux différences $C - A$ et $C - B$ dont le rapport à C peut servir de mesure à l'aplatissement du sphéroïde terrestre; en outre, le plan que déterminent les axes des moments A et B, partage la terre en deux hémisphères dont la constitution est sans doute à fort peu de chose près la même, ce que l'on exprime en disant que la différence d'aplatissement des deux hémisphères est très-petite relativement à l'aplatissement moyen. Si l'on admet que cette symétrie dans la distribution de la matière ait lieu rigoureusement à l'égard des trois plans que déterminent deux à deux les axes principaux d'inertie, il est évident que toutes les intégrales représentées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, et qui figurent dans la formule (6), seront nulles, en sorte que la valeur de δV sera réduite à la seule partie $\delta^2 V$; dans la même supposition, les intégrales $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{I}'$ de la formule (7), s'évanouissent aussi, et il ne reste plus dans l'expression de $\delta^2 V$ ou de δV que les seuls termes multipliés par $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$. Comme cette hypothèse s'éloigne certainement très-peu de la réalité, on serait porté à conclure que les termes les plus considérables de la partie δV de la fonction perturbatrice, sont ceux qui figurent dans la valeur de $\delta^2 V$ avec les coefficients $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, et qui contiennent en outre en facteur le carré de la parallaxe de l'astre L; mais il est facile de montrer qu'il n'en est pas ainsi, à cause de l'extrême petitesse des intégrales $\mathcal{A}'$ $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$.

Pour justifier cette assertion, nous comparerons la Terre à un ellipsoïde formé de couches semblables concentriques et homogènes, dont la densité aille en décroissant du centre à la surface; nous attribuerons à l'ellipsoïde une masse M égale à celle de la Terre, et nous supposerons en outre que les moments principaux d'inertie A, B, C, relatifs au centre de gravité, soient les mêmes pour les

deux corps. Soit alors

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2}+\frac{z_1^2}{c_1^2}=1,$$

l'équation de la surface de l'ellipsoïde; la densité moyenne de ce corps étant égale, d'après nos notations, à $\frac{3M}{4\pi a_1 b_1 c_1}$, nous désignerons par

$$\frac{3M}{4\pi a_1 b_1 c_1} f(\chi),$$

la densité de la couche infiniment petite comprise entre les deux surfaces elliptiques semblables qui ont respectivement pour demi-axes $a_1\chi$, $b_1\chi$, $c_1\chi$, et $a_1(\chi+d\chi)$, $b_1(\chi+d\chi)$, $c_1(\chi+d\chi)$. Cela posé, considérons l'intégrale

$$\sum x_1^\lambda y_1^\mu z_1^\nu dm,$$

où dm représente, comme précédemment, la masse de l'élément dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, et où λ, μ, ν désignent des nombres pairs positifs ou nuls. Si l'on étend cette intégrale à tous les éléments d'un ellipsoïde homogène, ayant pour demi-axes $a_1\chi$, $b_1\chi$, $c_1\chi$, et dont la densité soit prise pour unité, on obtient pour résultat, d'après une formule connue,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+3}{2}+1\right)} a_1^{\lambda+1} b_1^{\mu+1} c_1^{\nu+1} \chi^{\lambda+\mu+\nu+3},$$

en représentant suivant l'usage par Γ la transcendante eulérienne de seconde espèce qui est telle que l'on a

$$(8)\qquad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\quad \Gamma(1)=1,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Si l'on différentie cette expression par rapport à χ, qu'on multiplie la différentielle obtenue par $\frac{3M}{4\pi a_1 b_1 c_1} f(\chi)$, et qu'on l'intègre ensuite entre les limites $\chi=0$ et $\chi=1$, on aura évidemment la valeur de l'intégrale $\sum x_1^\lambda y_1^\mu z_1^\nu dm$, étendue à tous les éléments de l'ellipsoïde hétérogène que nous considérons. Si donc on fait, pour abréger,

$$S_i=\int_0^1 \chi^{i+2} f(\chi)\,d\chi,$$

on aura

$$(9) \qquad \sum x_1^\lambda y_1^\mu z_1^\nu\, dm = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+3}{2}\right)}\,\frac{3M}{2\pi}\, S_{\lambda+\mu+\nu}\, a_1^\lambda b_1^\mu c_1^\nu,$$

formule qui exige nécessairement que l'on ait

$$3S_0 = 1 \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \chi^2 f(\chi)\, d\chi = \frac{1}{3};$$

on reconnait au moyen des formules (8) et (9) que les intégrales $\sum x_1^2 dm$, $\sum y_1^2 dm$, $\sum z_1^2 dm$, ont respectivement pour valeurs $MS_2 a_1^2$, $MS_2 b_1^2$, $MS_2 c_1^2$, ce qui permet d'exprimer les axes de notre ellipsoïde en fonction de sa masse et de ses moments principaux d'inertie. On trouve ainsi

$$a_1^2 = \frac{C+B-A}{2MS_2}, \quad b_1^2 = \frac{C+A-B}{2MS_2}, \quad c_1^2 = \frac{A+B-C}{2MS_2},$$

et si l'on prend pour le rayon moyen ε la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des demi-axes, on aura

$$\varepsilon^2 = \frac{A+B+C}{6MS_2};$$

notre formule générale donne ensuite

$$\sum y_1^4 dm = \frac{3}{5} MS_4 b_1^4, \quad \sum z_1^4 dm = \frac{3}{5} MS_4 c_1^4, \quad \sum y_1^2 z_1^2 dm = \frac{1}{5} MS_4 b_1^2 c_1^2,$$

d'où

$$\sum (y_1^4 + z_1^4 - 6y_1^2 z_1^2)\, dm = \frac{3}{5} MS_4 (b_1^2 - c_1^2)^2.$$

Si, à l'aide des formules précédentes, on exprime b_1, c_1 et M en fonction des moments d'inertie et du rayon moyen ε, on obtiendra

$$\sum (y_1^4 + z_1^4 - 6y_1^2 z_1^2)\, dm = \frac{6}{5}\,\frac{S_4}{S_2}\,\frac{(C-B)^2}{\frac{1}{3}(A+B+C)}\,\varepsilon^2,$$

le coefficient $\frac{S_4}{S_2}$ est évidemment moindre que 1, il se réduirait à $\frac{5}{7}$ dans le cas de

l'homogénéité; par conséquent, si l'on fait

$$\theta = \frac{6}{5}\frac{S_1}{S_1},$$

θ différera peu de l'unité, et si ce nombre est supérieur à 1, il sera du moins inférieur à $\frac{6}{5}$. La formule précédente permet d'écrire immédiatement les valeurs des quantités $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$; on a

$$\mathcal{A}' = \theta\frac{(C-B)^2}{\frac{1}{2}(A+B+C)},\quad \mathcal{B}' = \theta\frac{(C-A)^2}{\frac{1}{2}(A+B+C)},\quad \mathcal{C}' = \theta\frac{(B-A)^2}{\frac{1}{2}(A+B+C)};$$

d'où il suit que les intégrales $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ sont de l'ordre des carrés des différences $C-B$, $C-A$, $B-A$; et cette conclusion, qui est rigoureuse à l'égard de notre ellipsoïde, ne peut manquer d'être fort approchée dans le cas de la nature.

On voit, par ces développements, qu'on ne peut trouver dans $\delta^2 V$ que des termes d'une petitesse extrême; quant aux termes de δV contenus dans la formule (6), ils sont eux-mêmes très-petits par rapport à ceux qui composent la première partie de V. Si l'on admet la symétrie de la Terre autour de l'axe du moment C, la quantité δV se réduira au seul terme multiplié par $\mathcal{C}$, lequel est certainement, dans tous les cas, le plus considérable de ceux que renferme la formule (6); si au contraire on veut avoir égard au défaut de symétrie de la Terre autour de son axe, tous les autres termes de la formule (6) subsisteront, mais il est aisé de voir que ceux qui sont multipliés par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les seuls qu'il y ait lieu de conserver, car les intégrales $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont très-petites, même par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On peut vérifier ce dernier point par la considération de l'ellipsoïde. Remarquons d'abord que l'on peut conserver la formule (9) quand l'un des exposants λ, μ, ν devient impair, pourvu qu'alors on divise le second membre par 2 et qu'on n'étende l'intégrale contenue dans le premier membre qu'à celle des deux moitiés de l'ellipsoïde pour laquelle les éléments $x_1^\lambda y_1^\mu z_1^\nu dm$ sont positifs. Cela posé, reprenons les intégrales que nous avons représentées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, et décomposons chacune d'elles en deux parties, l'une relative aux x_1 positives et l'autre aux x_1 négatives. Si l'on évalue la première partie dans l'ellipsoïde déjà considéré qui a pour demi-axes a_1, b_1, c_1, et la deuxième partie dans un autre ellipsoïde analogue aux demi-axes $a_1 + \delta a_1$, b_1, c_1, on trouvera facilement, au moyen des formules écrites plus haut, et en traitant δa_1 comme un infiniment petit,

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{3}\frac{C-B}{2B+2C-3A};$$

ce simple calcul suffit pour se convaincre que, dans le cas de la nature, ϖ est beaucoup plus petit que $\mathcal{A}$; quant aux quantités $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, elles sont évidemment du même ordre que ϖ.

11. Dans ce qui précède nous avons supposé que la matière qui constitue l'astre L était concentrée tout entière au centre de gravité de cet astre, il convient d'examiner quelle peut être l'erreur résultant de cette hypothèse. La partie δV de la fonction perturbatrice étant fort petite relativement à l'autre partie, on peut en faire ici abstraction, et l'on aura

$$V = \frac{3}{2}\frac{fL}{\rho^5}[(C-A)\xi_1^2 + (C-B)\eta_1^2],$$

pour la partie de V qui provient d'un astre réduit à son centre de gravité. Par un point G quelconque, fixe ou mobile, mais indépendant des axes OX_1, OY_1, OZ_1, menons trois axes rectangulaires parallèles à ceux-ci, et désignons par α, β, γ les coordonnées de l'astre L par rapport à ces nouveaux axes; supposons en même temps que les quantités ξ_1, η_1, ζ_1 et ρ se rapportent non plus à l'astre L, mais au point G; les coordonnées de l'astre, relativement aux axes OX_1, OY_1, OZ_1, seront maintenant $\xi_1+\alpha$, $\eta_1+\beta$, $\zeta_1+\gamma$, et nous désignerons par Δ la distance au centre O, distance qui avait été jusqu'ici représentée par ρ. La valeur précédente de V deviendra, par suite de ces changements dans la notation,

$$V = \frac{3}{2}\frac{fL}{\Delta^5}[(C-A)(\xi_1+\alpha)^2 + (C-B)(\eta_1+\beta)^2],$$

et si l'on veut considérer plusieurs astres L, L', L'',..., dont α, β, γ, α', β', γ',... désignent respectivement les coordonnées relatives aux axes qui passent par le point G, la partie de V qui proviendrait de tous ces astres, pourra s'écrire

$$V = \frac{3}{2}(C-A)\sum\frac{fL(\xi_1+\alpha)^2}{\Delta^5} + \frac{3}{2}(C-B)\sum\frac{fL(\eta_1+\beta)^2}{\Delta^5}.$$

Si l'on pose

$$W = \sum\frac{fL}{\Delta},$$

W sera une fonction des coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 du point G, et l'on trouve aisément, pour les dérivées partielles $\frac{d^2W}{d\xi_1^2}$, $\frac{d^2W}{d\eta_1^2}$, $\frac{d^2W}{d\zeta_1^2}$, les valeurs suivantes :

$$\frac{d^2W}{d\xi_1^2} = -\frac{1}{\Delta^3} + 3\frac{(\xi_1+\alpha)^2}{\Delta^5},\quad \frac{d^2W}{d\eta_1^2} = -\frac{1}{\Delta^3} + 3\frac{(\eta_1+\beta)^2}{\Delta^5},\quad \frac{d^2W}{d\zeta_1^2} = -\frac{1}{\Delta^3} + 3\frac{(\xi_1+\gamma)^2}{\Delta^5},$$

d'où l'on tire la formule connue

$$\frac{d^2W}{d\xi_1^2}+\frac{d^2W}{d\eta_1^2}+\frac{d^2W}{d\zeta_1^2}=0;$$

d'après cela, et en se rappelant que l'on peut supprimer de V tous les termes indépendants des coordonnées $\xi_1+\alpha$, $\eta_1+\beta$, $\zeta_1+\gamma$, etc., on trouvera cette nouvelle expression

$$V=-\frac{1}{2}\left(A\frac{d^2W}{d\xi_1^2}+B\frac{d^2W}{d\eta_1^2}+C\frac{d^2W}{d\zeta_1^2}\right).$$

Si l'on prend, au lieu de L, L', L'',..., les éléments infiniment petits d'un même astre L, et que le point G, considéré plus haut soit le centre de gravité de cet astre, la formule précédente fera connaître rigoureusement la partie de V, qui provient de L, en y faisant

$$W=\sum\frac{f\,dL}{\Delta},$$

formule où le signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de l'astre L. Or en se reportant aux formules (3) et (4) que nous avons développées pour un objet semblable à celui que nous avons ici en vue, on reconnaît qu'en substituant à l'expression précédente de W la valeur plus simple

$$W=\frac{fL}{\rho},$$

l'erreur relative dont W se trouvera affectée sera de l'ordre du carré du diamètre apparent de l'astre L; j'ajoute que l'expression de cette erreur contiendra en facteur, dans chacun de ses termes, le rapport de la différence de deux moments principaux d'inertie de L à l'un de ces moments, rapport qui est certainement fort peu considérable. On voit en résumé qu'en supposant la masse de l'astre L concentrée à son centre de gravité, on commet une erreur qui est du même ordre que celle qui résulte de la suppression de la partie $\delta^2 V$ de la fonction perturbatrice.

12. D'après la formule (5), la partie de V qui provient de l'astre L peut se mettre sous la forme

$$V=f\frac{L}{\rho^3}\left[(C-A)\frac{\xi_1^2}{\rho^2}+(C-B)\frac{\eta_1^2}{\rho^2}\right],$$

en négligeant δV. Le facteur entre crochets ne dépend nullement de la distance

de l'astre à la Terre, puisque les rapports $\frac{\xi_1}{\rho}$, $\frac{\eta_1}{\rho}$, $\frac{\zeta_1}{\rho}$ représentent les cosinus des angles que fait cette distance avec les axes OX_1, OY_1, OZ_1, il en résulte que : *les parties de la fonction des forces perturbatrices du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, qui proviennent des différents astres, sont en raison directe des masses de ces astres et en raison inverse des cubes de leurs distances à la Terre.* On voit immédiatement par là que le Soleil et la Lune sont les seuls astres dont il y ait lieu de s'occuper dans cette question : l'action du Soleil est rendue sensible par la grandeur de sa masse, et celle de la Lune est plus considérable encore à cause de sa proximité.

Supposons que les quantités L, ρ, ξ_1, η_1, ζ_1 se rapportent au Soleil et désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues relatives à la Lune ; soient ρ_0 et ρ'_0 les moyennes distances du Soleil et de la Lune à la Terre, et posons

$$(10) \qquad \varepsilon = \left(\frac{L'}{L}\right)\left(\frac{\rho_0}{\rho'_0}\right)^3.$$

Le nombre ε ainsi défini exprime le rapport des actions de la Lune et du Soleil perturbatrices du mouvement de rotation de la Terre; sa valeur est à très-peu près égale à 2, et nous verrons plus loin comment on peut la déterminer avec précision par la comparaison de la théorie aux observations. Il semblerait qu'on peut obtenir ce rapport à priori, puisqu'il ne dépend que des parallaxes et des masses du Soleil et de la Lune; cependant, comme la parallaxe du Soleil n'est pas connue avec une grande précision, et que la masse de la Lune déterminée par d'autres théories ne serait pas elle-même donnée très-exactement, il serait impossible, en suivant cette marche, de calculer ε avec une approximation suffisante.

Lorsque l'on considère le mouvement de translation de la Terre autour du Soleil, et que l'on fait abstraction des perturbations dues à l'action des autres planètes, on trouve que le moyen mouvement m est lié au demi-grand axe ρ_0 par la formule

$$m^2\rho_0^3 = f(L + M),$$

M désignant comme précédemment la masse de la Terre. Cette formule doit subir une légère modification, parce que le moyen mouvement d'une planète dans l'ellipse qu'elle décrit est un peu différent par suite des perturbations de ce qu'il serait si la planète existait seule en présence du Soleil ; toutefois, dans la question qui nous occupe, il serait tout à fait inutile d'avoir égard à cette correction, et nous pourrons même négliger la masse de la Terre devant celle du Soleil, en sorte que nous prendrons simplement

$$fL = m^2\rho_0^3,$$

et l'on aura aussi, à cause de la formule (10),

$$fL' = \varepsilon m^2 \rho_0'^2.$$

Alors la valeur complète de V, résultant des actions combinées du Soleil et de la Lune, sera

$$(11)\qquad V = \frac{3m^2}{2}\left[(C-A)\left(\frac{\rho_0^2\xi_1^2}{\rho^3} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\xi_1'^2}{\rho'^3}\right) + (C-B)\left(\frac{\rho_0^2\eta_1^2}{\rho^3} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\eta_1'^2}{\rho'^3}\right)\right] + \partial V;$$

si l'on ne tient compte que de la différence d'aplatissement des deux hémisphères de la Terre, la valeur de ∂V sera

$$(12)\qquad \partial V = \frac{3m^2}{4}\mathfrak{E}\left[\left(\frac{2\rho_0^3\zeta_1}{\rho^4} - \frac{5}{3}\frac{2\rho_0^3\zeta_1^3}{\rho^4}\right) + \varepsilon\left(\frac{2\rho_0'^3\zeta_1}{\rho'^4} - \frac{5}{3}\frac{2\rho_0^3\zeta_1'^3}{\rho'^4}\right)\right],$$

et il faudrait ajouter au second membre de cette formule deux termes analogues en ξ et η, si l'on voulait avoir égard ici à la non-symétrie de la Terre autour de son axe.

Pour se faire une idée de la grandeur de la fonction perturbatrice, il faut la comparer à la force vive $2T$ que possède la Terre. Nous avons vu, dans la section I, que cette force vive est

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

on a d'ailleurs

$$r^2 = o^2 - p^2 - q^2,$$

et, par suite,

$$2T = Co^2 - (C-A)p^2 - (C-B)q^2;$$

nous verrons dans la section suivante que les quantités p^2 et q^2 sont très-petites par rapport à o^2; les différences $C-A$ et $C-B$ sont d'ailleurs peu considérables relativement à C; enfin la quantité o est sensiblement constante et égale à la vitesse angulaire *apparente* n de rotation de la Terre. Il suit de là que l'on a, à fort peu près,

$$T = \frac{1}{2}Cn^2$$

et, par conséquent,

$$\frac{V}{T} = 3\left(\frac{m}{n}\right)^2\frac{C-A}{C}\left(\frac{\rho_0^2\xi_1^2}{\rho^3} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\xi_1'^2}{\rho'^3}\right) + 3\left(\frac{m}{n}\right)^2\frac{C-B}{C}\left(\frac{\rho_0^2\eta_1^2}{\rho^3} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\eta_1'^2}{\rho'^3}\right),$$

d'où il résulte que la fonction perturbatrice V est de l'ordre des quantités

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \frac{C-A}{C}, \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^2 \frac{C-B}{C},$$

c'est-à-dire *de l'ordre de l'aplatissement de la Terre, multiplié par le carré du rapport de ses vitesses angulaires de translation et de rotation*. Le produit de cette multiplication est à peu près $\frac{1}{306 \times 366 \times 366}$ ou 0,000 000 024.

13. Les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 et ξ'_1, η'_1, ζ'_1 qui figurent dans l'expression de la fonction perturbatrice, devront être remplacées par leurs valeurs en fonction des angles ψ, ω, φ et des coordonnées ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' qui se rapportent aux axes fixes. On a

$$(13)\quad \begin{cases} \xi_1 = a\xi + a'\eta + a''\zeta, \\ \eta_1 = b\xi + b'\eta + b''\zeta, \\ \zeta_1 = c\xi + c'\eta + c''\zeta, \end{cases} \qquad (14)\quad \begin{cases} \xi = a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1, \\ \eta = a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1, \\ \zeta = a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1, \end{cases}$$

a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' désignant ici les mêmes cosinus que dans la section I. Les équations (2) de la même section font connaître les valeurs de ces cosinus en fonction des angles ψ, ω, φ, et l'on a

$$(15)\quad \begin{cases} \xi_1 = \xi\,(\cos\omega\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi) + \eta\,(\cos\omega\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi) - \zeta\sin\omega\sin\varphi, \\ \eta_1 = \xi\,(\cos\omega\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) + \eta\,(\cos\omega\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) - \zeta\sin\omega\cos\varphi, \\ \zeta_1 = \xi\ \sin\omega\sin\psi + \eta\sin\omega\cos\psi + \zeta\cos\omega. \end{cases}$$

Il convient de remarquer que la coordonnée ζ_1 ne dépend pas de l'angle φ, et que si l'on pose

$$(16)\quad \begin{cases} y = (\xi\sin\psi + \eta\cos\psi)\cos\omega - \zeta\sin\omega, \\ x = (\xi\cos\psi - \eta\sin\psi), \end{cases}$$

on aura

$$(17)\quad \begin{cases} \xi_1 = y\sin\varphi + x\cos\varphi, \\ \eta_1 = y\cos\varphi - x\sin\varphi. \end{cases}$$

Si l'on différentie les équations (13) en considérant ξ, η, ζ comme des constantes, qu'on remplace ensuite ces coordonnées par leurs valeurs tirées des équations (14), il viendra, en ayant égard aux formules (8) et (11) de la section I,

$$(18)\quad \begin{cases} d\xi_1 = \eta_1\,(d\varphi - \cos\omega\, d\psi) - \zeta_1\,(\cos\varphi\sin\omega\, d\psi + \sin\varphi\, d\omega), \\ d\eta_1 = \zeta_1\,(\sin\varphi\sin\omega\, d\psi - \cos\varphi\, d\omega) - \xi_1\,(d\varphi - \cos\omega\, d\psi), \\ d\zeta_1 = \xi_1\,(\cos\varphi\sin\omega\, d\psi + \sin\varphi\, d\omega) - \eta_1\,(\sin\varphi\sin\omega\, d\psi - \cos\varphi\, d\omega). \end{cases}$$

Ces formules font connaître immédiatement les dérivées partielles des coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 et ξ'_1, η'_1, ζ'_1, relatives aux variables ψ, ω, φ.

14. Il nous reste à déterminer les moments P, Q, R, dont les valeurs s'expriment par les équations (26) de la section I au moyen des dérivées partielles de la fonction V. D'après ces équations, on a

$$R = \frac{dV}{d\varphi},$$

ou

$$R = \frac{dV}{d\xi_1}\frac{d\xi_1}{d\varphi} + \frac{dV}{d\eta_1}\frac{d\eta_1}{d\varphi} + \frac{dV}{d\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{d\varphi},$$

en n'écrivant, pour abréger, que les termes qui proviennent du Soleil. Or on a, par les équations (18),

$$\frac{d\xi_1}{d\varphi} = \eta_1, \qquad \frac{d\eta_1}{d\varphi} = -\xi_1, \qquad \frac{d\zeta_1}{d\varphi} = 0,$$

donc

$$R = \eta_1 \frac{dV}{d\xi_1} - \xi_1 \frac{dV}{d\eta_1}.$$

Les valeurs de P et de Q se déduiront de celle de R par de simples changements de lettres, en sorte que l'on aura, en tenant compte des actions du Soleil et de la Lune,

$$(19)\quad \begin{cases} P = \left(\zeta_1 \dfrac{dV}{d\eta_1} - \eta_1 \dfrac{dV}{d\zeta_1}\right) + \left(\zeta'_1 \dfrac{dV}{d\eta'_1} - \eta'_1 \dfrac{dV}{d\zeta'_1}\right), \\ Q = \left(\xi_1 \dfrac{dV}{d\zeta_1} - \zeta_1 \dfrac{dV}{d\xi_1}\right) + \left(\xi'_1 \dfrac{dV}{d\zeta'_1} - \zeta'_1 \dfrac{dV}{d\xi'_1}\right), \\ R = \left(\eta_1 \dfrac{dV}{d\xi_1} - \xi_1 \dfrac{dV}{d\eta_1}\right) + \left(\eta'_1 \dfrac{dV}{d\xi'_1} - \xi'_1 \dfrac{dV}{d\eta'_1}\right). \end{cases}$$

Ces équations (19) deviennent, en remplaçant les dérivées partielles de V par leurs valeurs tirées de la formule (11),

$$(20)\quad \begin{cases} P = 3m^2(C-B)\left(\dfrac{\rho_0^2\eta_1\zeta_1}{\rho^5} + \varepsilon\dfrac{\rho'^2_0\eta'_1\zeta'_1}{\rho'^5}\right) + \partial P, \\ Q = -3m^2(C-A)\left(\dfrac{\rho_0^2\zeta_1\xi}{\rho^5} + \varepsilon\dfrac{\rho'^2_0\zeta'_1\xi'_1}{\rho'^5}\right) + \partial Q, \\ R = 3m^2(B-A)\left(\dfrac{\rho_0^2\xi_1\eta_1}{\rho^5} + \varepsilon\dfrac{\rho'^2_0\xi'_1\eta'_1}{\rho'^5}\right) + \partial R. \end{cases}$$

nous désignons ici par ∂P, ∂Q, ∂R les parties des moments P, Q, R qui proviennent de la partie ∂V de la fonction perturbatrice; en se bornant aux seuls termes de la formule (12), qui sont de beaucoup les plus considérables, on aura

par les équations (19)

$$
(21)\quad \begin{cases}
\partial P = -\dfrac{3m^2}{4}\mathcal{E}\left[\left(\dfrac{\iota\rho_0^2\eta_1}{\rho^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0^2\eta_1\zeta_1^2}{\rho^7}\right) + \varepsilon\left(\dfrac{\iota\rho_0'^2\eta_1'}{\rho'^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0'^2\eta_1'\zeta_1'^2}{\rho'^7}\right)\right],\\[2ex]
\partial Q = \dfrac{3m^2}{4}\mathcal{E}\left[\left(\dfrac{\iota\rho_0^2\xi_1}{\rho^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0^2\xi_1\zeta_1^2}{\rho^7}\right) + \varepsilon\left(\dfrac{\iota\rho_0'^2\xi_1'}{\rho'^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0'^2\xi_1'\zeta_1'^2}{\rho'^7}\right)\right],\\[2ex]
\partial R = 0.
\end{cases}
$$

Enfin, si l'on veut avoir égard à la partie de ∂V qui provient de la non-symétrie de la Terre, il faudra ajouter de nouveaux termes qui peuvent se déduire immédiatement de ceux que nous venons d'écrire par une permutation de lettres ; ainsi les parties de ∂P, ∂Q, ∂R qui contiennent le facteur $\mathcal{A}$ seront

$$
(22)\quad \begin{cases}
\partial P = 0,\\[1ex]
\partial Q = -\dfrac{3m^2}{4}\mathcal{A}\left[\left(\dfrac{\iota\rho_0^2\zeta_1}{\rho^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0^2\zeta_1\xi_1^2}{\rho^7}\right) + \varepsilon\left(\dfrac{\iota\rho_0'^2\zeta_1'}{\rho'^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0'^2\zeta_1'\xi_1'^2}{\rho'^7}\right)\right],\\[2ex]
\partial R = \dfrac{3m^2}{4}\mathcal{A}\left[\left(\dfrac{\iota\rho_0^2\eta_1}{\rho^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0^2\eta_1\xi_1^2}{\rho^7}\right) + \varepsilon\left(\dfrac{\iota\rho_0'^2\eta_1'}{\rho'^5} - 5\dfrac{\iota\rho_0'^2\eta_1'\xi_1'^2}{\rho'^7}\right)\right].
\end{cases}
$$

On voit, par ces formules, que la quantité ∂R est nulle si l'on se borne à la valeur de ∂V donnée par la formule (11); en d'autres termes, la partie ∂R de R ne peut provenir que de la non-symétrie de la Terre autour de son axe; au contraire les valeurs de ∂P et de ∂Q dépendent en partie de la différence d'aplatissement des deux hémisphères.

Nous aurons besoin dans la suite de connaître les dérivées partielles des moments P, Q, R, par rapport aux variables ψ, ω, φ. Si l'on pose, pour abréger,

$$
(23)\quad \begin{cases}
P' = 3m^2(C-B)\left[\dfrac{\rho_0^2(\eta_1^2-\zeta_1^2)}{\rho^5} + \varepsilon\dfrac{\rho_0'^2(\eta_1'^2-\zeta_1'^2)}{\rho'^5}\right],\\[2ex]
Q' = -3m^2(C-A)\left[\dfrac{\rho_0^2(\zeta_1^2-\xi_1^2)}{\rho^5} + \varepsilon\dfrac{\rho_0'^2(\zeta_1'^2-\xi_1'^2)}{\rho'^5}\right],\\[2ex]
R' = 3m^2(B-A)\left[\dfrac{\rho_0^2(\xi_1^2-\eta_1^2)}{\rho^5} + \varepsilon\dfrac{\rho_0'^2(\xi_1'^2-\eta_1'^2)}{\rho'^5}\right],
\end{cases}
$$

et que l'on différentie les équations (20), en négligeant les parties ∂P, ∂Q, ∂R des seconds membres, on aura, à cause des équations (18), les valeurs suivantes des différentielles totales dP, dQ, dR,

$$
(24)\quad \begin{cases}
dP = -P'(\sin\varphi\sin\omega\, d\psi - \cos\varphi\, d\omega) + \dfrac{C-B}{C-A}Q(d\varphi - \cos\omega\, d\psi) + \dfrac{C-B}{B-A}R(\cos\varphi\sin\omega\, d\psi + \sin\varphi\, d\omega),\\[2ex]
dQ = -Q'(\cos\varphi\sin\omega\, d\psi + \sin\varphi\, d\omega) - \dfrac{C-A}{C-B}P(d\varphi - \cos\omega\, d\psi) + \dfrac{C-A}{B-A}R(\sin\varphi\sin\omega\, d\psi - \cos\varphi\, d\omega),\\[2ex]
dR = -R'(d\varphi - \cos\omega\, d\psi) - \dfrac{B-A}{C-B}P(\cos\varphi\sin\omega\, d\psi + \sin\varphi\, d\omega) - \dfrac{B-A}{C-A}Q(\sin\varphi\sin\omega\, d\psi - \cos\varphi\, d\omega).
\end{cases}
$$

SECTION III.

De l'axe instantané et de la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

15. Après avoir formé les équations générales du mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, nous avons considéré le cas particulier de la Terre soumise aux attractions du Soleil et de la Lune et nous avons évalué les moments des forces qui résultent de ces attractions. Il nous reste maintenant à intégrer les équations différentielles que nous avons obtenues et à développer les conséquences de notre analyse. Nous nous occuperons surtout dans cette section de l'axe instantané de rotation de la Terre et de la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe; nous étudierons ensuite dans les sections suivantes le mouvement des axes principaux d'inertie dans l'espace absolu.

Si l'on porte dans les équations (23) de la section I les valeurs des moments P, Q, R, tirées des équations (20) de la section II, il vient, en faisant abstraction des moments δP, δQ, δR qui proviennent de la partie δV de la fonction perturbatrice,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{C-B}{A}qr + 3m^2\frac{C-B}{A}\left(\frac{\rho_0^2\eta_1\zeta_1}{\rho^5} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\eta_1'\zeta_1'}{\rho'^5}\right),\\ \frac{dq}{dt} &= +\frac{C-A}{B}rp - 3m^2\frac{C-A}{B}\left(\frac{\rho_0^2\zeta_1\xi_1}{\rho^5} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\zeta_1'\xi_1'}{\rho'^5}\right),\\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{B-A}{C}pq + 3m^2\frac{B-A}{C}\left(\frac{\rho_0^2\xi_1\eta_1}{\rho^5} + \varepsilon\frac{\rho_0'^2\xi_1'\eta_1'}{\rho'^5}\right); \end{aligned}\right.$$

les équations qui lient les angles ψ, ω, φ aux variables p, q, r, ont été données dans la section I; ces équations, qu'il est utile de reproduire ici, sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= q\sin\varphi - p\cos\varphi,\\ \sin\omega\frac{d\psi}{dt} &= q\cos\varphi + p\sin\varphi,\\ \frac{d\varphi}{dt} &= r + \cos\omega\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces deux systèmes (1) et (2) comprennent les équations différentielles du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. On voit que si l'on néglige la petite partie δV de la fonction perturbatrice, la constitution physique du globe n'intervient que par les seuls rapports de deux des moments d'inertie A, B, C, au troisième; en sorte que rien ne serait changé dans le mouvement, si la distri-

bution de la matière à l'intérieur de la Terre venait à éprouver une modification quelconque qui n'altérât pas les grandeurs relatives de ces moments.

L'intégration rigoureuse des équations différentielles (1) et (2) surpasse les forces de l'analyse, mais cette intégration peut être effectuée par les méthodes d'approximation en profitant des circonstances favorables que présente le problème dont nous nous occupons et qui résultent d'une part de l'extrême petitesse de la fonction des forces perturbatrices qui agissent sur la Terre, relativement à la force vive qu'elle possède, et d'autre part de la presque invariabilité à l'époque actuelle, de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes principaux d'inertie.

Le fait de la petitesse des actions perturbatrices nous permettra de prendre pour point de départ de la solution que nous nous proposons de développer, les formules qui se rapportent au mouvement de rotation d'un corps autour de son centre de gravité, dans le cas où ce corps n'est sollicité par aucune force extérieure. Lorsque ensuite nous aurons égard aux forces qui agissent sur la Terre, comme ces forces n'introduiront dans nos équations différentielles que des termes insensibles par eux-mêmes, nous pourrons négliger tous ceux qui ne seraient pas susceptibles de croître par l'intégration.

La presque immobilité de l'axe instantané de rotation à l'intérieur de la Terre, ou, ce qui revient au même, la permanence des pôles à la surface, est la conséquence immédiate de l'invariabilité des latitudes géographiques des divers lieux du globe et nous pouvons admettre que les déplacements de ces pôles sont actuellement très-petits, puisque les observations n'ont pu jusqu'ici les rendre sensibles. Il y a plus : l'axe instantané *vrai* et mobile de la Terre coïncidant sensiblement dans toutes ses positions avec un certain axe de rotation *apparent* et fixe, la vitesse angulaire que nous avons jusqu'ici désignée par o, est, à très-peu près, égale à la vitesse angulaire *apparente* de rotation, vitesse que nous pouvons mesurer; celle-ci nous paraissant constante, d'après nos instruments les plus précis, nous devons conclure que la vitesse angulaire o est elle-même sensiblement constante. Ces renseignements que nous fournit l'observation nous seront d'un grand secours pour la direction de nos approximations; nous pouvons effectivement en conclure que les variables p et q sont très-petites par rapport à r, ou, si l'on veut, par rapport à la vitesse angulaire o, mais c'est là un point essentiel qu'il importe d'établir en toute rigueur, ce que nous ferons après avoir rappelé la loi des déplacements de l'axe instantané dans le cas d'un corps libre de toute action étrangère.

16. Si l'on supprime les termes multipliés par m, les équations (1) deviennent

$$(3) \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{C-B}{A}qr, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}rp, \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{B-A}{C}pq,$$

et elles s'appliquent alors au mouvement de rotation d'un corps libre autour de son centre de gravité ou autour d'un point fixe quelconque. D'ailleurs si l'on continue de désigner par T la demi-somme des forces vives de tous les éléments du corps et par G le moment résultant des quantités de mouvement dont ces différents éléments sont animés, on aura, ainsi que cela a été établi dans la Section I,

$$(4)\qquad \begin{cases} A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2 = 2\,T, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2; \end{cases}$$

les quantités T et G sont ici constantes d'après les principes des forces vives et des aires, en sorte que les équations (4) constituent deux intégrales du système (3), si l'on y considère T et G comme deux constantes arbitraires. Il convient, au surplus, de remarquer que ces équations (4) peuvent s'obtenir immédiatement en intégrant celles que l'on obtient quand on ajoute les équations (3) après les avoir multipliées respectivement, d'abord par Ap, Bq, Cr, puis par A^2p, B^2q, C^2r.

Il est évident, d'après les équations (3), que si les trois moments d'inertie A, B, C sont égaux, le mouvement du corps a lieu constamment autour d'un même axe, lequel est nécessairement un axe principal à cause de l'égalité $A = B = C$.

Si deux moments d'inertie seulement sont égaux, le second membre de l'une des équations (3) est nul et l'une des composantes p, q, r, est constante, mais alors la somme des carrés des deux autres composantes est aussi constante, d'après les équations (4), et il en est par conséquent de même de la vitesse angulaire o. On voit que, dans ce cas, l'axe instantané décrit un cône de révolution autour de l'un des axes principaux.

Considérons maintenant le cas général où les trois moments A, B, C sont inégaux, cas qui comprend évidemment le précédent. Si l'on élimine successivement chacune des variables p^2, q^2, r^2 entre les deux équations (4), il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = G^2 - 2\,AT, \\ C(C-B)r^2 - A(B-A)p^2 = G^2 - 2\,BT, \\ A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = 2\,CT - G^2. \end{cases}$$

Comme nous avons toujours supposé $A < B < C$, on voit par ces équations que les deux quantités $G^2 - 2\,AT$ et $2\,CT - G^2$ doivent être positives, mais $G^2 - 2\,BT$ peut être positive ou négative. Afin de comprendre les deux cas dans une seule et même analyse, je conviendrai ici, à l'exemple de Jacobi (*), que A désignera le plus petit ou le plus grand moment, suivant que $G^2 - 2\,BT$ sera positive ou négative; B sera toujours le moment moyen. D'après cette hypothèse, les six dif-

(*) *Mémoire sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*. Journal de Crelle, t. XXXIX.

férences

$$C-A,\quad C-B,\quad B-A,\quad G^2-2AT,\quad G^2-2BT,\quad 2CT-G^2,$$

seront de même signe et si l'on pose, pour abréger,

$$(6)\quad \begin{cases} p'^2=\dfrac{2CT-G^2}{A(C-A)},\quad q'^2=\dfrac{2CT-G^2}{B(C-B)},\quad r_0^2=\dfrac{G^2-2BT}{C(C-B)},\quad r'^2=\dfrac{G^2-2AT}{C(C-A)},\\ k=\sqrt{1-\dfrac{r_0^2}{r'^2}}=\sqrt{\dfrac{(B-A)(2CT-G^2)}{(C-B)(G^2-2AT)}},\quad k'=\dfrac{r_0}{r'}=\sqrt{\dfrac{(C-A)(G^2-2BT)}{(C-B)(G^2-2AT)}},\end{cases}$$

les équations (5) deviendront

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{r^2}{r'^2}+k^2\dfrac{q^2}{q'^2}=1,\\ \dfrac{r^2}{r_0^2}-\dfrac{k^2}{k'^2}\dfrac{p^2}{p'^2}=1,\\ \dfrac{p^2}{p'^2}+\dfrac{q^2}{q'^2}=1.\end{cases}$$

La dernière des équations (7) montre que $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$ peuvent être représentés par le cosinus et par le sinus d'un même angle χ; on voit ensuite par la première équation que r^2 ne pourra jamais s'annuler, et que cette quantité demeurera toujours comprise entre $(1-k^2)r'^2$ ou r_0^2 et r'^2. Il résulte de là que r conservera toujours le même signe et il est évident qu'on est libre de choisir ce signe à volonté, puisque rien n'indique quelle est celle des deux directions de l'axe du moment C qui est prise pour la direction de l'axe OZ_1; nous conviendrons que r aura le signe + si A est le plus petit moment, et le signe − dans le cas contraire. D'après cela les trois variables p, q, r s'exprimeront en fonction de la nouvelle variable χ, par les formules suivantes

$$(8)\qquad p=p'\cos\chi,\quad q=q'\sin\chi,\quad r=r'\sqrt{1-k^2\sin^2\chi},$$

où p' et q' désignent les racines positives des quantités p'^2 et q'^2, données par les formules (6); quant à r', son signe est fixé, comme celui de r, d'après ce qui précède, en sorte que le radical $\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}$ doit toujours être pris positivement. Si maintenant on porte les valeurs précédentes de p et de q dans l'une des deux premières équations (3), dans la première par exemple, il vient

$$(9)\qquad d\chi=\frac{C-B}{A}\,\frac{q'}{p'}\,r\,dt;$$

le second membre de cette formule étant positif, puisque C − B et r sont de même signe, on voit que χ est une fonction croissante du temps; on a d'ailleurs

$\chi = \infty$ pour $t = \infty$, comme le montre la formule (9) qui donne

$$d\chi > \frac{C - B}{A} \frac{q'}{p'} r_0 dt.$$

Il est démontré par là que les variables p, q, r prennent toutes les valeurs comprises entre les limites respectives $-p'$ et $+p'$, $-q'$ et $+q'$, r_0 et r'; par suite, l'axe instantané décrit un cône autour de l'axe de moment C, en se mouvant toujours dans le même sens; il est facile de voir que ce cône est du second degré, et que ses axes principaux coïncident respectivement avec ceux des moments A, B, C. Si dans la formule (9) on remplace r par sa valeur tirée de l'équation (8) et que l'on fasse, pour abréger,

$$(10) \qquad \nu = \pm \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}},$$

le signe ambigu $\pm$ exprimant qu'il faut donner au radical le signe de r ou de r', on aura

$$(11) \qquad \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = \nu r' dt,$$

et enfin, si l'on pose conformément aux notations adoptées dans la théorie des fonctions elliptiques,

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi} = \Delta\chi, \quad \int_0^\chi \frac{d\chi}{\Delta\chi} = u, \quad \chi = am u,$$

l'intégrale de l'équation (11) sera

$$\chi = am(\nu r' t + f),$$

f étant la constante arbitraire. Les valeurs de p, q, r deviennent alors

$$(12) \quad p = p' \cos am(\nu r' t + f), \quad q = q' \sin am(\nu r' t + f), \quad r = r' \Delta am(\nu r' t + f),$$

et elles renferment dans leurs expressions les trois constantes arbitraires T, G, f. Il résulte des propriétés connues des fonctions elliptiques que ces valeurs de p, q, r, sont des fonctions périodiques du temps; mais la période devient infinie dans le cas particulier où $G^2 - 2BT$ est nul, et où l'on a, par suite, $r_0 = 0$ et $k = 1$. Ce cas, que nous avons exclu de notre analyse, se trouve cependant compris dans nos formules comme un cas limite. La formule (11) donne alors

$$\frac{d\chi}{\cos\chi} = \nu r' dt, \quad \text{d'où} \quad \cos\chi = \frac{2}{e^{\nu r' t + f} + e^{-\nu r' t - f}},$$

et on a ensuite, par les équations (8),

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'} = \frac{2}{e^{\nu r' t + f} + e^{-\nu r' t - f}}, \quad \frac{q}{q'} = \frac{e^{\nu r' t + f} - e^{-\nu r' t - f}}{e^{\nu r' t + f} + e^{-\nu r' t - f}},$$

formules où il est évidemment permis de prendre positivement les quantités p', q', r'. On voit que le maximum de p est p', et que celui de r est r'; p et r atteignent leurs valeurs maxima pour $t = -\frac{f}{\nu r'}$, elles conservent toujours le même signe et elles ne s'annulent que pour $t = \infty$; quand t croît ou décroît à partir de la valeur $-\frac{f}{\nu r'}$, p et r décroissent constamment. Au contraire q s'annule pour $t = -\frac{f}{\nu r'}$, elle croît quand t augmente à partir de cette valeur et elle n'atteint sa limite supérieure $+q'$ que pour $t = +\infty$; de même q décroît à partir de zéro quand on fait décroître t à partir de la valeur $-\frac{f}{\nu r'}$, et elle n'atteint sa limite inférieure $-q'$ que pour $t = -\infty$.

En résumé, dans le cas où $G^2 - 2BT$ est nulle, une seule des quantités p, q, r, change de signe, tandis que si $G^2 - 2BT$ est différente de zéro, une seule de ces quantités peut conserver le même signe. Il faut aussi remarquer que dans le cas particulier l'axe instantané tend à se rapprocher indéfiniment de l'axe du moment moyen B.

17. Revenons au cas général et supposons que les déplacements de l'axe instantané de rotation soient très-petits. D'après l'analyse qui précède, cette circonstance ne peut avoir lieu que si p' et q' sont très-petites relativement à r' et r_0, auquel cas l'axe instantané s'écarte très-peu de l'axe OZ, qui est celui du plus petit ou du plus grand moment d'inertie; la première hypothèse ne présentant aucun intérêt pour l'objet que nous avons en vue, nous admettrons que C soit le plus grand moment conformément à nos premières conventions Nous poserons

$$\sigma = \sqrt{\frac{2CT - G^2}{(C-A)(C-B)}},$$

nous écrirons n au lieu de r' et nous emploierons σ et n comme constantes arbitraires à la place de T et G; en outre, comme C désigne ici le plus grand moment d'inertie, on aura, par la formule (10),

$$\nu = +\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}; \tag{13}$$

d'après ces notations nouvelles on a

$$p' = \sigma\sqrt{\frac{C-B}{A}}, \quad q' = \sigma\sqrt{\frac{C-A}{B}}, \quad k^2 = \frac{B-A}{C}\,\frac{\sigma^2}{n^2},$$

et les équations (8) et (9) deviennent

$$p = \sqrt{\frac{C-B}{A}}\,\sigma\cos\chi,\quad q = \sqrt{\frac{C-A}{B}}\,\sigma\sin\chi,\quad r = n\sqrt{1 - \frac{B-A}{C}\frac{\sigma^2}{n^2}\sin^2\chi}.$$

$$d\chi = \nu r dt,$$

d'où

$$\chi = \int_0^t \nu r dt + f,$$

f désignant une constante.

Cela posé, la constante σ est très-petite relativement à n, d'après notre hypothèse; on pourra donc, au moyen des formules précédentes, calculer les valeurs de r et de χ, avec une approximation aussi grande que l'on voudra, et exprimer ces valeurs en fonction du temps par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de σ. Mais nous n'entreprendrons point ici ce développement qui nous serait inutile et nous négligerons tout de suite le carré de σ; à ce degré d'approximation, on a

$$r = n,\quad \chi = \nu n t + f.$$

Si l'on fait en outre

$$\sigma\cos f = g,\quad \sigma\sin f = h,$$

g et h désignant de nouvelles arbitraires, il vient

$$p = \sqrt{\frac{C-B}{A}}\,(g\cos\nu nt - h\sin\nu nt),\quad q = \sqrt{\frac{C-A}{B}}\,(g\sin\nu nt + h\cos\nu nt),\quad r = n,$$

formules qui représentent les intégrales approchées des équations (3), quand on suppose les constantes arbitraires g et h très-petites relativement à n et que l'on néglige en conséquence les carrés et le produit de ces quantités. Il sera utile de faire subir une légère modification aux formules qui précèdent; nous désignerons par une seule lettre, θ, le produit nt, qui est égal à l'intégrale $\int_0^t n dt$, et nous écrirons

$$(14)\qquad p = \sqrt{\frac{C-B}{A}}\,(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta),\quad q = \sqrt{\frac{C-A}{B}}\,(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta),\quad r = n,$$

et

$$(15)\qquad \theta = \int_0^t n dt,\quad \frac{d\theta}{dt} = n.$$

Il convient de remarquer que les valeurs de p et q données par les équations (14) sont exactes aux termes près du troisième ordre en g et h. Si donc on voulait

tenir compte des termes du deuxième ordre la valeur de r serait seule modifiée et elle deviendrait

$$(16) \qquad r = n - \frac{B-A}{4C}\frac{g^2+h^2}{n} + \frac{B-A}{4C}\frac{g^2-h^2}{n}\cos 2\nu\theta - \frac{B-A}{2C}\frac{gh}{n}\sin 2\nu\theta,$$

comme on peut s'en assurer par les formules qui précèdent. Au surplus les développements en séries dont nous venons de calculer les premiers termes peuvent être tirés des équations (12) par les propriétés connues des fonctions elliptiques; on reconnaît facilement que ces séries procèdent suivant les cosinus et les sinus des multiples de l'angle $\nu\theta$.

Il est aisé maintenant de calculer les valeurs des angles ω, ψ, φ, au même degré d'approximation que les quantités p, q, r. Lorsque l'on néglige complètement les quantités g et h, les équations (2) donnent

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = n;$$

d'où l'on tire, en désignant par ω_0, ψ_0, φ_0 des constantes arbitraires,

$$\omega = \omega_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \varphi = nt + \varphi_0 = \theta + \varphi_0;$$

il résulte de là que si l'on n'a égard qu'aux termes du premier ordre en g et h, les équations (2) pourront s'écrire comme il suit

$$\frac{d\omega}{dt} = q\sin(\theta+\varphi_0) - p\cos(\theta+\varphi_0),$$
$$\sin\omega_0\frac{d\psi}{dt} = q\cos(\theta+\varphi_0) + p\sin(\theta+\varphi_0),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\omega_0\frac{d\psi}{dt},$$

ou, en remplaçant p, q et n par leurs valeurs tirées des formules (14) et (15),

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = \sqrt{\dfrac{C-A}{B}}(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta)\sin(\theta+\varphi_0) \\ \qquad\quad - \sqrt{\dfrac{C-B}{A}}(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta)\cos(\theta+\varphi_0), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{1}{\sin\omega_0}\sqrt{\dfrac{C-A}{B}}(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta)\cos(\theta+\varphi_0) \\ \qquad\quad + \dfrac{1}{\sin\omega_0}\sqrt{\dfrac{C-B}{A}}(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta)\sin(\theta+\varphi_0), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} + \cos\omega_0\dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Comme on a $\theta = nt$, et que n est constante, on peut intégrer immédiatement les équations (17) et l'on obtient ainsi les valeurs suivantes de ω, ψ, φ :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \omega &= \omega_0 - \frac{1}{n}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}\,(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta)\cos(\theta+\varphi_0) \\ &\quad - \frac{1}{n}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}\,(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta)\sin(\theta+\varphi_0); \\ \psi &= \psi_0 + \frac{1}{n\sin\omega_0}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}\,(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta)\sin(\theta+\varphi_0) \\ &\quad - \frac{1}{n\sin\omega_0}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}\,(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta)\cos(\theta+\varphi_0). \\ \varphi &= \varphi_0 + \theta + (\psi - \psi_0)\cos\omega_0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (18), jointes aux équations (14), déterminent les six inconnues p, q, r, ω, ψ, φ avec le degré d'approximation auquel nous sommes convenus de nous arrêter. Ces équations qui renferment les six arbitraires g, h, n, ω_0, ψ_0, φ_0, vont nous servir de point de départ dans notre étude du mouvement de rotation de la Terre.

18. Il résulte de l'analyse précédente que dans le mouvement de rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force, l'axe instantané ne peut être sensiblement immobile dans le corps que si cet axe s'écarte très-peu de l'un des axes principaux d'inertie relatifs au centre de rotation. Des considérations plus ou moins exactes ont été employées pour établir que la même chose doit avoir lieu dans le cas de la Terre soumise aux attractions du Soleil et de la Lune; nous ne reproduirons pas ici ces considérations et nous démontrerons rigoureusement que le seul fait de la petitesse de la fonction perturbatrice exige de toute nécessité que l'axe instantané de rotation de la Terre soit très-voisin de l'un des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité, lorsque l'on admet, conformément à l'observation, que les déplacements de cet axe sont actuellement insensibles, et que la vitesse angulaire de rotation est sensiblement constante.

Remarquons d'abord que chacune des dérivées $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, doit changer de signe ou au moins s'annuler, car si $\frac{dp}{dt}$, par exemple, ne devenait jamais nulle, on aurait constamment $\frac{dp}{dt} > k$ ou $\frac{dp}{dt} < -k$, k désignant une constante positive déterminée, et alors, en représentant par p_0 la valeur de p, qui correspond à $t = t_0$, on aurait, dans le premier cas, $p - p_0 > k(t - t_0)$, et, dans le second, $p_0 - p > k(t - t_0)$; par conséquent les variations de p seraient indéfinies, ce qui est incompatible avec

notre hypothèse, d'après laquelle l'axe instantané et la vitesse angulaire de rotation sont sensiblement invariables. Cela posé, la presque immobilité de l'axe instantané ne permet pas que les cosinus $\frac{p}{o}$, $\frac{q}{o}$, $\frac{r}{o}$, changent de signe, à moins que ces cosinus ne soient très-petits. Supposons donc que l'axe instantané soit assez éloigné des axes principaux pour que p, q, r doivent conserver constamment les mêmes signes; on peut admettre alors que ces signes sont positifs, puisque rien n'indique quelle est la partie positive des axes principaux. Les premiers membres des équations (1) devant changer de signe, ou au moins s'annuler, tandis que les termes des seconds membres qui sont indépendants des forces conservent non-seulement les mêmes signes, mais encore sensiblement les mêmes valeurs absolues, il faut nécessairement que les termes qui proviennent des forces puissent détruire les premiers aux époques de leurs maxima ou de leurs minima. Mais le maximum des facteurs entre parenthèses, dans les seconds membres des équations (1), ne peut évidemment dépasser $1+\varepsilon$ ou 3 environ; donc il faut qu'à de certaines époques les produits qr, rp, pq soient inférieurs à $9m^2$, et j'ajoute que cette circonstance doit avoir lieu constamment, parce que p, q, r sont sensiblement constantes. Si l'on désigne par α, β, γ les angles que forme l'axe instantané avec les axes principaux, on a

$$p = o\cos\alpha,\quad q = o\cos\beta,\quad r = o\cos\gamma,$$

et, par conséquent, nous pouvons écrire

$$\cos^2\beta\cos^2\gamma < \left(\frac{3m}{o}\right)^4,\quad \cos^2\alpha\cos^2\gamma < \left(\frac{3m}{o}\right)^4;$$

en ajoutant ces deux inégalités, il vient

$$\frac{1}{4}\sin^2 2\gamma < 2\left(\frac{3m}{o}\right)^4,\quad \frac{1}{2}\sin 2\gamma < \sqrt{2}\left(\frac{3m}{o}\right)^2;$$

comme le rapport $\frac{3m}{o}$ est à peu près égal à $\frac{1}{122}$, on voit que l'un des angles γ et $90^\circ - \gamma$ est très-petit; on peut en dire autant de l'un des angles α et $90^\circ - \alpha$, β et $90^\circ - \beta$; d'ailleurs les angles $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$, $90^\circ - \gamma$ ne peuvent être tous trois très-petits, à cause de la relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, donc l'un des angles α, β, γ est très-petit; supposons que ce soit γ, la formule précédente donnera

$$\gamma < \sqrt{2}\left(\frac{3m}{o}\right)^2 \frac{1}{\sin 1''} \quad \text{ou} \quad \gamma < \frac{1}{14884\sin 45^\circ \sin 1''},$$

on trouve, en faisant le calcul, que le second membre de cette inégalité est égal à 19",6; par conséquent l'angle que l'axe instantané forme, avec l'axe du moment C, est nécessairement inférieur à 20 secondes.

Nous avons supposé que p, q, r étaient assez grandes pour que leur changement de signe fût incompatible avec nos hypothèses; si l'une de ces quantités, par exemple, peut changer de signe, mais que q et r conservent leurs signes, on aura toujours

$$q^2 r^2 < (3m)^4 \quad \text{ou} \quad \cos^2\alpha \cos^2\gamma < \left(\frac{3m}{o}\right)^4;$$

mais p ne peut changer de signe qu'à la condition d'être très-petit, par conséquent on peut substituer p à q dans la formule précédente, et écrire

$$p^2 r^2 < (3m)^4 \quad \text{ou} \quad \cos^2\alpha \cos^2\gamma < \left(\frac{3m}{o}\right)^4,$$

en sorte qu'on arrive aux mêmes conclusions que précédemment.

Enfin si deux des quantités p, q, r sont assez petites pour que leur changement de signe soit admissible, l'axe instantané ne peut qu'osciller autour de l'un des axes principaux; on verra bientôt que ce cas est celui de la nature.

Nous pouvons conclure de là que, vu l'extrême petitesse des forces perturbatrices, les pôles de la Terre ne peuvent être sensiblement immobiles, comme on l'observe, que si l'axe instantané de rotation est voisin de l'un des axes principaux; et, comme les observations du pendule s'accordent avec les mesures géodésiques pour nous montrer que la Terre est aplatie aux pôles, il est certain que cet axe principal ne peut être que celui du plus grand moment d'inertie C. Ce qui précède, hâtons-nous de le dire, ne peut donner qu'une faible idée du degré de petitesse de l'angle que forme l'axe instantané avec l'axe du moment C; mais cela suffit pour légitimer la marche que nous allons suivre.

19. Revenons maintenant à l'intégration des équations (1) et (2). Si les forces qui agissent sur la Terre venaient à être anéanties, l'axe instantané de rotation qui s'écarte actuellement très-peu de l'axe du moment C exécuterait autour de celui-ci des oscillations d'une faible amplitude, ainsi que cela résulte de l'analyse développée plus haut; les premières considérations que nous venons de présenter suffisent donc pour établir que les forces perturbatrices ne peuvent apporter, au moins actuellement, que de légères modifications dans la situation de l'axe instantané. Il résulte de là que l'on peut employer, pour représenter les valeurs des variables p, q, r, ω, ψ, φ, les séries dont nous avons calculé les premiers termes au n° **17**, pourvu que l'on ajoute aux constantes g, h, n, ω_0, ψ_0, φ_0, des varia-

tions très-petites δg, δh, δn, $\delta\omega_0$, $\delta\psi_0$, $\delta\varphi_0$, qui s'évanouiraient avec les forces perturbatrices et qui sont en conséquence de l'ordre de ces forces; cela revient évidemment à regarder g, h, n, ω_0, ψ_0, φ_0, comme de nouvelles variables que l'on substituera à $p, q, r, \omega, \psi, \varphi$.

Considérant donc g, h et n comme des variables, nous tirerons des équations (14) et (16) les valeurs de p, q, r, et de leurs dérivées, pour les porter dans les équations (1), et nous remettrons dans celles-ci les lettres P, Q, R, à la place des expressions des moments des forces; en opérant ainsi et en ayant égard à l'équation (15) on trouve sans difficulté

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{P}{\sqrt{A(C-B)}}\cos \nu\vartheta + \dfrac{Q}{\sqrt{B(C-A)}}\sin \nu\vartheta, \\ \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{P}{\sqrt{A(C-B)}}\sin \nu\vartheta + \dfrac{Q}{\sqrt{B(C-A)}}\cos \nu\vartheta, \\ \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{1}{C}R + \dfrac{1}{nC}\dfrac{B-A}{\sqrt{B(C-A)}}Q(g\sin \nu\vartheta + h\cos \nu\vartheta). \end{cases}$$

Les valeurs de p, q, r, données par les équations (14) et (16) sont exactes, aux termes près du troisième ordre en g et h; il s'ensuit que les termes omis dans les formules (19) sont d'un degré supérieur au premier par rapport aux quantités g et h; ces termes sont d'ailleurs de l'ordre des forces perturbatrices, comme ceux que nous avons conservés. Il faut remarquer que la dernière des équations (19) peut être obtenue sans recourir à la formule (16); on a effectivement, par les équations du n° **17**,

$$n^2 = r^2 + \frac{B(B-A)}{C(C-A)}q^2;$$

si l'on différentie cette équation dans l'hypothèse de n variable, et que l'on remplace ensuite les dérivées $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ par leurs valeurs, tirées des équations (1), on trouvera

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{C}\,\frac{r}{n}R + \frac{1}{C}\,\frac{B-A}{C-A}\,\frac{q}{n}Q;$$

au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, il faut prendre ici les valeurs de q et de r données par les équations (14) et on obtient alors la troisième équation du système (19).

Si l'on néglige le carré de la fonction perturbatrice, ce qui est permis, on devra

supprimer, dans les seconds membres des équations (19), les variations δg, δh, δn, $\delta\omega_0$, $\delta\psi_0$, $\delta\varphi_0$; cela revient à prendre pour ω, ψ, φ les valeurs fournies par les équations (18), dans lesquelles on considérera les quantités g, h, n, ω_0, ψ_0, φ_0 comme des constantes. Les seconds membres des formules (19) sont développables en séries de sinus et de cosinus des multiples du temps; les termes de ces séries divisés par n^2, pour l'homogénéité, sont tous de l'ordre des forces perturbatrices, et par conséquent insensibles par eux-mêmes; on devra donc rejeter tous ceux dont la période ne serait pas très-petite et ne conserver que les termes constants ou les termes à longue période, parce que ceux-ci pourront devenir sensibles à cause des petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir.

Cela posé, je dis que les variations des quantités g, h, n, sont actuellement et demeureront toujours insensibles. Remarquons d'abord que la substitution, dans les équations (19), des valeurs de ω, ψ, φ, tirées des formules (18) introduira des termes multipliés par g et h; comme nous négligeons les carrés et le produit de ces quantités, on peut former immédiatement les termes dont il s'agit en faisant usage des formules (24) de la Section II, formules dans lesquelles il faudra remplacer les quantités

$$d\varphi - \cos\omega\, d\psi, \quad \cos\varphi \sin\omega\, d\psi + \sin\varphi\, d\omega, \quad \sin\varphi \sin\omega\, d\psi - \cos\varphi\, d\omega,$$

respectivement par

$$0, \quad -\frac{1}{n}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta), \quad \frac{1}{n}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta),$$

ainsi qu'on le voit aisément par les équations (18). Si donc on veut n'avoir égard qu'aux seuls termes qui sont introduits par la substitution dont nous venons de parler, il faudra remplacer P, Q, R, respectivement par

$$-\frac{1}{n}P'\frac{\sqrt{B(C-A)}}{C}(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta) - \frac{1}{n}R\frac{C-B}{B-A}\frac{\sqrt{A(C-B)}}{C}(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta),$$

$$+\frac{1}{n}Q'\frac{\sqrt{A(C-B)}}{C}(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta) + \frac{1}{n}R\frac{C-A}{B-A}\frac{\sqrt{B(C-A)}}{C}(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta),$$

$$+\frac{1}{n}P\frac{B-A}{C-B}\frac{\sqrt{A(C-B)}}{C}(g\cos\nu\theta - h\sin\nu\theta) - \frac{1}{n}Q\frac{B-A}{C-A}\frac{\sqrt{B(C-A)}}{C}(g\sin\nu\theta + h\cos\nu\theta),$$

dans les équations (19), et celles-ci deviendront alors

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} &= -\frac{1}{2nC}\left[P'\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}}+Q'\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\right]h+\frac{1}{2nC}Rg \\
&\quad -\frac{1}{2nC}\left[P'\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}}-Q'\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\right](g\sin 2\nu\theta+h\cos 2\nu\theta) \\
&\quad -\frac{1}{2nC}\frac{2C-B-A}{B-A}R(g\cos 2\nu\theta-h\sin 2\nu\theta), \\
\frac{dh}{dt} &= +\frac{1}{2nC}\left[P'\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}}+Q'\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\right]g+\frac{1}{2nC}Rh \\
&\quad -\frac{1}{2nC}\left[P'\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}}-Q'\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\right](g\cos 2\nu\theta-h\sin 2\nu\theta) \\
&\quad +\frac{1}{2nC}\frac{2C-B-A}{B-A}R(g\sin 2\nu\theta+h\cos 2\nu\theta), \\
\frac{dn}{dt} &= \frac{1}{nC}P\frac{B-A}{C-B}\frac{\sqrt{A(C-B)}}{C}(g\cos\nu\theta-h\sin\nu\theta) \\
&\quad -\frac{1}{nC}Q\frac{B-A}{C-A}\frac{\sqrt{B(C-A)}}{C}(g\sin\nu\theta+h\cos\nu\theta).
\end{aligned}\right.$$

On voit d'après cela que si l'on ajoute respectivement aux seconds membres des équations (19), les seconds membres des équations (20), on obtiendra des valeurs de $\frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}, \frac{dn}{dt}$ qui seront exactes aux termes près du deuxième ordre en g et h, et dans les expressions desquelles on pourra prendre pour ω, ψ, φ les valeurs $\omega=\omega_0$, $\psi=\psi_0$, $\varphi=\varphi_0+\theta=\varphi_0+nt$. Il faut remarquer que les équations (20) supposent que l'on ait fait abstraction de la partie δV de la fonction perturbatrice, car les formules (24) de la Section II ont elles-mêmes été obtenues dans cette hypothèse; mais les corrections qu'il y aurait lieu d'introduire ici, à raison de cette circonstance, sont insignifiantes à cause de la présence des petits facteurs g et h.

Nous considérerons d'abord les équations (19). Si l'on néglige les seuls moments δP, δQ, δR, qui proviennent de la non-symétrie de la Terre autour de l'axe du moment C, il est aisé de voir, par les formules (15), (17), (20) et (21) de la Section II, que les valeurs des moments P, Q, R, seront de la forme

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
P &= (C-B)(M\sin\varphi+N\cos\varphi), \\
Q &= (C-A)(M\cos\varphi-N\sin\varphi), \\
R &= (B-A)(M'\sin 2\varphi+N'\cos 2\varphi),
\end{aligned}\right.$$

M, N, M' et N' étant des quantités indépendantes de l'angle φ; il suffit d'ail-

leurs pour s'en assurer, de se rappeler que ζ_1 ne contient pas l'angle φ et que ξ_1 et η_1 sont des fonctions linéaires et homogènes de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ qui se déduisent l'une de l'autre en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$. La vitesse angulaire de rotation de la Terre étant à peu près égale à n, on voit, par ce qui précède, que les seconds membres des formules (19) ne contiendront que des termes dont la période sera environ d'un jour ou d'un demi-jour, à cause de la petitesse relative des moyens mouvements du Soleil, de la Lune, des périgées de ces astres et de leurs nœuds sur le plan fixe des coordonnées ξ et η, ξ_1 et η_1. Tous ces termes à courte période devront être rejetés et l'on aura

$$dg = 0, \quad dh = 0, \quad dn = 0.$$

Supposons qu'on veuille avoir égard à la partie de δV qui provient de la non-symétrie de la Terre autour de l'axe du moment C et que l'on prenne pour P, Q, R les valeurs δP, δQ, δR, fournies par les équations (22) de la Section II. Le moment R ne contiendra que des termes de degrés impairs en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$; il n'introduira donc dans la troisième équation (19) que des termes à courte période et, si l'on fait abstraction des termes multipliés par g et h qu'on peut réunir à ceux qui figurent dans la troisième équation (20), on aura toujours

$$dn = 0.$$

Mais il n'en est pas de même des moments P et Q; ceux-ci contiendront des termes indépendants de l'angle φ et l'on pourrait croire que ces termes sont susceptibles de devenir sensibles dans les valeurs de g et de h; il est aisé de s'assurer qu'il n'en est point ainsi. D'après les formules (22) de la Section II, les valeurs de P et de Q que nous devons employer peuvent être écrites comme il suit

$$P = \frac{3m'}{B}\mathcal{A}\left(\frac{r}{\rho_0}S + \varepsilon\frac{r'}{\rho'_0}S'\right), \quad Q = -\frac{3m'}{A}\mathcal{B}\left(\frac{r}{\rho_0}S + \varepsilon\frac{r'}{\rho'_0}S'\right),$$

en négligeant tous les termes qui dépendent de l'angle φ. Désignons par ϖ la parallaxe $\frac{r}{\rho_0}$ du Soleil ou la parallaxe $\frac{r'}{\rho'_0}$ de la Lune, multipliée par ε, et soit $F\cos(\alpha t + 6)$ un terme quelconque de S ou de S', F étant une constante, et α provenant du mouvement du Soleil ou de celui de la Lune; remarquons enfin que les rapports de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ au moment d'inertie C sont au moins de l'ordre du carré de l'aplatissement de la Terre, ou, si l'on veut, de l'ordre de cet aplatissement

multiplié par le rapport $\frac{m}{n}$, en sorte que si l'on pose

$$\mathcal{L} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{M} = \lambda(C-B)\frac{m}{n},$$

λ sera certainement un nombre peu considérable. D'après cela la valeur de $\frac{dg}{dt}$ sera, en se bornant à un seul terme,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{3m'}{8n}\lambda\varpi F\sqrt{\frac{C-B}{A}}\cos(\nu nt - \alpha t - 6),$$

ce qui donne, en intégrant,

$$g = \frac{3m'}{8n(\nu n - \alpha)}\lambda\varpi F\sqrt{\frac{C-B}{A}}\sin(\nu nt - \alpha t - 6).$$

Nous verrons que ν est à peu près égal à $\frac{1}{305}$; en sorte que d'après les valeurs des moyens mouvements de la Lune et du Soleil, de leurs périgées et de leurs nœuds, le diviseur $\nu n - \alpha$ aura la moindre valeur possible quand α sera le moyen mouvement du Soleil; alors on a à peu près $\nu n - \alpha = \frac{1}{5}m$ et la valeur précédente de g devient

$$g = \frac{5}{8}\frac{3m'}{n}\lambda\varpi F\sqrt{\frac{C-B}{A}}\sin(\nu nt - mt - 6).$$

On voit que le rapport $\frac{g}{n}$ reste de l'ordre des forces perturbatrices, lors même que ϖ serait égal au produit $\varepsilon\frac{c}{\rho_0}$; par conséquent les quantités g et h ne peuvent varier d'une manière sensible par le fait de la non-symétrie de la Terre autour de l'axe du plus grand moment d'inertie.

Occupons-nous maintenant des équations (20), qui ont été obtenues en faisant abstraction de la partie δV de la fonction perturbatrice, et considérons d'abord la valeur de $\frac{dn}{dt}$ à laquelle nous réunissons les termes du second membre de la troisième équation (19) qui contiennent les facteurs g et h. Comme nous négligeons δV, on voit que notre valeur de $\frac{dn}{dt}$ ne contient que des termes multipliés par $\sin\varphi$ ou par $\cos\varphi$ et qui, par suite, doivent être rejetés. Supposons qu'on veuille tenir compte de δV, il faudra corriger l'expression de $\frac{dn}{dt}$ que nous consi-

dérons, en ajoutant les termes qui proviennent de la partie $\frac{1}{C}\delta R$ de la troisième équation (19) et auxquels nous n'avons pas eu égard quand nous avons formé le système (20) au moyen du système (19); nous réunirons en outre à ces termes ceux qui figurent dans la troisième équation (19) avec le facteur g ou h et qui dépendent du moment δQ. D'après les résultats obtenus dans la Section II, le moment δR ne provient que de la non-symétrie de la Terre autour de l'axe du moment C, il en est de même de la partie de δQ qui est indépendante de l'angle φ; donc la considération de δV n'introduira dans la valeur de $\frac{dn}{dt}$ que des termes dépendant de l'angle φ ou des termes dépendant de l'angle $\nu\theta$ et qui contiendront le facteur $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Les développements que nous avons présentés plus haut montrent que tous ces termes sont insensibles après l'intégration, dans la valeur de n, et cela indépendamment des facteurs g et h qu'ils contiennent. On a donc $dn = 0$, et par suite

$$n = \text{constante}.$$

On pouvait arriver à cette conclusion sans entrer dans les détails qui précèdent; effectivement, à cause de la petitesse des quantités g et h, les termes que δV introduirait dans les équations (20) sont au moins de l'ordre du carré des forces perturbatrices, et, en conséquence, ils doivent être supprimés; mais les considérations que nous avons présentées nous seront utiles plus loin pour l'étude des variations de l'angle θ qui se déduit de n par une nouvelle intégration.

Considérons en second lieu les valeurs de g et de h. Nous supprimerons dans les deux premières équations (20), non-seulement les termes périodiques dont la période est d'un sous-multiple du jour, mais encore ceux qui contiennent les facteurs $\sin 2\nu\theta$, $\cos 2\nu\theta$ et qui seraient insensibles après l'intégration, à cause des facteurs g et h qui les multiplient. D'après les valeurs de P′ et de Q′ données par les formules (23) de la Section II, on reconnaît aisément que si l'on pose

$$K = \rho_0^3 \frac{3(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2\rho^2}{\rho^5} + \varepsilon \rho'^3_0 \frac{3(\xi'^2_1 + \eta'^2_1) - 2\rho'^2}{\rho'^5},$$

on a, en négligeant les termes qui dépendent de l'angle φ,

$$P' = \frac{3m'}{2}(C - B)K, \qquad Q' = \frac{3m'}{2}(C - A)K;$$

en portant ces valeurs dans les deux premières équations (20) et en faisant les

réductions indiquées, il vient

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= -\frac{3m'}{4n}\frac{A+B}{C}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\,Kh,\\ \frac{dh}{dt} &= +\frac{3m'}{4n}\frac{A+B}{C}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\,Kg.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$(23)\qquad \frac{3m}{4n}\frac{A+B}{C}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\int_0^t K\,dt = S,$$

on déduira des équations (22)

$$\frac{dg + dh\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = m\,dS\sqrt{-1};$$

d'où l'on tire, en désignant par σ et 6 deux constantes arbitraires,

$$g + h\sqrt{-1} = n\sigma e^{(mS+6)\sqrt{-1}},$$

et

$$(24)\qquad g = n\sigma\cos(mS+6),\qquad h = n\sigma\sin(mS+6).$$

On voit d'après cela que, pour obtenir les inégalités séculaires qui affectent les quantités g et h, il suffira de calculer l'intégrale désignée par S, en rejetant tous les termes périodiques et en se bornant en conséquence à la partie proportionnelle au temps. Pour cela prenons le plan de l'écliptique à une époque quelconque pour le plan fixe des coordonnées ξ et η, ξ_1 et η_1; négligeons, ce qui est évidemment permis ici, les excentricités et les inclinaisons des orbites du Soleil et de la Lune sur le plan fixe; désignons enfin par ☉ et ☾ les longitudes de ces astres comptées à partir de la même origine que ψ et en sens contraire de cet angle, on aura

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0, & \xi &= \rho_0\cos☉, & \eta &= \rho_0\sin☉, & \zeta &= 0,\\ \rho' &= \rho'_0, & \xi' &= \rho'_0\cos☾, & \eta' &= \rho'_0\sin☾, & \zeta' &= 0,\end{aligned}$$

les formules (16) et (17) de la Section II donneront ensuite

$$\begin{aligned}\xi_1^2 + \eta_1^2 = x^2 + y^2 &= [(\xi\sin\psi + \eta\cos\psi)\cos\omega - \zeta\sin\omega]^2 + (\xi\cos\psi - \eta\sin\psi)^2\\ &= \rho_0^2\left[\frac{1+\cos^2\omega}{2} + \frac{\sin^2\omega}{2}\cos 2(☉+\psi)\right];\end{aligned}$$

comme nous ne voulons dans K que les termes indépendants du temps, il faut

prendre

$$\xi_1'^2 + \eta_1'^2 = \frac{1+\cos^2\omega_0}{2}\rho_0'^2; \qquad \xi_1''^2 + \eta_1''^2 = \frac{1+\cos^2\omega_0}{2}\rho_0''^2,$$

et il vient alors

$$K = (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\omega_0\right);$$

faisant donc, pour abréger,

$$\alpha = \frac{3m}{4n}\frac{A+B}{C}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}(1+\varepsilon)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\omega_0\right),$$

on aura ces valeurs de g et de h

$$(25) \qquad g = n\sigma\cos(m\alpha t + 6), \qquad h = n\sigma\sin(m\alpha t + 6).$$

Si l'on calcule le nombre α en prenant $\frac{C-B}{C}$ et $\frac{C-A}{C}$ égaux à $\frac{1}{306}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{366}$, $\omega_0 = 23^\circ 30'$ et $\varepsilon = 2$, on trouve $\frac{1}{\alpha} = 32683$; ainsi la période des inégalités séculaires des quantités g et h serait de trente-deux mille ans environ. Poisson a trouvé une période beaucoup plus considérable; l'inexactitude du résultat qu'il a donné dans son Mémoire provient de deux fautes de calcul faciles à reconnaître, et qui d'ailleurs n'infirment nullement son analyse. Si l'on porte dans les équations (14) et (16), les valeurs de g et de h que nous venons de trouver, il vient

$$(26) \quad \begin{cases} p = n\sigma\sqrt{\frac{C-B}{A}}\cos(\nu nt + \alpha mt + 6), \quad q = n\sigma\sqrt{\frac{C-A}{B}}\sin(\nu nt + \alpha mt + 6), \\ r = n\left[1 - \frac{B-A}{4C}\sigma^2 + \frac{B-A}{4C}\sigma^2\cos 2(\nu nt + \alpha mt + 6)\right]. \end{cases}$$

On voit par ces formules que si l'on fait abstraction des inégalités dont la période est d'un jour ou d'un sous-multiple du jour, et qui sont de l'ordre des forces perturbatrices, l'axe instantané de rotation de la Terre exécute autour de l'axe du moment C des oscillations dont la période est à peu près de dix mois à cause de $\nu = \frac{1}{306}$ environ. Or si l'amplitude de ces oscillations était appréciable, on en serait averti par les variations annuelles des latitudes terrestres et, comme les observations les plus précises n'ont rien constaté de semblable, nous devons conclure que la quantité σ est insensible; par suite *l'angle que forme l'axe instantané de rotation de la Terre avec l'axe du plus grand moment d'inertie est actuellement et restera toujours de l'ordre de grandeur des angles qui*

échappent à nos mesures. Le sinus de cet angle est à peu près égal à $\frac{\sigma}{\sqrt{306}}$, d'après les équations (20); or une variation annuelle de *une seconde* dans les latitudes terrestres est inadmissible, d'après les observations, il faut donc que l'on ait

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{306}} < \sin 1'', \quad \text{ou} \quad \sigma < 0,000\,042;$$

il n'est pas démontré par là que σ soit de l'ordre des forces perturbatrices, mais le carré σ^2 est au moins de cet ordre; il en résulte que nous étions en droit de négliger, comme nous l'avons fait, les termes du deuxième degré en g et h, dans les équations (19) et (20), car ces termes, qui contiennent en facteur l'un des moments P, Q, R, sont au moins de l'ordre du carré des forces perturbatrices.

Comme la vitesse angulaire o est égale à $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, on voit encore, par ce qui précède, que l'on a, à fort peu près,

$$o = n,$$

et, par conséquent, *la vitesse angulaire de rotation de la Terre est actuellement et sera toujours sensiblement constante*.

20. Nous venons de voir que les variations des quantités g et h sont insensibles, ainsi que celles de p et de q; il n'en est pas de même des angles ω, ψ, φ parce que les quantités p et q introduisent dans les équations différentielles (2) des termes qui deviennent sensibles par l'intégration. Nous allons examiner ici ce rôle remarquable que jouent les variables p et q dans notre problème et rechercher en même temps les équations différentielles qui nous serviront dans les Sections suivantes pour déterminer les variables ω, ψ, φ.

Si l'on néglige la partie de δV qui provient de la non-symétrie de la Terre autour de l'axe du moment C, on peut employer les valeurs de P et Q données par les équations (21); en portant ces valeurs dans les deux premières équations (19), celles-ci deviennent

$$(27)\quad\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = \sqrt{\dfrac{C-B}{A}}(M\sin\varphi + N\cos\varphi)\cos\nu\theta + \sqrt{\dfrac{C-A}{B}}(M\cos\varphi - N\sin\varphi)\sin\nu\theta, \\ \dfrac{dh}{dt} = -\sqrt{\dfrac{C-B}{A}}(M\sin\varphi + N\cos\varphi)\sin\nu\theta + \sqrt{\dfrac{C-A}{B}}(M\cos\varphi - N\sin\varphi)\cos\nu\theta; \end{cases}$$

en négligeant comme précédemment le carré de la fonction perturbatrice, on peut considérer n comme constante et prendre, dans les seconds membres des équations (27),

$$\theta = nt, \qquad \varphi = nt + \text{constante},$$

pourvu que l'on ajoute respectivement aux valeurs précédentes de $\frac{dg}{dt}$ et $\frac{dh}{dt}$ les termes contenus dans les seconds membres des deux premières équations (20); nous verrons tout à l'heure que ces termes n'ont aucune influence dans la recherche dont nous nous occupons ici.

Si l'on intègre les équations (27) en regardant M et N comme des constantes et en se rappelant que l'on a

$$\nu = \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}},$$

on trouvera sans difficulté

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} g &= -\frac{1}{n}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}(M\cos\varphi - N\sin\varphi)\cos\nu\theta \\ &\quad + \frac{1}{n}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}(M\sin\varphi + N\cos\varphi)\sin\nu\theta, \\ h &= +\frac{1}{n}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}(M\cos\varphi - N\sin\varphi)\sin\nu\theta \\ &\quad + \frac{1}{n}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}(M\sin\varphi + N\cos\varphi)\cos\nu\theta. \end{aligned}\right.$$

Nous faisons ici abstraction des parties constantes contenues dans g et h; en outre, comme on a supposé M et N constantes dans les équations (27), les équations (28) ne sont pas tout à fait exactes, mais on peut les rendre telles en ajoutant respectivement à leurs seconds membres des termes complémentaires Δg et Δh. Ces nouvelles variables Δg et Δh seront déterminées par des équations différentielles de même forme que les équations (27) et que l'on peut écrire immédiatement; ces équations sont

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta g}{dt} &= \frac{1}{n}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}\left(\frac{dM}{dt}\cos\varphi - \frac{dN}{dt}\sin\varphi\right)\cos\nu\theta \\ &\quad - \frac{1}{n}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}\left(\frac{dM}{dt}\sin\varphi + \frac{dN}{dt}\cos\varphi\right)\sin\nu\theta, \\ \frac{d\Delta h}{dt} &= -\frac{1}{n}\frac{A}{C}\sqrt{\frac{C-B}{A}}\left(\frac{dM}{dt}\cos\varphi - \frac{dN}{dt}\sin\varphi\right)\sin\nu\theta \\ &\quad - \frac{1}{n}\frac{B}{C}\sqrt{\frac{C-A}{B}}\left(\frac{dM}{dt}\sin\varphi + \frac{dN}{dt}\cos\varphi\right)\cos\nu\theta, \end{aligned}\right.$$

et si on les intègre en considérant $\frac{dM}{dt}$ et $\frac{dN}{dt}$ comme des constantes, on trouvera

$$(30)\quad \begin{cases} \Delta g = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{2A-C}{A+B-C}\dfrac{AB}{C^2}\sqrt{\dfrac{C-B}{A}}\left(\dfrac{dM}{dt}\sin\varphi+\dfrac{dN}{dt}\cos\varphi\right)\cos\nu\theta \\ \qquad +\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2B-C}{A+B-C}\dfrac{AB}{C^2}\sqrt{\dfrac{C-A}{B}}\left(\dfrac{dM}{dt}\cos\varphi-\dfrac{dN}{dt}\sin\varphi\right)\sin\nu\theta, \\ \Delta h = -\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2A-C}{A+B-C}\dfrac{AB}{C^2}\sqrt{\dfrac{C-B}{A}}\left(\dfrac{dM}{dt}\sin\varphi+\dfrac{dN}{dt}\cos\varphi\right)\sin\nu\theta \\ \qquad +\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2B-C}{A+B-C}\dfrac{AB}{C^2}\sqrt{\dfrac{C-A}{B}}\left(\dfrac{dM}{dt}\cos\varphi-\dfrac{dN}{dt}\sin\varphi\right)\cos\nu\theta. \end{cases}$$

On peut poursuivre indéfiniment ces approximations, et l'on obtiendrait de cette manière les développements de g et de h en des séries très-convergentes, car chaque opération introduit le diviseur n et ne peut amener que des multiplicateurs de beaucoup inférieurs à n. Le procédé par lequel on obtient ainsi les valeurs de g et de h est, comme on le voit, celui de l'intégration par parties.

Si l'on emploie les valeurs de g et de h données par les équations (28), les valeurs de p et de q seront, d'après les équations (14),

$$(31)\quad \begin{cases} p = -\dfrac{1}{n}\dfrac{C-B}{C}(M\cos\varphi - N\sin\varphi), \\ q = +\dfrac{1}{n}\dfrac{C-A}{C}(M\sin\varphi + N\cos\varphi), \end{cases}$$

et, en portant ces valeurs dans les équations (2), on aura

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{2C-B-A}{2nC}M - \dfrac{B-A}{2nC}(M\cos2\varphi - N\sin2\varphi), \\ \sin\omega\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{2C-B-A}{2nC}N + \dfrac{B-A}{2nC}(M\sin2\varphi + N\cos2\varphi). \end{cases}$$

Nous avons reconnu que les parties constantes des quantités g et h sont insensibles, mais il convient de remarquer que ces constantes ne pourraient en aucun cas introduire des termes appréciables dans les valeurs de ω et de ψ; car les parties correspondantes de p et de q sont indépendantes de l'angle φ et par suite ces mêmes constantes se trouveront multipliées par $\sin\varphi$ ou par $\cos\varphi$ dans les expressions de $\frac{d\omega}{dt}$ et de $\frac{d\psi}{dt}$. Si l'on veut avoir égard aux parties de g et de h que nous avons désignées par Δg et Δh, on trouvera que les valeurs correspondantes

de p et q sont

$$(33)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{B(2A-C)(C-B)}{(A+B-C)C^2}\left(\dfrac{dM}{dt}\sin\varphi + \dfrac{dN}{dt}\cos\varphi\right),\\ q = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{A(2B-C)(C-A)}{(A+B-C)C^2}\left(\dfrac{dM}{dt}\cos\varphi - \dfrac{dN}{dt}\sin\varphi\right),\end{cases}$$

et en les portant dans les équations (2), on aura

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{1}{2n^2}\dfrac{A(C-B)+B(C-A)}{C^2}\dfrac{dN}{dt} \\ \qquad + \dfrac{1}{2n^2}\dfrac{(B-A)[(C-A)(C-B)+AB]}{(A+B-C)C^2}\left(\dfrac{dM}{dt}\sin 2\varphi + \dfrac{dN}{dt}\cos 2\varphi\right),\\ \sin\omega\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{1}{2n^2}\dfrac{A(C-B)+B(C-A)}{C^2}\dfrac{dM}{dt} \\ \qquad + \dfrac{1}{2n^2}\dfrac{(B-A)[(C-A)(C-B)+AB]}{(A+B-C)C^2}\left(\dfrac{dM}{dt}\cos 2\varphi - \dfrac{dN}{dt}\sin 2\varphi\right).\end{cases}$$

Ces valeurs de $\frac{d\omega}{dt}$ et de $\sin\omega\frac{d\psi}{dt}$ ont la même forme que celles qui sont données par les équations (32), et il est facile de reconnaître qu'il en serait encore de même des nouvelles valeurs que l'on obtiendrait si l'on voulait employer les diverses parties de g et de h contenues dans les séries dont nous avons calculé les premiers termes. Or les équations (34) et les autres analogues ne peuvent donner aucun terme sensible dans ω et dans ψ; cela est évident pour ce qui concerne les termes multipliés par $\sin 2\varphi$ ou par $\cos 2\varphi$, et quant aux termes qui sont indépendants de l'angle φ, ils sont formés d'une constante multipliée par l'une des dérivées de M ou de N; l'intégration ne pourra donc introduire dans les dénominateurs que des facteurs qui figurent déjà dans les numérateurs, et par conséquent tous les termes dont il s'agit sont insensibles. Il en serait de même des termes que l'on introduirait si l'on avait égard aux parties des moments δP et δQ qui proviennent de la non-symétrie de la Terre autour de son axe, car ceux-ci étant des fonctions paires de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$, ils ne pourront donner dans les seconds membres des équations (2) que des termes à courte période. C'est aussi pour la même raison qu'il n'y a pas lieu d'avoir égard aux parties des dérivées $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, qui sont données par les équations (20), car, d'après les valeurs des quantités P', Q' et R, il est aisé de reconnaître que les seconds membres des deux premières équations (20) sont des fonctions paires de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$.

On voit d'après cela que les valeurs de $\frac{d\omega}{dt}$ et de $\sin\omega\frac{d\psi}{dt}$ seront données complétement par les équations (32), desquelles il faut encore rejeter les termes qui

dépendent de l'angle 2φ; ainsi l'on aura simplement

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2C-B-A}{2nC}\,M,\\ \sin\omega\,\frac{d\psi}{dt} &= \frac{2C-B-A}{2nC}\,N.\end{aligned}\right.$$

Or on a, par les équations (21),

$$P\sin\varphi + Q\cos\varphi = \frac{2C-B-A}{2}M + \frac{B-A}{2}(M\cos 2\varphi - N\sin 2\varphi),$$
$$P\cos\varphi - Q\sin\varphi = \frac{2C-B-A}{2}N - \frac{B-A}{2}(M\sin 2\varphi + N\cos 2\varphi);$$

donc, puisque nous rejetons les termes multipliés par $\sin 2\varphi$ ou par $\cos 2\varphi$, nous pouvons substituer aux équations (35) les deux suivantes

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{nC}(P\sin\varphi + Q\cos\varphi),$$
$$\sin\omega\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{nC}(P\cos\varphi - Q\sin\varphi).$$

Enfin on peut exprimer P et Q au moyen des dérivées de la fonction perturbatrice, en faisant usage des équations (26) de la Section I, et les équations précédentes deviennent alors

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{nC\sin\omega}\frac{dV}{d\psi} + \frac{\cos\omega}{nC\sin\omega}\frac{dV}{d\varphi},\\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{1}{nC\sin\omega}\frac{dV}{d\omega}.\end{aligned}\right.$$

Quant à la valeur de φ, elle sera donnée par l'équation

$$(37)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\omega\,\frac{d\psi}{dt},$$

et elle sera connue quand les variables ψ et ω seront elles-mêmes déterminées.

21. Il nous reste à examiner l'influence des actions perturbatrices du Soleil et de la Lune sur la durée du jour sidéral. Cette durée T est définie par l'équation

$$\int_t^{t+T} o\,dt = 2\pi,$$

et elle sera indépendante de t, si l'intégrale $\int_0^t odt$ est proportionnelle au temps, c'est-à-dire si la variation $\int_0^t \delta odt$ est nulle ou insensible.

L'équation $o^2 = p^2 + q^2 + r^2$ donne

$$o = r + \frac{p^2 + q^2}{2r},$$

et d'après les résultats obtenus au n° **19**, on aura

$$\int_0^t odt = \int_0^t rdt,$$

en faisant abstraction des termes périodiques qui sont au moins de l'ordre des forces perturbatrices; enfin on voit par la troisième équation (26) que l'on a également

$$\int_0^t rdt = \int_0^t ndt = \theta.$$

La variation $\delta\theta = \int_0^t \delta ndt$ est insensible quand on néglige le carré des forces perturbatrices et, par suite l'angle θ varie proportionnellement au temps; en effet nous avons vu que la valeur de n tirée de la troisième équation du système (19) ou du système (20) ne renferme que des termes qui dépendent de l'angle φ avec des termes qui dépendent de l'angle $\nu\theta$ et qui sont de l'ordre des forces perturbatrices, indépendamment des facteurs g et h par lesquels ils sont multipliés; les premiers ne peuvent croître par l'intégration, et quant aux autres, ils restent de l'ordre des forces perturbatrices dans l'intégrale $\int ndt$, parce que le plus petit diviseur qu'ils puissent acquérir est supérieur aux quantités g et h. On peut conclure de là que la durée du jour sidéral reste constante, lorsqu'on néglige les termes du deuxième ordre par rapport à la fonction perturbatrice.

Dans ce qui précède, nous avons pu nous borner à considérer les termes qui sont de l'ordre des forces perturbatrices; mais la détermination des variations

$$\int_0^t \delta odt, \quad \int_0^t \delta rdt,$$

exigeant une nouvelle intégration, il est ici nécessaire d'avoir égard aux termes du second ordre, pour pouvoir conclure avec certitude que ces variations sont

insensibles. Reprenons à cet effet la troisième équation (1), savoir

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{B-A}{C} pq + \frac{1}{C} R,$$

et désignons par n la partie constante de r; représentons aussi par $\partial\varphi$, $\partial\psi$, $\partial\omega$ les parties variables des angles $\varphi - nt$, ψ, ω; si l'on néglige les carrés et les produits de ces quantités, on aura

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{B-A}{C} pq + \frac{1}{C}\left(R + \frac{dR}{d\varphi}\partial\varphi + \frac{dR}{d\psi}\partial\psi + \frac{dR}{d\omega}\partial\omega\right),$$

formule où l'on pourra considérer ψ, ω et $\varphi - nt$ comme constantes; nous décomposerons la variation totale de r en deux parties ∂r et $\partial^2 r$, qui seront déterminées par les deux équations

(38) $$\frac{d\partial r}{dt} = \frac{1}{C} R,$$

(39) $$\frac{d\partial^2 r}{dt} = -\frac{B-A}{C} pq + \frac{1}{C}\left(\frac{dR}{d\varphi}\partial\varphi + \frac{dR}{d\psi}\partial\psi + \frac{dR}{d\omega}\partial\omega\right).$$

L'équation (38) ne renferme que des termes du premier ordre par rapport à la fonction perturbatrice et, d'après ce qui a été établi précédemment, ces termes resteront insensibles dans la valeur de ∂r et dans celle de $\int \partial r dt$, il nous suffit donc d'établir que les termes de l'équation (39) ne peuvent s'abaisser au-dessous du premier ordre par deux intégrations successives. Les quantités $\partial\varphi$, $\partial\psi$, $\partial\omega$ sont déterminées par les équations (1), lesquelles donnent

(40) $$\left\{\begin{aligned} \partial\omega &= \int (q\sin\varphi - p\cos\varphi)\,dt, \\ \sin\omega\,\partial\psi &= \int (q\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dt, \\ \partial\varphi &= \int \partial r\,dt + \cos\omega\,\partial\psi, \end{aligned}\right.$$

et en faisant usage des formules (38) et (40), l'équation (39) devient

(41) $$\begin{aligned} \frac{d\partial^2 r}{dt} = &-\frac{B-A}{C} pq + \frac{1}{C^2}\frac{dR}{d\varphi}\iint R\,dt^2 \\ &+ \frac{1}{C}\left[\frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{dR}{d\psi} + \cos\omega\frac{dR}{d\varphi}\right)\int(q\cos\varphi + p\sin\varphi)dt + \frac{dR}{d\omega}\int(q\sin\varphi - p\cos\varphi)dt\right]. \end{aligned}$$

Je dis d'abord que tous les termes de cette expression peuvent être regardés comme étant de l'ordre du carré des forces perturbatrices; en effet, tous les termes de R dépendent de l'angle φ et, en conséquence, il n'y a pas lieu de considérer les parties de $\delta\psi$ et de $\delta\omega$ qui sont indépendantes de cet angle et qui sont devenues sensibles par l'intégration. En outre tous les termes de l'équation (41) contiennent l'un des facteurs $B - A$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, qui sont certainement très-petits par rapport à $C - A$ et $C - B$, d'où il résulte que si les parties de p et de q qui proviennent de l'*état initial* ne sont pas de l'ordre des forces perturbatrices, elles ne peuvent manquer de s'abaisser à cet ordre par l'introduction des facteurs dont nous venons de parler. On ne saurait conserver de doute qu'à l'égard du premier terme $-\frac{B-A}{C}pq$ de la formule (41); mais il faut remarquer que, d'après les formules (26), la partie de ce terme qui provient de l'état initial dépend de l'angle $2\nu nt$, en sorte qu'elle resterait au-dessous de l'ordre des forces perturbatrices après la double intégration.

Il est nécessaire pour notre objet de faire subir à l'équation (41) quelques transformations. On a, par les formules (25) de la Section I,

$$(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\sin\omega = \frac{dV}{d\psi} + \frac{dV}{d\varphi}\cos\omega,$$

$$Q\sin\varphi - P\cos\varphi = \frac{dV}{d\omega},$$

$$R = \frac{dV}{d\varphi};$$

si l'on différentie les deux premières équations de ce système par rapport à φ et que l'on ait ensuite égard à la troisième, on aura

$$\sin\omega\,\frac{d(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{dR}{d\psi} + \cos\omega\,\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{d(Q\sin\varphi - P\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{dR}{d\omega}.$$

Au moyen de ces formules, l'équation (41) peut s'écrire comme il suit

$$(42)\quad \begin{aligned} \frac{d\delta' r}{dt} = &-\frac{B-A}{C}pq + \frac{1}{C^2}\frac{dR}{d\varphi}\iint R\,dt \\ &+ \frac{1}{C}\left[\begin{array}{l} \dfrac{d(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)}{d\varphi}\displaystyle\int (q\cos\varphi + p\sin\varphi)\,dt \\ -\dfrac{d(P\cos\varphi - Q\sin\varphi)}{d\varphi}\displaystyle\int (q\sin\varphi - p\cos\varphi)\,dt \end{array}\right]. \end{aligned}$$

posons maintenant, pour abréger,

$$(43)\quad \begin{cases} P\sin\varphi + Q\cos\varphi = P', & P\cos\varphi - Q\sin\varphi = Q', \\ Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi = \int P''dt, & Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi = \int Q''dt, \\ q\sin\varphi - p\cos\varphi = P''', & q\cos\varphi + p\sin\varphi = Q''';\end{cases}$$

les équations (1) donnent, en négligeant δr,

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)nq = P,\quad B\frac{dq}{dt} - (C-A)np = Q,$$

et il est aisé de s'assurer par là que l'on a

$$(44)\qquad P' = P'' + nCP''',\quad Q' = Q'' + nCQ''',$$

en remarquant que l'on peut supposer $\varphi - nt$ constante, dans les différentiations et dans les intégrations relatives à t. Cela posé, le dernier terme de la formule (42) est, d'après nos notations,

$$\frac{1}{C}\left(\frac{dP'}{d\varphi}\int Q'''dt - \frac{dQ'}{d\varphi}\int P'''dt\right),$$

et en faisant usage des formules (44), on peut le transformer aisément dans l'expression suivante

$$\frac{1}{nC^2}\left(\frac{dP'}{d\varphi}\int Q'dt - \frac{dQ'}{d\varphi}\int P'dt\right) - \frac{1}{nC^2}\left(\frac{dP''}{d\varphi}\int Q''dt - \frac{dQ''}{d\varphi}\int P''dt\right)$$
$$- \frac{1}{C}\left(\frac{dP'''}{d\varphi}\int Q''dt - \frac{dQ'''}{d\varphi}\int P''dt\right);$$

si l'on calcule le dernier terme de cette expression, au moyen des formules (43), on trouve que sa valeur est

$$+\frac{1}{2C}\frac{d(Ap^2 + Bq^2)}{d\varphi} + \frac{B-A}{C}pq;$$

la dernière partie détruira, comme on le voit, le premier terme de la formule (42); quant à la première partie, il est clair qu'il est inutile d'y avoir égard; car la différentiation relative à φ fera disparaître de $Ap^2 + Bq^2$ tous les termes indépendants de cet angle; il ne restera donc que des termes à courte période qui resteront insensibles après la double intégration; d'après cela, la valeur de

$\frac{d\delta^2 r}{dt}$ sera simplement

$$(45)\qquad \begin{aligned}\frac{d\delta^2 r}{dt} = \frac{1}{C^2}\frac{dR}{d\varphi}\int\int R\,dt^2 + \frac{1}{nC^2}\left(\frac{dP'}{d\varphi}\int Q'dt - \frac{dQ'}{d\varphi}\int P'dt\right)\\ - \frac{1}{nC^2}\left(\frac{dP''}{d\varphi}\int Q''dt - \frac{dQ''}{d\varphi}\int P''dt\right).\end{aligned}$$

C'est au moyen d'une expression de même forme, déduite d'une analyse différente, que Poisson a démontré le premier qu'il n'existe aucun terme dans l'expression de $\frac{d\delta^2 r}{dt}$ qui puisse devenir sensible dans l'intégrale $\int \delta^2 r\,dt$.

Considérons d'abord le premier terme de la formule (45) et posons en conséquence

$$(46)\qquad \frac{d\delta^2 r}{dt} = \frac{1}{C^2}\frac{dR}{d\varphi}\int\int R\,dt^2;$$

comme nous faisons abstraction des termes à courte période, pour obtenir un terme de $\frac{d\delta^2 r}{dt}$ qui soit indépendant de l'angle φ, il faut employer, sous le signe $\int\int$ et en dehors, des termes de R contenant le même multiple de φ ou de nt. Soit donc, en se bornant à deux termes,

$$R = H\cos(int - \alpha t - 6) + H'\cos(int - \alpha' t - 6'),$$

nous aurons, en substituant cette valeur dans l'équation (46) et en négligeant les termes à courte période,

$$\frac{d\delta^2 r}{dt} = \frac{HH' i\left(in - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)(\alpha - \alpha')}{(in-\alpha)^2(in-\alpha')^2 C^2}\sin(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6'),$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\delta^2 r = -\frac{HH' i\left(in - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)}{(in-\alpha)^2(in-\alpha')^2 C^2}\cos(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6');$$

une deuxième intégration donnera

$$\int \delta^2 r\,dt = -\frac{HH' i\left(in - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)}{(in-\alpha)^2(in-\alpha')^2(\alpha-\alpha')C^2}\sin(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6'),$$

ou, à très-peu près,

$$\int \delta^2 r dt = -\frac{HH'}{i^2 n^3 (\alpha - \alpha')C^2} \sin(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6').$$

Le diviseur introduit, $\alpha - \alpha'$, peut être de l'ordre des forces perturbatrices, mais la valeur précédente de $\int \delta^2 r dt$ n'en restera pas moins de cet ordre et elle sera par conséquent insensible.

Considérons maintenant l'un des deux derniers termes de la formule (45), et posons par exemple

$$(47) \qquad \frac{d\delta^2 r}{dt} = \frac{1}{nC^2}\left(\frac{dP'}{d\varphi}\int Q' dt - \frac{dQ'}{d\varphi}\int P' dt\right);$$

faisant abstraction comme précédemment des termes à courte période, il faudra employer dans P' et dans Q' des termes dépendants du même multiple de φ ou de nt. Soit donc

$$P' = H \cos(int - \alpha t - 6),$$
$$Q' = H' \cos(int - \alpha' t - 6'),$$

et substituons ces valeurs dans la formule (47), il viendra, en supprimant toujours les termes à courte période,

$$\frac{d\delta^2 r}{dt} = \frac{HH' i(\alpha - \alpha')}{2(in - \alpha)(in - \alpha')nC^2} \cos(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6'),$$

en intégrant, il vient

$$\delta^2 r = \frac{HH' i}{2(in - \alpha)(in - \alpha')nC^2} \sin(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6'),$$

enfin une nouvelle intégration donnera

$$\int \delta^2 r dt = \frac{-HH' i}{2(in - \alpha)(in - \alpha')n(\alpha - \alpha')C^2} \cos(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6'),$$

ou, à très-peu près,

$$\int \delta^2 r dt = -\frac{HH'}{2in^3(\alpha - \alpha')C^2} \cos(\alpha t - \alpha' t + 6 - 6'),$$

car i ne peut être nul, puisque si P' et Q' ne contenaient pas l'angle φ, leurs dérivées prises par rapport à cet angle seraient nulles; on est ainsi conduit à la même conséquence que précédemment. On voit en résumé que l'intégrale $\int \delta^2 r dt$

reste de l'ordre des forces perturbatrices; par suite on peut considérer les intégrales $\int_0^t r\,dt$ et $\int_0^t \omega\,dt$ comme proportionnelles au temps et la durée du jour sidéral comme constante.

SECTION IV.

Des formules de la précession et de la nutation.

22. L'axe instantané de rotation de la Terre se confondant sensiblement, d'après ce qui précède, avec l'axe du plus grand moment d'inertie, le plan qui contient les deux autres axes principaux peut être considéré comme étant le plan même de l'*équateur vrai*. Cela étant, nous choisirons pour le plan fixe des coordonnées ξ et η, ξ' et η' le plan de l'écliptique à une époque déterminée quelconque, époque qui sera prise en même temps pour origine du temps; nous prendrons pour axe des coordonnées ξ l'intersection de l'*écliptique fixe* et de l'*équateur vrai* à l'origine du temps et la partie positive de cet axe sera dirigée vers l'équinoxe vernal vrai ♈ de la même époque, ou, si l'on veut, vers le *nœud descendant* de l'*équateur fixe* sur l'écliptique fixe; l'axe des coordonnées η sera dirigé vers le solstice d'été et l'axe des ζ vers le pôle boréal de l'écliptique. D'après cela, l'angle que nous avons désigné par ψ sera la longitude du nœud descendant de l'équateur vrai sur l'écliptique fixe, comptée à partir du point fixe ♈ dans le sens rétrograde; l'angle ω sera l'inclinaison de l'équateur vrai sur l'écliptique fixe.

Nous nous occuperons spécialement dans cette Section des deux variables ψ et ω dont dépendent les déplacements de l'équateur. Les valeurs de ces variables sont déterminées par les équations (36) de la Section III; mais il faut remarquer que, dans la première de ces équations, on doit supprimer la partie multipliée par $\frac{dV}{d\varphi}$, car la différentiation relative à φ n'y laissera subsister que des termes à courte période qui, en conséquence, devront tous être rejetés; ainsi l'on aura simplement

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{1}{nC\sin\omega}\frac{dV}{d\omega},\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{nC\sin\omega}\frac{dV}{d\psi}. \end{aligned}\right.$$

La valeur de V est donnée par les équations (11) et (12) de la Section II; mais, comme il faut supprimer les termes à courte période, on voit que nous pouvons faire, dans ces équations, $\xi_1^2 = \eta_1^2 = \frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{2} = \frac{\rho^2-\zeta_1^2}{2}$, ou même $\xi_1^2 = \eta_1^2 = -\frac{1}{2}\zeta_1^2$,

puisqu'il est inutile de conserver dans V des termes indépendants des variables ψ et ω; nous ferons pareillement $\xi'^2_1 = \eta'^2_1 = -\frac{1}{2}\zeta'^2_1$. Nous rappellerons que l'on a

$$\varepsilon = \frac{L'}{L}\,\frac{\rho_0^3}{\rho'^3_0}, \tag{2}$$

L et L' désignant les masses du Soleil et de la Lune et nous poserons, pour abréger,

$$\varkappa = \frac{3m^2}{4n}\,\frac{2C - A - B}{C}, \tag{3}$$

$$\varepsilon' = \frac{\mathfrak{C}}{2C - A - B}. \tag{4}$$

D'après cela la valeur de V, donnée par l'équation (11) de la Section II, sera

$$V = -\varkappa n C\left[\frac{\rho_0^3\,\zeta_1^2}{\rho^3} + \varepsilon\,\frac{\rho'^3_0\,\zeta'^2_1}{\rho'^3}\right] + \partial V; \tag{5}$$

la seule partie de ∂V qui soit indépendante de l'angle φ et qu'il y ait lieu par suite de considérer est celle qui est donnée par la formule (12) de la Section II; on a, d'après les notations précédentes,

$$\partial V = \varepsilon'\varkappa n C\,\frac{r}{\rho_0}\left[\frac{\rho_0^4\,\zeta_1}{\rho^5} - \frac{5}{3}\,\frac{\rho_0^4\,\zeta_1^3}{\rho^7}\right] + \varepsilon'\varepsilon\varkappa n\, C\,\frac{r}{\rho'_0}\left[\frac{\rho'^4_0\,\zeta'_1}{\rho'^5} - \frac{5}{3}\,\frac{\rho'^4_0\,\zeta'^3_1}{\rho'^7}\right], \tag{6}$$

r désignant toujours le rayon moyen de la Terre que nous avons introduit pour l'homogénéité des formules. Enfin les coordonnées ζ_1 et ζ'_1 s'exprimeront en fonction des coordonnées ξ, η, ζ, ou ξ', η', ζ', et des angles ψ et ω, par les formules (15) de la Section II, lesquelles nous donnent

$$\left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= (\xi\sin\psi + \eta\cos\psi)\sin\omega + \zeta\cos\omega,\\ \zeta'_1 &= (\xi'\sin\psi + \eta'\cos\psi)\sin\omega + \zeta'\cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Le problème que nous avons à résoudre est ramené, comme on le voit, à l'intégration des deux équations différentielles (1); Poisson est le premier qui ait présenté ces équations sous cette forme, il les a obtenues en partant des formules relatives à la théorie de la variation des arbitraires. (*Voir* le tome VII des *Mémoires de l'Académie des Sciences.*)

23. Nous ferons d'abord abstraction de la quantité ∂V donnée par la formule (6) et nous calculerons la partie de la formule (5) qui provient de la Lune, la partie relative au Soleil se déduira ensuite immédiatement de celle-ci.

Soient L' et Λ' la longitude et la latitude de la Lune relatives à l'écliptique

fixe et au point fixe Υ, on aura

$$\frac{\xi'}{\rho'} = \cos\Lambda'\cos L', \quad \frac{\eta'}{\rho'} = \cos\Lambda'\sin L', \quad \frac{\zeta'}{\rho'} = \sin\Lambda',$$

et, par la deuxième formule (7),

$$(8) \qquad \frac{\zeta_1'}{\rho'} = \cos\Lambda'\sin(L'+\psi)\sin\omega + \sin\Lambda'\cos\omega;$$

mais il est préférable de rapporter la position de la Lune à l'écliptique vraie. Soient donc λ' sa latitude relative à l'écliptique vraie, $\mathfrak{L}'$ sa longitude comptée sur l'écliptique fixe à partir du point fixe Υ jusqu'au nœud ascendant de l'écliptique vraie, et sur ce dernier plan à partir du nœud; on aura, par les formules de la transformation des coordonnées sphériques,

$$(9) \qquad \begin{cases} \cos\Lambda'\cos(L'-\theta) = \cos\lambda'\cos(\mathfrak{L}'-\theta), \\ \cos\Lambda'\sin(L'-\theta) = \cos\lambda'\sin(\mathfrak{L}'-\theta)\cos\varphi - \sin\lambda'\sin\varphi, \\ \qquad\quad \sin\Lambda' = \cos\lambda'\sin(\mathfrak{L}'-\theta)\sin\varphi + \sin\lambda'\cos\varphi, \end{cases}$$

en désignant par θ la longitude du nœud ascendant de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe comptée à partir du point fixe Υ, et par φ l'inclinaison du premier plan sur le second (*). Si en outre on représente par c l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie et par $\mathfrak{N}$ la longitude du nœud ascendant de cette orbite sur le même plan, longitude qui sera comptée de la même manière que $\mathfrak{L}'$, qu'enfin on désigne par v' la longitude de la Lune réduite à l'orbite, on aura aussi les formules

$$(10) \qquad \begin{cases} \cos\lambda'\cos(\mathfrak{L}'-\mathfrak{N}) = \cos(v'-\mathfrak{N}), \\ \cos\lambda'\sin(\mathfrak{L}'-\mathfrak{N}) = \sin(v'-\mathfrak{N})\cos c, \\ \qquad\qquad \sin\lambda' = \sin(v'-\mathfrak{N})\sin c; \end{cases}$$

il faut remarquer que la longitude v' se compose de trois angles qui sont comptés, le premier sur l'écliptique fixe à partir du point fixe Υ jusqu'au nœud ascendant de l'écliptique vraie, le deuxième sur l'écliptique vraie à partir de ce nœud jusqu'au nœud ascendant de l'orbite lunaire et le troisième dans le plan de l'orbite. Si l'on ajoute les deux premières équations (10), après les avoir multipliées respectivement d'abord par $\cos(\mathfrak{N}-\theta)$ et $-\sin(\mathfrak{N}-\theta)$, puis ensuite par

(*) Nous n'aurons pas à considérer dans cette Section l'angle qui a été jusqu'à présent désigné par φ; il n'y a donc aucun inconvénient à employer ici la même lettre pour un autre usage.

$\sin(\mathfrak{N} - \theta)$ et $\cos(\mathfrak{N} - \theta)$, il vient

$$\cos\lambda' \cos(\mathfrak{L}' - \theta) = \cos(\nu' - \theta)\cos^2\frac{1}{2}c + \cos(\nu' + \theta - 2\mathfrak{N})\sin^2\frac{1}{2}c,$$

$$\cos\lambda' \sin(\mathfrak{L}' - \theta) = \sin(\nu' - \theta)\cos^2\frac{1}{2}c - \sin(\nu' + \theta - 2\mathfrak{N})\sin^2\frac{1}{2}c,$$

et alors les équations (9) deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\mathrm{A}'\cos(\mathrm{L}' - \theta) = \cos(\nu' - \theta)\cos^2\frac{1}{2}c + \cos(\nu' + \theta - 2\mathfrak{N})\sin^2\frac{1}{2}c, \\ \cos\mathrm{A}'\sin(\mathrm{L}' - \theta) = \sin(\nu' - \theta)\cos^2\frac{1}{2}c\cos\varphi - \sin(\nu' + \theta - 2\mathfrak{N})\sin^2\frac{1}{2}c\cos\varphi \\ \qquad - \sin(\nu' - \mathfrak{N})\sin c\sin\varphi, \\ \sin\mathrm{A}' = \sin(\nu' - \theta)\cos^2\frac{1}{2}c\sin\varphi - \sin(\nu' + \theta - 2\mathfrak{N})\sin^2\frac{1}{2}c\sin\varphi \\ \qquad + \sin(\nu' - \mathfrak{N})\sin c\cos\varphi; \end{cases}$$

enfin si l'on ajoute les deux premières équations (11), après les avoir multipliées respectivement par $\sin(\theta + \psi)$ et $\cos(\theta + \psi)$, on aura

$$(12)\quad \begin{aligned} \cos\mathrm{A}'\sin(\mathrm{L}' + \psi) = {} & \sin(\nu' + \psi)\cos^2\tfrac{1}{2}c\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi - \sin(\nu' - 2\mathfrak{N} - \psi)\sin^2\tfrac{1}{2}c\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \\ & - \tfrac{1}{2}[\sin(\nu' - \theta - \mathfrak{N} - \psi) + \sin(\nu' + \theta - \mathfrak{N} + \psi)]\sin c\sin\varphi \\ & + \sin(\nu' - 2\theta - \psi)\cos^2\tfrac{1}{2}c\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \\ & + \sin(\nu' + 2\theta - 2\mathfrak{N} + \psi)\sin^2\tfrac{1}{2}c\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi; \end{aligned}$$

au moyen des équations (11) et (12), la formule (8) devient

$$(13)\quad \begin{aligned} \frac{\zeta_1}{\rho'} = {} & \cos^2\tfrac{1}{2}c\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin\omega\sin(\nu' + \psi) + \sin c\cos\varphi\cos\omega\sin(\nu' - \mathfrak{N}) \\ & - \sin^2\tfrac{1}{2}c\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin\omega\sin(\nu' - 2\mathfrak{N} - \psi) + \cos^2\tfrac{1}{2}c\sin\varphi\cos\omega\sin(\nu' - \theta) \\ & - \tfrac{1}{2}\sin c\sin\varphi\sin\omega[\sin(\nu' - \theta - \mathfrak{N} - \psi) + \sin(\nu' + \theta - \mathfrak{N} + \psi)] \\ & - \sin^2\tfrac{1}{2}c\sin\varphi\cos\omega\sin(\nu' + \theta - 2\mathfrak{N}) \\ & + \cos^2\tfrac{1}{2}c\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos\omega\sin(\nu' - \theta - \mathfrak{N} - \psi) \\ & + \sin^2\tfrac{1}{2}c\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos\omega\sin(\nu' + 2\theta - 2\mathfrak{N} + \psi); \end{aligned}$$

cette expression de $\frac{\zeta_1}{\rho'}$ est rigoureuse, mais nous pouvons la simplifier en négligeant le carré de φ, ce qui est permis, parce que cet angle, qui est nul à l'origine du temps, croît avec une extrême lenteur; nous négligerons aussi le cube c^3 de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie et alors on aura simplement

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\zeta_1}{\rho'} = {} & \left(1-\frac{c^2}{4}\right)\sin\omega\sin(\nu'+\psi) + c\cos\omega\sin(\nu'-\mathcal{N}) \\
& -\frac{c^2}{4}\sin\omega\sin(\nu'-2\mathcal{N}-\psi) + \left(1-\frac{c^2}{4}\right)\varphi\cos\omega\sin(\nu'-\theta) \\
& -\frac{1}{2}c\varphi\sin\omega\left[\sin(\nu'-\theta-\mathcal{N}-\psi) + \sin(\nu'+\theta-\mathcal{N}+\psi)\right] \\
& -\frac{c^2}{4}\varphi\cos\omega\sin(\nu'+\theta-2\mathcal{N}).
\end{aligned}
$$

Élevons cette expression au carré, en négligeant toujours le cube de c et le carré de φ; changeons ensuite tous les signes et remarquons que l'on peut supprimer les termes indépendants de ω et de ψ, parce qu'ils disparaîtraient de nos formules par la différentiation relative à ces variables, il viendra

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
-\frac{\zeta_1'^2}{\rho'^2} = {} & -\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3c^2}{2}\right)\sin^2\omega + \left(1-\frac{3c^2}{2}\right)\varphi\sin\omega\cos\omega\cos(\theta+\psi)\right] \\
& + \left[-c\sin\omega\cos\omega\cos(\mathcal{N}+\psi) + \frac{c^2}{4}\sin^2\omega\cos(2\mathcal{N}+2\psi)\right] \\
& + \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2}{2}\right)\sin^2\omega\cos(2\nu'+2\psi) + c\sin\omega\cos\omega\cos(2\nu'-\mathcal{N}+\psi) \\ & -\frac{3c^2}{4}\sin^2\omega\cos(2\nu'-2\mathcal{N}) \end{aligned}\right] \\
& + \varphi\left[\left(1-\frac{c^2}{2}\right)\sin\omega\cos\omega\cos(2\nu'-\theta+\psi) + \frac{1}{2}c\sin^2\omega\cos(\theta+\mathcal{N}+2\psi)\right. \\
& + \frac{3}{2}c\sin^2\omega\cos(\theta-\mathcal{N}) - \frac{3}{2}c\sin^2\omega\cos(2\nu'-\theta-\mathcal{N}) \\
& - \frac{1}{2}c\sin^2\omega\cos(2\nu'+\theta-\mathcal{N}+2\psi) \\
& - \frac{3c^2}{4}\sin\omega\cos\omega\cos(2\nu'+\theta-2\mathcal{N}+\psi) \\
& \left. - \frac{1}{2}c^2\sin\omega\cos\omega\cos(2\nu'-\theta-2\mathcal{N}-\psi)\right].
\end{aligned}
$$

Si maintenant on désigne par $m't+\mu'$ la longitude moyenne, et par $m't+\mu'-\varpi'$

l'anomalie moyenne de la Lune, on aura, par les formules du mouvement elliptique, en négligeant le cube de l'excentricité e',

$$(16)\qquad v' = m't + \mu' + 2e'\sin(m't + \mu' - \varpi') + \frac{5}{4}e'^2\sin(2m't + 2\mu' - 2\varpi'),$$

et

$$\frac{\rho'_1}{\rho'} = 1 + e'\cos(m't + \mu' - \varpi') + e'^2\cos(2m't + 2\mu' - 2\varpi'),$$

d'où

$$(17)\qquad \frac{\rho'^2_1}{\rho'^2} = \left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right) + 3e'\cos(m't + \mu' - \varpi') + \frac{9}{2}e'^2\cos(2m't + 2\mu' - 2\varpi').$$

Si l'on porte dans la formule (15) la valeur de v' tirée de l'équation (16), il viendra, en négligeant les termes du troisième degré par rapport à e' et c,

$$(18)\qquad \begin{aligned}
-\frac{z'^2_1}{\rho'^2} = &-\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3c^2}{2}\right)\sin^2\omega + \left(1 - \frac{3c^2}{2}\right)\varphi\sin\omega\cos\omega\cos(\theta + \psi)\right]\\
&-\left[c\sin\omega\cos\omega\cos(\pi + \psi) + \frac{c^2}{4}\sin^2\omega\cos(2\pi + 2\psi)\right]\\
&+\frac{3}{8}e'^2\sin^2\omega\cos(2\varpi' + 2\psi) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{2} - 4e'^2\right)\sin^2\omega\cos(2m't + 2\mu' + 2\psi)\\
&-e'\sin^2\omega[\cos(m't + \mu' + \varpi' + 2\psi) - \cos(3m't + 3\mu' - \varpi' + 2\psi)]\\
&+c\sin\omega\cos\omega\cos(2m't + 2\mu' - \pi + \psi)\\
&+\frac{13}{8}e'^2\sin^2\omega\cos(4m't + 4\mu' - 2\varpi' + 2\psi)\\
&-2ce'\sin\omega\cos\omega\left[\begin{array}{l}\cos(m't + \mu' + \varpi' - \pi + \psi)\\ -\cos(3m't + 3\mu' - \varpi' - \pi + \psi)\end{array}\right]\\
&-\frac{3}{4}c^2\sin^2\omega\cos(2m't + 2\mu' - 2\pi);
\end{aligned}$$

en multipliant entre elles les équations (17) et (18) on obtient au même degré

d'approximation,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\rho_0'^2\zeta_1'^2}{\rho'^5} = & -\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{2}c^2\right)\sin^2\omega+\left(1+\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{2}c^2\right)\varphi\cos(\theta+\psi)\sin\omega\cos\omega\right] \\
& +\left[-c\sin\omega\cos\omega\cos(\mathcal{N}+\psi)+\frac{c^2}{4}\sin^2\omega\cos(2\mathcal{N}+2\psi)\right] \\
& +\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}-\frac{c^2}{4}-\frac{5}{4}e'^2\right)\sin^2\omega\cos(2m't+2\mu'+2\psi) \\ -\frac{3}{2}e'\sin^2\omega\cos(m't+\mu'-\varpi')\end{array}\right] \\
& +\left[-\frac{1}{4}e'\sin^2\omega\cos(m't+\mu'+\varpi'+2\psi)+\frac{7}{4}e'\sin^2\omega\cos(3m't+3\mu'-\varpi'+2\psi)\right] \\
& +\left[c\sin\omega\cos\omega\cos(2m't+2\mu'-\mathcal{N}+\psi)\right] \\
(19) \qquad & +\left[\begin{array}{l}-\frac{9}{4}e'^2\sin^2\omega\cos(2m't+2\mu'-2\varpi') \\ +\frac{17}{4}e'^2\sin^2\omega\cos(4m't+4\mu'-2\varpi'+2\psi)\end{array}\right] \\
& +\left[-\frac{3}{2}ce'\sin\omega\cos\omega\cos(m't+\mu'-\varpi'+\mathcal{N}+\psi)\right. \\
& \quad -\frac{3}{2}ce'\sin\omega\cos\omega\cos(m't+\mu'-\varpi'-\mathcal{N}-\psi) \\
& \quad +\frac{7}{2}ce'\sin\omega\cos\omega\cos(m't+\mu'-\varpi'-\mathcal{N}+\psi) \\
& \quad \left.-\frac{1}{2}ce'\sin\omega\cos\omega\cos(3m't+3\mu'-\varpi'-\mathcal{N}+\psi)\right] \\
& -\left[\frac{3}{4}c^2\sin^2\omega\cos(2m't+2\mu'-2\mathcal{N})\right].
\end{aligned}
$$

Il est évident que, pour avoir l'expression de la quantité $-\frac{\rho_0^2\zeta_1^2}{\rho^5}$ qui se rapporte au Soleil, il suffira de faire $c=0$ dans la formule précédente et d'y remplacer en même temps m', μ', ϖ', e' par les quantités analogues m, μ, ϖ, e qui sont relatives au Soleil; on aura donc

$$
\begin{aligned}
-\frac{\rho_0^2\zeta_1^2}{\rho^5} = & -\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\sin^2\omega+\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\varphi\cos(\theta+\psi)\sin\omega\cos\omega\right] \\
& +\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e^2\right)\sin^2\omega\cos(2mt+2\mu+2\psi)-\frac{3}{2}e\sin^2\omega\cos(mt+\mu-\varpi)\right] \\
(20) \qquad & +\left[-\frac{1}{4}e\sin^2\omega\cos(mt+\mu+\varpi+2\psi)+\frac{7}{4}e\sin^2\omega\cos(3mt+3\mu-\varpi+2\psi)\right] \\
& +\left[-\frac{9}{4}e^2\sin^2\omega\cos(2mt+2\mu-2\varpi)+\frac{17}{4}e^2\sin^2\omega\cos(4mt+4\mu-2\varpi+2\psi)\right].
\end{aligned}
$$

On doit remarquer que la formule (18) renferme un terme qui a pour argument le double $2\varpi' + 2\psi$ de la longitude du périgée lunaire, tandis que la formule (19) ne contient aucun terme de ce genre. Dans le passage de la formule (15) à la formule (18), nous avons négligé complétement les termes qui sont multipliés par φ et qui dépendent en outre de la longitude v' de la Lune ou de celle de son nœud ; il est aisé de reconnaître qu'ils ne donneraient dans les formules (19) et (20) que des termes périodiques complétement négligeables à cause du facteur φ. A la vérité il semblerait que le premier des termes contenus dans la dernière parenthèse de la formule (15) doit introduire, dans les formules (19) et (20), des termes dépendant du périgée de la Lune ou du Soleil, mais il est aisé de s'assurer que ceux-ci se détruisent complétement et qu'il n'entre, en particulier, dans la formule (20) aucun terme séculaire dépendant du périgée solaire.

24. Les inégalités périodiques de la Lune qui proviennent des perturbations du Soleil, introduisent de nouveaux termes dans la formule (19); nous montrerons, dans la Section suivante, comment on peut obtenir tous ces termes et nous en étudierons l'influence; pour le moment nous ferons abstraction des inégalités périodiques Quant aux inégalités séculaires, celles de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie sont insensibles; les équations séculaires de la longitude moyenne et de l'anomalie moyenne de la Lune sont elles-mêmes peu considérables et il en est de même de la longitude moyenne du nœud; on peut donc regarder c, c' et m' comme constantes, $\mathfrak{N}$ et ϖ' comme variant proportionnellement au temps. A l'égard du Soleil, nous poserons

$$(21) \qquad e = e_0 + e_1 t, \quad \varphi \sin\theta = gt + rt^2, \quad \varphi\cos\theta = g't + r't^2,$$

mais nous ne considérerons pas, pour le moment, les termes qui renferment le carré du temps et qui produiraient dans les valeurs de ψ et de ω des termes en t^2 : ceux-ci sont tellement petits qu'il est tout à fait inutile d'y avoir égard, et d'ailleurs les inégalités séculaires des éléments de l'orbite de la Terre ne sont pas connus avec une précision assez grande pour qu'on puisse pousser le calcul jusqu'aux termes du troisième ordre. Nous ferons en outre abstraction de la petite inégalité séculaire de la longitude moyenne du Soleil; en conséquence la variation de cette longitude sera proportionnelle au temps, ainsi que la variation de l'anomalie moyenne.

Les termes périodiques des formules (19) et (20) qui contiennent l'un des facteurs c, c', e et qui dépendent du moyen mouvement de la Lune ou de celui du Soleil, n'introduisent dans les valeurs de ψ et de ω que de très-petits termes qu'on a coutume de négliger. Nous conserverons cependant le dernier terme de la troisième parenthèse de la formule (19) qui a pour argument l'anomalie moyenne de

la Lune, mais nous ferons abstraction de tous les termes contenus dans les parenthèses suivantes; pareillement nous conserverons dans la formule (20) le dernier terme de la deuxième parenthèse qui dépend de l'anomalie moyenne du Soleil et nous supprimerons les deux dernières parenthèses. D'après cela, en ayant égard aux formules (21) et en négligeant les termes périodiques multipliés par e, t, on aura

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{n\mathrm{C}}\mathrm{V} = &-\left[\varkappa\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_1^2\right)+\varkappa\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e'^2-\frac{3}{4}e^2\right)\right]\sin^2\omega \\
&-\left\{\left[\varkappa\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)+\varkappa\varepsilon\left(1+\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{2}e^2\right)\right](g'\cos\psi-g\sin\psi)\sin\omega\cos\omega\right. \\
&\qquad\left.+\frac{3}{2}\varkappa e_0 e_1\sin^2\omega\right\}t \\
&+\left[-\varkappa\varepsilon e\sin\omega\cos\omega\cos(\mathcal{N}+\psi)+\varkappa\varepsilon\frac{e^2}{4}\sin^2\omega\cos(2\mathcal{N}+2\psi)\right] \\
&+\left[\varkappa\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e_1^2\right)\sin^2\omega\cos(2mt+2\mu+2\psi)\right. \\
&\qquad\left.+\varkappa\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e'^2-\frac{e^2}{4}\right)\sin^2\omega\cos(2m't+2\mu'+2\psi)\right] \\
&-\left[\frac{3}{2}\varkappa e_0\sin^2\omega\cos(mt+\mu-\varpi)+\frac{3}{2}\varkappa\varepsilon e'\sin^2\omega\cos(m't+\mu'-\varpi')\right];
\end{aligned}
$$

cette expression de $\frac{1}{n\mathrm{C}}\mathrm{V}$ est de la forme

$$
(23)\quad \frac{1}{n\mathrm{C}}\mathrm{V} = -\mathrm{F}\sin^2\omega-\left[\mathrm{G}(g'\cos\psi-g\sin\psi)\sin\omega\cos\omega+\mathrm{H}\sin^2\omega\right]t+\mathrm{Z},
$$

F, G, H étant des constantes ainsi que les quantités g et g' définies plus haut, et Z désignant une somme de termes périodiques qui ont respectivement pour arguments la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, le double de cette même longitude, les longitudes moyennes du Soleil et de la Lune et les anomalies moyennes de ces astres.

Les équations (1) deviennent, au moyen de la formule (23),

$$
(24)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= 2\mathrm{F}\cos\omega+\left[\mathrm{G}(g'\cos\psi-g\sin\psi)\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}+2\mathrm{H}\cos\omega\right]t-\frac{1}{\sin\omega}\frac{d\mathrm{Z}}{d\omega}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \mathrm{G}\cos\omega(g'\sin\psi+g\cos\psi)t+\frac{1}{\sin\omega}\frac{d\mathrm{Z}}{d\psi}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on supprime les termes périodiques de la fonction Z, ces équations (24) donneront pour ψ et ω des valeurs qui varieront très-lentement, et que l'on pourra en conséquence développer suivant les puissances du temps; faisant donc

cette supposition et différentiant les équations (24), il vient

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -2F\sin\omega\frac{d\omega}{dt} + \left[G(g'\cos\psi - g\sin\psi)\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega} + 2H\cos\omega\right] + \ldots,$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = G\cos\omega\,(g'\sin\psi + g\cos\psi) + \ldots.$$

Désignons par ω_0 la valeur de ω à l'origine du temps, on aura simultanément pour $t = 0$,

$$\psi = 0, \qquad \frac{d\psi}{dt} = 2F\cos\omega_0, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = Gg'\frac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0} + 2H\cos\omega_0,$$

$$\omega = \omega_0, \qquad \frac{d\omega}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = Gg\cos\omega_0;$$

par conséquent les valeurs de ψ et de ω qui satisfont aux équations (24) peuvent être représentées par les formules

$$(25)\quad \begin{cases} \psi = (2F\cos\omega_0)t + \left(\frac{1}{2}Gg'\frac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0} + H\cos\omega_0\right)t^2 + \delta\psi, \\ \omega = \omega_0 + \left(\frac{1}{2}Gg\cos\omega_0\right)t^2 + \delta\omega, \end{cases}$$

en désignant par $\delta\psi$ et $\delta\omega$ les termes qu'il faut ajouter aux valeurs de ψ et de ω à raison de la fonction Z.

Si l'on porte ces valeurs de ψ et de ω dans les équations (24) et que l'on néglige, comme on doit le faire, les termes du troisième degré en t, il vient

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{d\delta\psi}{dt} = -\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}, \\ \frac{d\delta\omega}{dt} = \frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}, \end{cases}$$

pour déterminer les nouvelles inconnues $\delta\psi$ et $\delta\omega$. Il faut, dans les seconds membres de ces équations (26), remplacer ψ et ω par les valeurs tirées des formules (25), mais ici nous devons négliger les termes en t^2 et, si l'on tient compte des termes du premier degré en $\delta\psi$ et $\delta\omega$, on pourra écrire les équations (26) de la manière suivante :

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = -\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega} - \frac{d\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}}{d\omega}\delta\omega - \frac{d\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}}{d\psi}\delta\psi,$$

$$\frac{d\delta\omega}{dt} = \frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi} + \frac{d\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}}{d\omega}\delta\omega + \frac{d\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}}{d\psi}\delta\psi,$$

ce qui nous permettra de faire dans les seconds membres $\omega = \omega_0$, $\psi = 2\,\mathrm{F}\cos\omega_0 t$, et d'y substituer pour $\delta\omega$ et $\delta\psi$ les valeurs que donnent les équations (26) quand on fait également dans leurs seconds membres $\omega = \omega_0$ et $\psi = 2\,\mathrm{F}\cos\omega_0 t$; ainsi nous aurons

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\delta\psi}{dt} &= -\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega} - \frac{d\,\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}}{d\omega}\int\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}\,dt + \frac{d\,\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}}{d\psi}\int\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}\,dt,\\ \frac{d\delta\omega}{dt} &= \quad\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi} + \frac{d\,\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}}{d\omega}\int\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}\,dt - \frac{d\,\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\psi}}{d\psi}\int\frac{1}{\sin\omega}\frac{dZ}{d\omega}\,dt,\end{aligned}\right.$$

en prenant partout, dans les seconds membres, je le répète, $\omega = \omega_0$ et $\psi = \mathrm{F}\cos\omega_0 t$, après les différentiations. Si l'on compare ces équations (27) aux équations (26), on voit qu'elles n'en diffèrent que par des termes qui sont de l'ordre du carré des forces perturbatrices; nous pourrions donc nous en tenir aux équations (26) et c'est ce que nous ferons effectivement. Toutefois, comme le terme qui dépend de la longitude du nœud de la Lune introduit dans la première équation (27) un petit terme séculaire, il peut être intéressant de calculer ce terme et de montrer ainsi qu'il ne peut avoir aucune influence. Faisons donc

$$Z = -\varkappa\varepsilon c\sin\omega\cos\omega\cos(\mathfrak{N} + \psi)$$

et

$$\mathfrak{N} + \psi = \alpha t + \beta,$$

α et β étant deux constantes; les équations (27) deviennent

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = \varkappa\varepsilon c\,\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}\cos(\mathfrak{N}+\psi) + \frac{\varkappa^2\varepsilon^2c^2}{2\alpha}\left(1 + \frac{2\cos^4\omega}{\sin^2\omega}\right)\cos(2\mathfrak{N} + 2\psi) + \frac{\varkappa^2\varepsilon^2c^2}{2\alpha}(2 + 3\cos 2\omega),$$

$$\frac{d\delta\omega}{dt} = \varkappa\varepsilon c\cos\omega\sin(\mathfrak{N}+\psi) + \frac{\varkappa^2\varepsilon^2c^2}{2\alpha}\sin\omega\cos\omega\sin(2\mathfrak{N} + 2\psi),$$

et l'intégration donne

$$\delta\psi = \quad\frac{\varkappa\varepsilon c}{\alpha}\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}\sin(\mathfrak{N}+\psi) + \frac{\varkappa^2\varepsilon^2c^2}{4\alpha^2}\left(1 + \frac{2\cos^4\omega}{\sin^2\omega}\right)\sin(2\mathfrak{N} + 2\psi) + \frac{\varkappa^2\varepsilon^2c^2}{2\alpha}(2 + 3\cos 2\omega)t,$$

$$\delta\omega = -\frac{\varkappa\varepsilon c}{\alpha}\cos\omega\cos(\mathfrak{N}+\psi) - \frac{\varkappa^2\varepsilon^2c^2}{4\alpha^2}\sin\omega\cos\omega\cos(2\mathfrak{N} + 2\psi).$$

On pourra vérifier, au moyen des données numériques que nous ferons bientôt connaître, que ces formules doivent être réduites à leur premier terme, les autres étant complétement insignifiants à cause de l'excessive petitesse de leurs coefficients. Ainsi les valeurs de $\delta\omega$ et de $\delta\psi$ pourront être calculées par les for-

mules (26) dans les seconds membres desquelles on devra faire $\omega = \omega_0$ et $\psi = 2\,\mathrm{F}\cos\omega_0 t$. Si l'on effectue le calcul, que l'on représente comme précédemment par $\alpha t + 6$ la longitude $\mathcal{N} + \psi$, que l'on désigne par $\varpi_0 + \varpi_1 t$, $\varpi'_0 + \varpi'_1 t$ les longitudes ϖ et ϖ' des périgées du Soleil et de la Lune et que l'on fasse enfin, pour abréger,

$$(28)\left\{\begin{aligned}
\Psi = {} & \varkappa\varepsilon\frac{c}{a}\frac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0}\sin(\mathcal{N}+\psi) - \varkappa\varepsilon\frac{c^2}{4a}\cos\omega_0\sin(2\mathcal{N}+2\psi)\\
& - \varkappa\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e_0^2\right)\cos\omega_0}{m+2\,\mathrm{F}\cos\omega_0}\sin(2mt+2\mu+2\psi)\\
& - \varkappa\varepsilon\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e'^2-\frac{c^2}{4}\right)\cos\omega_0}{m'+2\,\mathrm{F}\cos\omega_0}\sin(2m't+2\mu'+2\psi)\\
& + 3\varkappa\frac{e_0}{m-\varpi_1}\cos\omega_0\sin(mt+\mu-\varpi) + 3\varkappa\varepsilon\frac{e'}{m'-\varpi'_1}\cos\omega_0\sin(m't+\mu'-\varpi'),\\
\Omega = {} & -\varkappa\varepsilon\frac{c}{a}\cos\omega_0\cos(\mathcal{N}+\psi) + \varkappa\varepsilon\frac{c^2}{4a}\sin\omega_0\cos(2\mathcal{N}+2\psi)\\
& + \varkappa\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e_0^2\right)\sin\omega_0}{m+2\,\mathrm{F}\cos\omega_0}\cos(2mt+2\mu+2\psi)\\
& + \varkappa\varepsilon\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e'^2-\frac{c^2}{4}\right)\sin\omega_0}{m'+2\,\mathrm{F}\cos\omega_0}\cos(2m't+2\mu'+2\psi),
\end{aligned}\right.$$

on trouvera

$$(29)\qquad\left\{\begin{aligned}
\delta\psi &= \Psi - \Psi_0,\\
\delta\omega &= \Omega - \Omega_0,
\end{aligned}\right.$$

Ψ_0 et Ω_0 désignant les valeurs des quantités Ψ et Ω à l'origine du temps.

Si l'on fait encore, pour abréger,

$$(30)\left\{\begin{aligned}
a &= 2\,\mathrm{F}\cos\omega_0 = \varkappa\left(1+\frac{3}{2}e_0^2\right)\cos\omega_0 + \varkappa\varepsilon\left(1+\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{2}c^2\right)\cos\omega_0,\\
b &= \frac{1}{2}\,\mathrm{G}g'\frac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0} + \mathrm{H}\cos\omega_0 = \varkappa\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_0^2\right)g'\frac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0} + \frac{3}{2}e_0e_1\cos\omega_0\right]\\
&\quad + \varkappa\varepsilon\left(1+\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{2}c^2\right)g'\frac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0},\\
f &= \frac{1}{2}\,\mathrm{G}g\cos\omega_0 = \varkappa\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_0^2\right)g\cos\omega_0 + \varkappa\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e'^2-\frac{3}{4}c^2\right)g\cos\omega_0,
\end{aligned}\right.$$

les formules (25) deviendront

$$(31)\qquad\left\{\begin{aligned}
\psi &= at + bt^2 + \Psi - \Psi_0,\\
\omega &= \omega_0 + ft^2 + \Omega - \Omega_0;
\end{aligned}\right.$$

telles sont les équations qui détermineront à chaque instant la position de l'équateur vrai à l'égard de l'écliptique fixe.

Si l'on néglige les quantités périodiques Ψ et Ω, les équations (31) deviennent

$$(32)\qquad \begin{cases} \psi = at + bt^2 - \Psi_0, \\ \omega = \omega_0 + ft^2 - \Omega_0; \end{cases}$$

le plan auquel se rapportent ces formules (32) est dit l'*équateur moyen* et l'angle ω déterminé par la seconde équation est l'*inclinaison moyenne* de l'équateur mobile sur l'écliptique fixe. Si l'on veut avoir la position de l'équateur moyen à l'origine du temps, il faudra faire $t = 0$ dans les formules (32) qui deviendront alors

$$\psi = -\Psi_0, \quad \omega = \omega_0 - \Omega_0.$$

On voit d'après cela que si l'on désigne par ω_0 l'angle que forme l'écliptique fixe, à l'origine du temps, non plus avec l'équateur vrai, mais avec l'équateur moyen, et qu'en outre on prenne pour origine de l'angle ψ l'intersection de l'écliptique et du même équateur moyen à l'origine du temps, il faudra remplacer dans nos formules ψ par $\psi - \Psi_0$, ω_0 par $\omega_0 + \Omega_0$, et alors les équations (31) deviendront

$$(33)\qquad \begin{cases} \psi = at + bt^2 + \Psi, \\ \omega = \omega_0 + ft^2 + \Omega. \end{cases}$$

Les longitudes moyennes se comptent sur l'écliptique vraie à partir de l'équinoxe moyen; d'après nos notations $\pi + \psi$ désigne dans les formules (28) la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie comptée à partir de l'intersection de l'écliptique fixe et de l'équateur moyen mobile; aussi en toute rigueur la longitude dont il s'agit est formée de deux angles dont l'un est situé dans l'écliptique fixe et l'autre dans l'écliptique vraie; mais comme l'angle φ des deux écliptiques varie très-lentement et que dans le triangle sphérique qu'elles forment avec l'équateur moyen, la différence des côtés qui comprennent l'angle φ est proportionnelle à cet angle, la quantité $\pi + \psi$ peut être remplacée dans les formules (28) par la longitude moyenne ☊ du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, comptée tout entière dans ce plan à partir de l'équinoxe vernal moyen. Si, en outre, on désigne par ☉ et ☾ les longitudes du Soleil et de la Lune, par $A_☉$ et $A_☾$ les anomalies moyennes de ces astres,

les formules (28) deviendront

$$(34)\quad \begin{cases} \Psi = \varkappa\varepsilon \dfrac{c}{\alpha}\dfrac{\cos 2\omega_0}{\sin\omega_0}\sin \text{☊} - \varkappa\varepsilon\dfrac{c^2}{4\alpha}\cos\omega_0 \sin 2\text{☊} \\ \quad - \varkappa\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4}e_0^2\right)\cos\omega_0}{m+a}\sin 2\odot - \varkappa\varepsilon\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4}e'^2-\dfrac{c^2}{4}\right)\cos\omega_0}{m'+a}\sin 2\text{☾} \\ \quad + 3\varkappa\dfrac{e_0}{m-\varpi_1}\cos\omega_0\sin A_{\odot} + 3\varkappa\varepsilon\dfrac{e'}{m'-\varpi'_1}\cos\omega_0\sin A_{\text{☾}}. \\ \Omega = -\varkappa\varepsilon\dfrac{c}{\alpha}\cos\omega_0\cos \text{☊} + \varkappa\varepsilon\dfrac{c^2}{4\alpha}\sin\omega_0\cos 2\text{☊} \\ \quad + \varkappa\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4}e_0^2\right)\sin\omega_0}{m+a}\cos 2\odot + \varkappa\varepsilon\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4}e'^2-\dfrac{c^2}{4}\right)\sin\omega_0}{m'+a}\cos 2\text{☾} \end{cases}$$

Les symboles $\odot$ et ☾ désignent habituellement les longitudes vraies du Soleil et de la Lune, tandis que dans les formules précédentes ils devraient représenter les longitudes moyennes; mais on peut sans inconvénient substituer à celles-ci les longitudes vraies, à cause de la petitesse des coefficients des termes qui dépendent de ces arguments. Il est aisé d'ailleurs de calculer les termes de correction qu'il faudrait introduire dans les formules (34), à raison de ce changement, et l'on reconnaît que ces termes sont de l'ordre de grandeur de ceux que nous avons négligés précédemment.

Si l'on représente par ψ' et ω' les valeurs de ψ et de ω qui se rapportent à l'équateur moyen, on aura

$$(35)\quad \begin{cases} \psi' = at + bt^2, \\ \omega' = \omega_0 + ft^2. \end{cases}$$

Le mouvement de l'équateur moyen produit le phénomène de la *précession des équinoxes* et la quantité ψ' est dite la *précession luni-solaire*. Le mouvement de l'équateur vrai relativement à l'équateur moyen constitue le phénomène de la *nutation*. La quantité Ψ est dite la *nutation de la longitude*, Ω est la *nutation de l'obliquité*. Les termes les plus considérables des formules de la nutation ont pour argument la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie et leurs coefficients contiennent en facteur l'inclinaison de cette orbite; par où l'on voit que si le mouvement de la Lune avait lieu dans l'écliptique, ces termes disparaîtraient et qu'il ne resterait plus dans les formules (34) que les très-petits termes qui dépendent des longitudes et des anomalies moyennes du Soleil et de la Lune; en un mot il n'y aurait plus qu'une très-faible nutation. Remarquons aussi que, conformément au langage astronomique, les termes de la nutation ne sont autre chose que les *inégalités périodiques* de la précession luni-solaire.

Désignons par λ la latitude du pôle boréal *vrai* P, relative à l'écliptique fixe, et par $\mathcal{L}$ la longitude de ce pôle comptée à partir du point fixe ♈; soient aussi λ' et $\mathcal{L}'$ la latitude et la longitude du pôle *moyen* P'; on aura

$$\mathcal{L} = 90^\circ + \psi, \qquad \mathcal{L}' = 90^\circ + \psi',$$
$$\lambda = 90^\circ - \omega, \qquad \lambda' = 90^\circ - \omega',$$

et, par suite,

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = -\Psi, \qquad \lambda' - \lambda = \Omega.$$

Concevons le plan tangent en P' à la sphère céleste et traçons dans ce plan deux axes rectangulaires $P'x$ et $P'y$ dont le premier soit dirigé vers le pôle boréal de l'écliptique fixe, et le second dans le sens direct suivant lequel croissent les longitudes; on peut admettre que le pôle P est situé dans le plan tangent et, en appelant x et y ses coordonnées relatives aux axes $P'x$ et $P'y$, on aura

$$x = \lambda' - \lambda = \Omega, \qquad y = (\mathcal{L}' - \mathcal{L}) \sin \omega' = -\Psi \sin \omega'.$$

Si l'on néglige le petit terme en t^2 dans l'expression de ω' et que l'on réduise Ψ et Ω à leur terme principal qui dépend de l'argument ☊, on aura

$$x = -\varkappa\varepsilon \frac{c}{\alpha} \cos \omega_0 \cos ☊ = a \cos ☊,$$

$$y = -\varkappa\varepsilon \frac{c}{\alpha} \cos 2\omega_0 \sin ☊ = \beta \sin ☊,$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

On voit par là que le pôle vrai décrit une petite ellipse dont le pôle moyen occupe le centre, et la période de ce mouvement est la même que celle de la révolution des nœuds de la Lune; le rapport des axes de l'*ellipse de nutation* est

$$\frac{\beta}{a} = \frac{\cos 2\omega_0}{\cos \omega_0},$$

comme d'Alembert l'a trouvé le premier. Enfin, si l'on néglige les termes en t^2 dans les expressions de ψ' et de ω', le pôle moyen décrit un cercle d'un mouvement uniforme autour de l'axe de l'écliptique fixe.

25. Occupons-nous maintenant de la partie δV de la fonction perturbatrice et cherchons quelle peut être l'influence des termes que cette quantité introduit dans les formules de la précession et de la nutation. On peut exprimer la quantité $\frac{\zeta'_1}{\rho'} - \frac{5}{3}\frac{\zeta'^3_1}{\rho'^3}$ en fonction de la longitude v' de la Lune, au moyen de l'équation (14);

si l'on remplace ensuite υ' par sa valeur tirée de la formule (16), que l'on multiplie le résultat par $\frac{\rho'^4_0}{\rho'^4}$, que l'on néglige enfin tous les termes du second degré en e et e', ainsi que les premières puissances de ces quantités et de l'angle φ dans les termes périodiques qui dépendent du moyen mouvement de la Lune, on trouvera sans difficulté

$$\frac{\rho'^2_0 \zeta'_1}{\rho'^3} - \frac{5}{3}\frac{\rho'^2_0 \zeta'^3_1}{\rho'^5} = e' \sin\omega\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\omega\right)\sin(\varpi' + \psi)$$
$$+ \sin\omega\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\omega\right)\sin(m't + \mu' + \psi) + \frac{5}{12}\sin^3\omega\sin(3m't + 3\mu' + 3\psi);$$

on obtiendra une expression analogue pour le Soleil et l'on aura par la formule (6)

$$(36)\quad \begin{aligned} \frac{1}{nC}\delta V &= \varepsilon'\varkappa\frac{\iota}{\rho_0} e \sin\omega\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\omega\right)\sin(\varpi + \psi) \\ &+ \varepsilon'\varepsilon\varkappa\frac{\iota}{\rho'_0} e' \sin\omega\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\omega\right)\sin(\varpi' + \psi) \\ &+ \varepsilon'\varkappa\sin\omega\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\omega\right)\left[\frac{\iota}{\rho_0}\sin(mt + \mu + \psi) + \varepsilon\frac{\iota}{\rho'_0}\sin(m't + \mu' + \psi)\right] \\ &+ \frac{5}{12}\varepsilon'\varkappa\sin^3\omega\left[\frac{\iota}{\rho_0}\sin(3mt + 3\mu + 3\psi) + \varepsilon\frac{\iota}{\rho'_0}\sin(3m't + 3\mu' + 3\psi)\right]. \end{aligned}$$

Le rapport ε' qui multiplie tous les termes de cette formule peut être déterminé au moyen des observations du pendule; M. Peters a trouvé, par la discussion d'un grand nombre d'observations,

$$\varepsilon' = +\,0{,}0585.$$

On peut conclure de ce résultat et aussi de la petitesse des parallaxes $\frac{\iota}{\rho_0}$, $\frac{\iota}{\rho'_0}$ que les termes de la formule (36) qui dépendent du périgée de la Lune, de la longitude moyenne de cet astre ou de celle du Soleil sont au plus de l'ordre de ceux que nous avons négligés dans la formule (23). Quant au premier terme de la formule (36), il peut être regardé comme un terme séculaire, à cause de la lenteur avec laquelle varie la longitude du périgée solaire; si l'on désigne par $\delta\psi$ et $\delta\omega$ les valeurs qu'il faut ajouter à raison de ce terme aux valeurs de ψ et de ω précédemment obtenues, on aura par les formules (1)

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = \varepsilon'\varkappa\frac{\iota}{\rho_0} e_0 \frac{\cos\omega_0}{\sin\omega_0}\left(\frac{15}{4}\sin^2\omega_0 - 1\right)\sin(\varpi + \psi),$$
$$\frac{d\delta\omega}{dt} = \varepsilon'\varkappa\frac{\iota}{\rho_0} e_0 \sin\omega_0\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2\omega_0\right)\cos(\varpi + \psi);$$

en remplaçant $\varpi + \psi$ par $\varpi_0 + \varpi_1 t$ et en intégrant, il vient

$$\partial\psi = -\varepsilon' x \frac{1}{\rho_0} \frac{e_0}{\varpi_1} \frac{\cos\omega_0}{\sin\omega_0} \left(\frac{15}{4} \sin^2\omega_0 - 1 \right) \cos(\varpi_0 + \varpi_1 t),$$

$$\partial\omega = \varepsilon' x \frac{1}{\rho_0} \frac{e_0}{\varpi_1} \sin\omega_0 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2\omega_0 \right) \sin(\varpi_0 + \varpi_1 t):$$

développant le sinus et le cosinus de $\varpi_0 + \varpi_1 t$ et négligeant les parties constantes qu'on peut supposer comprises dans les valeurs initiales de ψ et de ω admises précédemment, on obtient enfin

$$\partial\psi = \left[\varepsilon' x \frac{1}{\rho_0} e_0 \frac{\cos\omega_0}{\sin\omega_0} \left(\frac{15}{4} \sin^2\omega_0 - 1 \right) \sin\varpi_0 \right] t.$$

$$\partial\omega = \left[\varepsilon' x \frac{1}{\rho_0} e_0 \sin\omega_0 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2\omega_0 \right) \cos\varpi_0 \right] t,$$

telles sont les corrections qu'il faudrait faire subir aux formules de la précession à raison de la différence d'aplatissement des deux hémisphères de la Terre ; mais dans la pratique de l'astronomie il n'y a pas lieu d'y avoir égard, car les valeurs précédentes de $\partial\psi$ et $\partial\omega$ n'atteignent pas *une seconde* en *cent mille ans*.

26. Les formules (33) font connaître les déplacements de l'équateur relativement à l'écliptique fixe, mais il est nécessaire de savoir aussi assigner la situation de ce même plan par rapport à l'écliptique vraie ; nous allons nous occuper présentement de cette recherche. Considérons la sphère céleste géocentrique ; soient ♈'E l'écliptique fixe et ♈ son intersection avec l'équateur *moyen* de l'époque prise pour origine. Construisons, pour une époque quelconque, l'écliptique ♈″ NE′ et l'équateur *vrai* ♈′ ♈″ ε′ ; N sera le nœud ascendant du premier cercle et ♈′ le nœud descendant du deuxième cercle sur l'écliptique fixe ; enfin ♈″ sera l'équinoxe vernal vrai de l'époque que l'on considère. D'après les notations que nous avons adoptées, on a

$$\Upsilon' N \Upsilon'' = \varphi, \quad \Upsilon N = \theta, \quad N \Upsilon' \Upsilon'' = \omega, \quad \Upsilon\Upsilon' = \psi;$$



abaissons du point ♈″ l'arc de grand cercle ♈″F perpendiculaire sur l'écliptique

fixe et posons

$$N\Upsilon''\epsilon' = \omega_1, \quad \Upsilon F = \psi_1, \quad \Upsilon'\Upsilon'' = \upsilon;$$

les triangles sphériques $\Upsilon'\Upsilon''N$ et $\Upsilon'\Upsilon''F$ donnent les relations

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\omega_1 &= \cos\omega\cos\varphi - \sin\omega\sin\varphi\cos(\psi+\theta), \\ \sin\upsilon &= \frac{\sin\varphi\sin(\psi+\theta)}{\sin\omega_1}, \\ \operatorname{tang}(\psi-\psi_1) &= \cos\omega\operatorname{tang}\upsilon, \end{aligned} \right.$$

qui nous permettront de calculer les deux nouvelles inconnues ω_1 et ψ_1. Considérons d'abord les deux premières équations (37); si l'on y regarde ω_1 et υ comme des fonctions de φ et qu'on développe ces quantités par la formule de Maclaurin, en s'arrêtant aux termes en φ^2, il vient

$$\omega_1 = \omega + \varphi\cos(\psi+\theta) + \frac{1}{2}\varphi^2\cot\omega\sin^2(\psi+\theta),$$

$$\upsilon = \frac{\varphi\sin(\psi+\theta)}{\sin\omega} - \frac{\varphi^2\sin 2(\psi+\theta)\cos\omega}{2\sin^2\omega};$$

la troisième équation (37) donne ensuite, au même degré d'approximation,

$$\psi - \psi_1 = \upsilon\cos\omega = \varphi\sin(\psi+\theta)\cot\omega - \frac{1}{2}\varphi^2\sin 2(\psi+\theta)\cot^2\omega;$$

nous nous arrêtons aux termes en φ^2, parce que n'ayant calculé dans ω et dans ψ que les termes en t^2, nous ne devons évaluer ω_1 et ψ_1 qu'à cette même approximation. Cela posé, nous pouvons faire

$$\cos(\psi+\theta) = \cos\theta - at\sin\theta, \quad \sin(\psi+\theta) = \sin\theta + at\cos\theta,$$

dans les termes des formules précédentes, qui sont multipliés par φ, et négliger ψ complétement dans les termes multipliés par φ^2; nous pouvons aussi, dans les mêmes termes, substituer ω_0 à ω, en sorte que l'on aura

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \psi - (\varphi\sin\theta)\cot\omega_0 - at(\varphi\cos\theta)\cot\omega_0 + \cot^2\omega_0(\varphi\sin\theta)(\varphi\cos\theta), \\ \omega_1 &= \omega + \varphi\cos\theta - at(\varphi\sin\theta) + \frac{1}{2}\cot\omega_0(\varphi\sin\theta)^2. \end{aligned} \right.$$

Dans l'état actuel de l'astronomie les quantités $\varphi\sin\theta$ et $\varphi\cos\theta$ ne sont pas connues avec toute la précision désirable; les valeurs que l'on a obtenues sont affectées de l'erreur qui résulte de l'incertitude des masses des planètes; nous

poserons

$$(39)\qquad \begin{cases} \varphi \sin\theta = (g + \Gamma)t + rt^2, \\ \varphi \cos\theta = (g' + \Gamma')t + r't^2, \end{cases}$$

g et g' étant les valeurs calculées des coefficients de t, Γ et Γ' les erreurs commises dans ce calcul. Si l'on fait usage de ces formules, que l'on substitue à ψ et à ω les valeurs tirées des équations (33) et enfin que l'on pose, pour abréger,

$$(40)\qquad \begin{cases} P = a - (g + \Gamma)\cot\omega_0, \\ P' = b - (ag' + r)\cot\omega_0 + gg'\cot^2\omega_0, \\ Q = g' + F', \\ Q' = f + r' - ag + \frac{1}{2}g^2\cot\omega_0, \end{cases}$$

les équations (38) deviendront, en négligeant les termes de degrés supérieurs au deuxième,

$$(41)\qquad \begin{cases} \psi_1 = Pt + P't^2 + \Psi, \\ \omega_1 = \omega_0 + Qt + Q't^2 + \Omega; \end{cases}$$

et si l'on désigne par ψ'_1 et ω'_1 les parties séculaires de ψ_1 et de ω_1, on aura les formules

$$(42)\qquad \begin{cases} \psi'_1 = Pt + P't^2, \\ \omega'_1 = \omega_0 + Qt + Q't^2, \end{cases}$$

qui sont relatives à l'équateur moyen, tandis que les formules (41) se rapportent à l'équateur vrai. L'angle ω_1 est l'obliquité *vraie* de l'écliptique à l'époque t, ω'_1 est l'obliquité *moyenne* à la même époque. La quantité ψ'_1 est dite la *précession générale;* Laplace la nomme aussi la précession *apparente;* il est facile de justifier cette dénomination, car si l'on rabat l'arc N γ de l'écliptique fixe sur l'écliptique mobile au moyen de l'arc de grand cercle Υ G, on aura sensiblement G $\Upsilon'' = \Upsilon$ F à cause de la petitesse de l'angle φ; si donc on suppose que le grand cercle $\Upsilon'\Upsilon''\varepsilon'$ soit l'équateur moyen et non plus l'équateur vrai, on aura $\psi'_1 =$ G Υ'', d'où il résulte que cet angle ψ'_1 exprime bien la quantité dont l'équinoxe moyen s'est déplacé sur l'écliptique mobile. Les deux constantes a et P sont positives; il en est de même des quantités ψ' et ψ'_1, par conséquent, d'après le sens dans lequel ces angles sont comptés, on voit que le mouvement de l'équinoxe moyen est rétrograde sur l'écliptique mobile, comme sur l'écliptique fixe.

Désignons par $\Delta\psi'_1$ la quantité dont croît ψ'_1 dans le temps Δt, on aura, par la

première équation (42),

$$\Delta\psi'_1 = (P + 2P't)\,\Delta t.$$

Si l'on prend l'année pour unité de temps et que l'on fasse $\Delta t = 1$, la formule précédente devient

$$\Delta\psi'_1 = P + 2P't;$$

cette quantité $P + 2P't$ est nommée la *précession générale annuelle*, et par conséquent P représente la valeur de la précession générale annuelle à l'époque qui est prise pour origine du temps.

Les constantes qui figurent dans nos formules de précession et de nutation dépendent des éléments de l'orbite de la Terre et de celle de la Lune, et en outre des deux quantités x et ε. Il serait très-difficile de calculer, par d'autres théories, et avec une exactitude suffisante, les constantes x et ε; aussi les astronomes ont-ils suivi une marche différente pour réduire en nombres les coefficients des formules de la précession et de la nutation. On a déterminé directement par les observations la valeur de la précession générale annuelle P à l'époque prise pour origine du temps, et l'on a nommé cette quantité la *constante de la précession;* on a déterminé également par les observations la valeur du coefficient de $\cos \Omega$ dans la valeur de Ω et ce coefficient a reçu le nom de *constante de la nutation*. Ces deux constantes étant connues, il est aisé de calculer par nos équations x et ε, et l'on peut ensuite déterminer la masse de la Lune ainsi que le rapport $\frac{2C - A - B}{C}$ dont la moitié exprime la mesure de l'aplatissement moyen de la Terre. Il faut remarquer en outre qu'en suivant cette marche on se rendra indépendant des erreurs dont peuvent être affectées l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire; ces erreurs pourront altérer un peu la valeur de ε, mais elles ne changeront pas d'une manière sensible les coefficients de nos formules.

27. Occupons-nous maintenant de l'évaluation numérique des coefficients. Nous prendrons pour origine du temps l'époque du 1er janvier 1850, en sorte que t sera positif pour les époques postérieures à 1850 et négatif pour les époques antérieures; l'unité de temps sera l'année julienne de 365,25 jours solaires moyens. Nous admettrons pour la précession générale P en 1850 la valeur 50",23572, employée dans le Tome II des *Annales* et pour la constante N de la nutation la valeur 9",223 obtenue par M. Peters; en conséquence nous poserons

$$(43)\qquad P = 50'',23572\,(1 + \eta), \quad N = 9'',223\,(1 + \sigma),$$

η et σ étant de très-petites fractions que nous conserverons dans nos formules afin

qu'on puisse rectifier celles-ci, à raison des changements qu'on croirait devoir faire subir aux valeurs de P et de N. Nous admettrons aussi avec M. Le Verrier les valeurs suivantes relatives au Soleil :

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} e_0 &= 0{,}016770464,\\ e_1 &= -0{,}08951 \sin 1'',\\ g &= +0'',05888,\\ g' &= -0'',47566,\\ r &= +0'',000019 64,\\ r' &= +0'',000005 68,\end{aligned}\right.$$

et

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \Gamma &= 0'',00625\,\nu + 0'',07567\,\nu' + 0'',00733\,\nu''' - 0'',02496\,\nu^{\text{iv}} - 0'',00540\,\nu^{\text{v}},\\ \Gamma' &= -0'',00523\,\nu - 0'',28899\,\nu' - 0'',00832\,\nu''' - 0'',16009\,\nu^{\text{iv}} - 0'',01313\,\nu^{\text{v}}.\end{aligned}\right.$$

$1+\nu$, $1+\nu'$, $1+\nu'''$, $1+\nu^{\text{iv}}$, $1+\nu^{\text{v}}$ étant les facteurs par lesquels il faut multiplier respectivement les valeurs données dans le Tome II des *Annales* (page 101) pour les masses de *Mercure*, *Vénus*, *Mars*, *Jupiter* et *Saturne*. Pour l'excentricité et pour l'inclinaison de l'orbite lunaire, nous admettrons les valeurs

$$(46)\qquad e' = 0{,}054844, \quad c = 0{,}089826;$$

à l'égard des moyens mouvements qui figurent dans les formules (34) nous prendrons

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} m &= 6{,}28308, \quad \varpi_1 = 0{,}00005,\\ m' &= 83{,}99685, \quad \varpi'_1 = 0{,}70994, \quad \alpha = -0{,}33782,\end{aligned}\right.$$

et nous négligerons a devant m ou m', ce qui n'a aucun inconvénient. Enfin nous emploierons pour l'obliquité moyenne de l'écliptique à l'époque de 1850, la valeur

$$(48)\qquad \omega_0 = 23^\circ\, 27'\, 32''$$

qui a été admise dans le Tome II des *Annales*. Au moyen de toutes ces données, les formules (30) et (34) deviennent

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= +(\bar{1},9627163)\,\varkappa + (\bar{1},9592237)\,\varkappa\varepsilon,\\ b &= -(\bar{6},2986850)\,\varkappa - (\bar{6},2930005)\,\varkappa\varepsilon,\\ f &= +(\bar{7},11720)\,\varkappa + (\bar{7},11373)\,\varkappa\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

$$(50)\quad \begin{cases} \Psi = \varkappa\varepsilon\left[-(\bar{1},65918)\sin\Omega + (\bar{3},7386)\sin 2\Omega\right] \\ \quad + \varkappa\varepsilon\left[-(\bar{3},7322)\sin 2☾ + (\bar{3},2582)\sin A_{☾}\right] \\ \quad + \varkappa\left[-(\bar{2},86364)\sin 2\odot + (\bar{3},8660)\sin A_{\odot}\right], \\ \Omega = \varkappa\varepsilon\left[+(\bar{1},38725)\cos\Omega - (\bar{3},3760)\cos 2\Omega\right] \\ \quad + \varkappa\varepsilon(\bar{3},3696)\cos 2☾ \\ \quad + \varkappa(\bar{2},50108)\cos 2\odot; \end{cases}$$

dans ces formules les nombres écrits entre parenthèses expriment les logarithmes des coefficients et non ces coefficients eux-mêmes.

Il est aisé maintenant d'obtenir les valeurs numériques des quantités a, $\varkappa$ et $\varkappa\varepsilon$. La première équation (40) nous donne

$$a = P + (g + \Gamma)\cot\omega_0,$$

et en substituant à P, g, Γ et ω_0 les valeurs tirées des formules (43), (44), (45) et (48) il vient

$$(51)\quad \begin{aligned} a = 50'',37140 + 50'',236\eta + 0'',01445\nu + 0'',17426\nu' \\ + 0'',01689\nu''' - 0'',05752\nu^{\text{iv}} - 0'',01244\nu^{\text{v}}; \end{aligned}$$

nous obtiendrons ensuite la valeur du produit $\varkappa\varepsilon$ en égalant le coefficient de $\cos\Omega$ dans la deuxième équation (50) à la valeur N donnée par la deuxième équation (43); on a ainsi

$$(52)\quad \varkappa\varepsilon(\bar{1},38725) = 9'',223(1+\sigma);$$

si l'on porte ces valeurs de a et de $\varkappa\varepsilon$ dans la première équation (49) on déduira la valeur de $\varkappa$ qui est, en négligeant ici les corrections des masses.

$$\varkappa = 17'',378 + 54'',739\eta - 37'',508\sigma,$$

ou

$$(53)\quad \varkappa = 17'',378[1 + 3,150\eta - 2,158\sigma],$$

et enfin l'équation (52) donnera pour ε,

$$(54)\quad \varepsilon = 2,1758\frac{1+\sigma}{1 + 3,150\eta - 2,158\sigma} = 2,1758(1 + 3,158\sigma - 3,150\eta).$$

Si l'on prend la masse de la Terre pour unité, celle du Soleil est

$$L = 354936,$$

et la formule (2) donne alors

$$L' = 354936\,\varepsilon\left(\frac{\rho'_1}{\rho_1}\right)^3;$$

en remplaçant par ε la valeur tirée de la formule (54) et en prenant $\frac{\rho'_1}{\rho_0} = 0{,}0025$, on obtient

$$L' = \frac{1}{82{,}87}\left[1 + 3{,}158\,\sigma - 3{,}150\,\kappa\right].$$

L'équation (3) donne enfin

$$\frac{2C - A - B}{2C} = \frac{2n\kappa}{3m^2};$$

nous avons employé précédemment la valeur $m = 6{,}28308$ et l'on a $\frac{m}{n} = 0{,}0027304$; en multipliant le second membre de la formule précédente par sin 1″ pour ramener les moyens mouvements à la même unité, on obtiendra le résultat

$$(55)\qquad \frac{2C - A - B}{2C} = \frac{1}{305{,}6}\left[1 + 3{,}150\,\kappa - 2{,}158\,\sigma\right],$$

et si l'on admet que les moments A et B soient égaux, on aura à peu près

$$\frac{C - A}{C} = \frac{1}{306},$$

comme nous l'avions annoncé précédemment.

Les valeurs des quantités a, κ et $\kappa\varepsilon$ étant ainsi déterminées, on obtiendra les constantes b, f, P′, Q, Q′ au moyen des équations (49) et (40); en achevant tous ces calculs, les équations (33), (41) et (50) deviennent enfin

$$(56)\quad \begin{cases} \psi = \begin{bmatrix} 50'',37140 + 50'',236\eta + 0'',0145\,\nu + 0'',1743\,\nu' \\ \qquad + 0'',0169\,\nu''' - 0'',0575\,\nu^{iv} - 0'',0124\,\nu^{v} \end{bmatrix} t - 000\,108\,806\,t^2 + \Psi, \\ \omega = 23^\circ 27' 32'' + 0'',000\,007\,189\,t^2 + \Omega, \\ \psi_1 = 50'',23572\,(1 + \kappa)\,t + 0'',000\,112\,900\,t^2 + \Psi, \\ \omega_1 = 23^\circ 27' 32'' - \begin{bmatrix} 0'',47566 + 0'',0053\,\nu + 0'',2888\,\nu' \\ \qquad + 0'',0083\,\nu''' + 0'',1601\,\nu^{iv} + 0'',0131\,\nu^{v} \end{bmatrix} t \\ \qquad - 0'',000\,001\,490\,t^2 + \Omega, \end{cases}$$

et

$$(57)\quad \begin{cases} \Psi = -17'',251\,(1 + \sigma)\sin ☊ + 0'',207\sin 2☊ \\ \qquad - 0'',204\sin 2☾ - 1'',269\left[1 + 3{,}15\,\kappa - 2{,}16\,\sigma\right]\sin 2\odot \\ \qquad + 0'',069\sin A_{☾} + 0'',128\sin A_{\odot}, \\ \Omega = +9'',223\,(1 + \sigma)\cos ☊ - 0'',090\cos 2☊ \\ \qquad + 0'',089\cos 2☾ + 0'',551\left[1 + 3{,}15\,\kappa - 2{,}16\,\sigma\right]\cos 2\odot. \end{cases}$$

L'attraction des planètes déplace, comme on voit, l'écliptique, de manière à diminuer la précession qui aurait lieu sans cette action ; cette diminution, qui est l'excès de la précession luni-solaire sur la précession générale, a pour valeur

$$(58) \qquad \psi - \psi_1 = 0'',13568\,t - 0'',000\,22170\,t^2;$$

on voit aussi que l'inclinaison moyenne de l'équateur sur l'écliptique vraie renferme dans son expression un terme proportionnel au temps, tandis que l'inclinaison sur l'écliptique fixe ne contient qu'un terme du second ordre ; en sorte que la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique est entièrement due au déplacement de ce plan et, par conséquent, aux perturbations planétaires.

Si l'on compare les formules (56) et (57) à celles que M. Le Verrier a données dans le Tome II des *Annales*, on reconnaîtra qu'il n'existe que de très-légères différences ; j'ai conservé dans l'expression de Ψ les petits termes qui dépendent de l'anomalie moyenne du Soleil et de celle de la Lune, surtout pour donner une idée du peu d'importance de tous les termes périodiques qui ont été négligés dans mon analyse.

SECTION V.

De l'influence des inégalités lunaires dans le phénomène de la nutation.,
Des formules de la nutation, d'après M. Peters.

28. Dans la construction des formules de la précession et de la nutation, nous avons pris pour les coordonnées de la Lune celles qui résultent des formules du mouvement elliptique. Or ces formules sont loin de représenter le mouvement réel de la Lune ; la longitude moyenne de cet astre, le rayon vecteur et les éléments de l'orbite sont affectés d'inégalités périodiques considérables qui proviennent des perturbations du Soleil, il convient donc d'en étudier l'influence. On pressent que cette influence doit être bien peu sensible, car l'équation du centre elle-même n'introduit que de très-petits termes dans les formules de la nutation ; on voit effectivement, en se reportant aux équations (34) de la Section précédente, que l'hypothèse $e' = 0$ n'apporterait dans ces équations qu'une très-légère modification ; elle ferait seulement disparaître le petit terme qui dépend de l'anomalie moyenne de la Lune et elle augmenterait un peu les termes qui dépendent du double de la longitude. Ainsi, en réalité, les termes qui proviennent de l'excentricité de l'orbite lunaire ont été pour la plupart négligés dans notre solution, à cause de leur petitesse. Si l'on veut pousser l'approximation plus loin que nous ne l'avons fait et qu'on désire obtenir, par exemple, les termes dont les coefficients ne sont pas inférieurs à un millième de seconde, notre analyse donnera aisément tous ceux qu'il faut conserver, quand on fait abstraction des inégalités lunaires

qui résultent des perturbations du Soleil; il suffira effectivement de rétablir dans la formule (22) de la Section précédente, les termes des formules (19) et (20) que nous avons négligés, et dont les coefficients sont du premier ou du deuxième degré par rapport aux quantités e, e', c; on obtiendra ensuite facilement les nouveaux termes qui doivent figurer dans les valeurs de Ψ et de Ω. Mais lorsqu'on a ainsi égard à ces petits termes introduits par l'équation du centre, il devient indispensable de prendre en considération ceux qui proviennent des perturbations du Soleil; les uns et les autres sont en effet du même ordre de grandeur, et en conséquence ils doivent être en même temps négligés ou conservés.

Considérons d'abord les inégalités de la longitude et soit

$$\partial v' = k \sin \alpha$$

l'une de ces inégalités. Pour avoir la partie de $-\frac{\zeta'^2_1}{\rho'^2}$, qui provient de cette inégalité, il suffit de différentier la formule (15) de la Section IV en prenant $k \sin \alpha$ pour la variation de v'; en opérant ainsi et en négligeant les termes du troisième degré en e', c, k, il vient

$$-\frac{\zeta'^2_1}{\rho'^2} = -k \sin^2 \omega \sin \alpha \sin (2v' + 2\psi) - 2ck \sin \omega \cos \omega \sin \alpha \sin (2v' - \mathfrak{N} + \psi),$$

remplaçant v' par sa valeur tirée de la formule (16) (Section IV) et multipliant ensuite par $\frac{\rho'^2_0}{\rho'^2}$, il vient

$$\begin{aligned}
-\frac{\rho'^2_0 \zeta'^2_1}{\rho'^2} = &-\frac{1}{2} k \sin^2 \omega \Big[\cos (2m't + 2\mu' + 2\psi - \alpha) - \cos (2m't + 2\mu' + 2\psi + \alpha)\Big] \\
&+ \frac{1}{4} e' k \sin^2 \omega \Big[\cos (m't + \mu' + \varpi' + 2\psi - \alpha) - \cos (m't + \mu' + \varpi' + 2\psi + \alpha)\Big] \\
&- \frac{7}{4} e' k \sin^2 \omega \begin{bmatrix} \cos (3m't + 3\mu' - \varpi' + 2\psi - \alpha) \\ - \cos (3m't + 3\mu' - \varpi' + 2\psi + \alpha) \end{bmatrix} \\
&- ck \sin \omega \cos \omega \begin{bmatrix} \cos (2m't + 2\mu' - \mathfrak{N} + \psi - \alpha) \\ - \cos (2m't + 2\mu' - \mathfrak{N} + \psi + \alpha) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Considérons maintenant les inégalités de la parallaxe ou de l'inverse du rayon vecteur et soit

$$\partial \frac{\rho'_0}{\rho'} = k' \cos \alpha,$$

celle de ces inégalités qui dépend de l'argument α. Cette inégalité introduira

dans $\frac{\rho_0'^2}{\rho'^2}$ des termes dont la somme sera $3\frac{\rho_0'^2}{\rho'^2}k'\cos\alpha$ ou

$$3k'\cos\alpha + 3e'k'[\cos(m't+\mu'-\varpi'-\alpha)+\cos(m't+\mu'-\varpi'+\alpha)],$$

en négligeant les termes du troisième degré en e' et k'. D'après cela on obtiendra la partie de $-\frac{\rho_0'^2\zeta_0'^2}{\rho'^4}$ qui provient de l'inégalité que nous considérons en faisant le produit de l'expression précédente par la valeur de $-\frac{\zeta_0'^2}{\rho'^2}$ que fournit l'équation (18) de la Section IV; si l'on néglige les termes du troisième degré en e', c, k' ainsi que les termes périodiques multipliés par ψ, on obtient

$$\begin{aligned}
-\frac{\rho_0'^2\zeta_0'^2}{\rho'^4} = {} & -\frac{3}{2}k'\sin^2\omega\cos\alpha + \frac{3}{4}k'\sin^2\omega\left[\begin{array}{l}\cos(2m't+2\mu'+2\psi-\alpha)\\ +\cos(2m't+2\mu'+2\psi+\alpha)\end{array}\right]\\
& -\frac{3}{2}e'k'\sin^2\omega[\cos(m't+\mu'-\varpi'-\alpha)+\cos(m't+\mu'-\varpi'+\alpha)\\
& \qquad +\cos(m't+\mu'+\varpi'-2\psi-\alpha)\\
& \qquad +\cos(m't+\mu'+\varpi'+2\psi-\alpha)\\
& \qquad -\cos(3m't+3\mu'-\varpi'+2\psi-\alpha)\\
& \qquad -\cos(3m't+3\mu'-\varpi'+2\psi-\alpha)]\\
& -\frac{3}{2}ck'\sin\omega\cos\omega[\cos(\mathfrak{N}+\psi-\alpha)+\cos(\mathfrak{N}+\psi+\alpha)\\
& \qquad -\cos(2m't+2\mu'-\mathfrak{N}+\psi-\alpha)\\
& \qquad -\cos(2m't+2\mu'-\mathfrak{N}+\psi+\alpha)].
\end{aligned} \tag{2}$$

Tous les termes des formules (1) et (2) doivent être introduits dans la formule (19) de la Section IV, si l'on ne veut négliger aucun de ceux qui y figurent déjà. Or il est aisé de voir que ces divers termes après leur introduction dans la fonction V seront inférieurs aux deux petits termes qui dépendent de l'anomalie moyenne du Soleil ou de celle de la Lune. Supposons, par exemple, que $k\sin\alpha$ représente l'un des termes qui composent l'*évection* dont l'argument est $m't-2mt+\mu'-2\mu+\varpi$; les formules (1) et (2) ne contiendront que des termes dépendant des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, et qui s'introduiront dans V avec des coefficients inférieurs à ceux des termes qui ont pour argument les anomalies moyennes; la même chose aura lieu à plus forte raison si l'on prend pour $k\sin\alpha$ la *variation* ou l'*équation annuelle*, ou l'une des nombreuses inégalités inférieures à celles-ci. Il faut cependant remarquer que si $k\sin\alpha$ représente le terme le plus considérable de l'évection ou de la variation, chacune des formules (1) et (2) contiendra un terme ayant pour argument le double de la longitude du Soleil, et il convient

d'examiner si la grandeur de ces termes est telle qu'il y ait lieu de faire subir une correction aux formules précédemment établies. Considérons d'abord la variation et faisons en conséquence $\alpha = 2m't - 2mt + 2\mu' - 2\mu$, on trouvera dans les formules (1) et (2) deux termes qui ont pour somme

$$+\left(\frac{3}{4}k' - \frac{1}{2}k\right)\sin^2\omega\cos(2mt + 2\mu + 2\psi),$$

et si l'on désigne par $\delta\Psi$, $\delta\Omega$ les termes qu'il faut introduire dans Ψ et dans Ω, à raison des précédents, on obtiendra

$$\delta\Psi = -\varkappa\varepsilon\frac{\frac{3}{4}k' - \frac{1}{2}k}{m}\cos\omega_0\sin 2\odot,\quad \delta\Omega = +\varkappa\varepsilon\frac{\frac{3}{4}k' - \frac{1}{2}k}{m}\sin\omega_0\cos 2\odot;$$

on a, d'après les formules de M. Damoiseau,

$$k = +0{,}01149,\qquad k' = +0{,}00833,$$

et, en faisant usage des valeurs de m, de ω_0 et de $\varkappa\varepsilon$ données dans la Section précédente, on obtient

$$\delta\Psi = -0'',00277\sin 2\odot,\qquad \delta\Omega = +0'',00120\cos 2\odot;$$

on voit que ces corrections sont insensibles. Considérons maintenant l'évection et posons $\alpha = m't - 2mt + \mu' - 2\mu + \varpi'$; les formules (1) et (2) donneront les deux termes

$$-\left(\frac{3}{2}k' - \frac{1}{4}k\right)e'\sin^2\omega\cos(2mt + 2\mu + 2\psi),$$

et les termes correspondants de Ψ et de Ω seront

$$\delta\Psi = +\varkappa\varepsilon\frac{\left(\frac{3}{2}k' - \frac{1}{4}k\right)e'}{m}\cos\omega_0\sin 2\odot,\quad \delta\Omega = -\varkappa\varepsilon\frac{\left(\frac{3}{2}k' - \frac{1}{4}k\right)e'}{m}\sin\omega_0\cos 2\odot;$$

on a

$$k = +0{,}02224,\quad k' = +0{,}01005,$$

et, en achevant les calculs, on trouve

$$\delta\Psi = +0'',00288\sin 2\odot,\quad \delta\Omega = -0'',00125\cos 2\odot.$$

On voit par ce résultat que les effets de la variation et de l'évection se détruisent complétement, et, en conséquence, il n'y a pas lieu de modifier les formules de nutation qui ont été obtenues dans la Section précédente.

Examinons enfin les inégalités périodiques de l'inclinaison et de la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique. Posons

$$\delta\,\mathfrak{N} = f\sin\theta,\qquad \delta c = f'\cos\theta;$$

pour avoir la partie de $-\frac{\rho'^2\zeta'^2}{\rho'^2}$ qui provient de ces inégalités, il suffira de prendre la différentielle de la formule (19) relative aux variations de c et de $\mathfrak{N}$; en négligeant les termes du troisième degré en c, c', f, f', et même les termes du deuxième degré qui contiennent le facteur f', ainsi que ceux qui sont multipliés par φ, il vient

$$(3)\quad \begin{aligned} -\frac{\rho'^2\zeta'^2}{\rho'^2} = &-(f'-cf)\sin\omega\cos\omega\cos(\mathfrak{N}+\psi-\theta)\\ &-(f'+cf)\sin\omega\cos\omega\cos(\mathfrak{N}+\psi+\theta)\\ &+(f'-cf)\sin\omega\cos\omega\cos(2m't+2\mu'-\mathfrak{N}+\psi+\theta)\\ &+(f'-cf)\sin\omega\cos\omega\cos(2m't+2\mu'-\mathfrak{N}+\psi-\theta). \end{aligned}$$

A cause de la forme des arguments θ les termes de cette formule (3) dépendent tous du moyen mouvement du Soleil et, après leur introduction dans la fonction V, ils seront visiblement inférieurs aux termes qui dépendent des anomalies moyennes. Les principales inégalités de l'inclinaison et du nœud sont effectivement celles qui ont pour argument deux fois la longitude moyenne du Soleil moins deux fois la longitude moyenne du nœud de la Lune; en supposant que $\delta\mathfrak{N}$ et $\delta c'$ représentent ces inégalités, on a

$$f = 0{,}02843, \quad f' = 0{,}00255,$$

ce qui donne pour $f' + cf$ la valeur 0,00510, double de f'. On voit, par ces chiffres, que les plus grands termes introduits dans Ψ et dans Ω par les inégalités que nous considérons seront à peu près décuples des termes qui proviennent de la variation et que nous avons calculés plus haut; ils sont donc eux-mêmes de l'ordre de ceux qui ont été précédemment négligés.

29. On voit, par les développements qui précèdent, que notre analyse permettrait de pousser l'approximation aussi loin qu'on le voudrait, dans le calcul des formules de la nutation; toutefois, ainsi que je l'ai dit en commençant, je n'insisterai pas sur cet objet et je me bornerai à indiquer les résultats que M. Peters a obtenus en suivant une voie différente.

Les formules de la précession et de la nutation résultant d'une intégration approximative, on comprend qu'elles ne puissent demeurer indéfiniment les mêmes. Les formules de précession données dans la Section précédente peuvent être étendues avec sécurité jusqu'à dix ou douze siècles avant ou après l'époque de 1850 prise pour origine du temps, mais au delà de cette limite elles pourraient conduire à des résultats peu exacts. La constante de la nutation elle-même doit subir avec le temps de légers changements; c'est pourquoi les formules suivantes de M. Peters donnent la nutation de la longitude et celle de l'obliquité

pour les époques de 1800 et de 1900 (*). Dans ces formules $\odot$ désigne la longitude *vraie* du Soleil, ☾ la longitude *moyenne* de la Lune, Γ et Γ' les longitudes moyennes des périgées du Soleil et de la Lune.

Pour 1800. Pour 1900.

$$\Psi = (1+\sigma)\left\{\begin{matrix} -17'',2405 \sin \text{☊} \\ +\ \ 0'',2073 \sin 2\text{☊} \end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} -17'',2577 \sin \text{☊} \\ +\ \ 0'',2073 \sin 2\text{☊} \end{matrix}\Bigg\}$$

$$\begin{aligned}
&-0'',2041 \sin 2\text{☾}\\
&+0,0677 \sin (\text{☾}-\Gamma')\\
&-0,0339 \sin (2\text{☾}-\text{☊})\\
&+0,0125 \sin (2\odot-\text{☊})\\
&-0,0261 \sin (3\text{☾}-\Gamma')\\
&+0,0115 \sin (\text{☾}+\Gamma')\\
&+0,0150 \sin (\text{☾}-2\odot+\Gamma')\\
&+0,0058 \sin (\text{☾}+\text{☊}-\Gamma')\\
&+0,0057 \sin (\text{☾}-\text{☊}-\Gamma')\\
&+0,0020 \sin (\text{☾}-\text{☊}+\Gamma')\\
&+0,0044 \sin (2\Gamma'-\text{☊})\\
&+0,0061 \sin (2\text{☾}-2\odot)\\
&-0,0052 \sin (3\text{☾}-2\odot+\Gamma')\\
&+0,0053 \sin (2\odot-2\Gamma')\\
&+0,0026 \cos \Gamma'\\
&+0,0020 \sin 2\Gamma'\\
&+0,0025 \sin (\text{☾}+2\odot-\Gamma')\\
&+0,0028 \sin (2\text{☾}-2\Gamma')\\
&+0,0024 \sin (2\text{☾}-2\text{☊})\\
&-0,0024 \sin (2\odot-2\text{☊})\\
&-0,0028 \sin (4\text{☾}-2\Gamma')\\
&-0,0033 \sin (4\text{☾}-2\odot)
\end{aligned}$$

$$+(1-2,162\sigma+3,162n)\left\{\begin{matrix} -1'',2694 \sin 2\odot \\ +0'',1279 \sin (\odot-\Gamma) \end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} -1'',2695 \sin 2\odot \\ +0'',1275 \sin (\odot-\Gamma) \end{matrix}\Bigg\}$$

$$\begin{aligned}
&-0'',0213 \sin (\odot+\Gamma)\\
&-0'',0058 \sin (3\odot-\Gamma)\\
&-0'',0005 \sin (2\odot-2\Gamma).
\end{aligned}$$

(*) *Voir* le Mémoire intitulé : *Numerus constans nutationis ex ascensionibus rectis stellæ polaris in specula Dorpatensi annis* 1822 *ad* 1838 *observatis deductus.* (Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, 6e série, première partie, Sciences mathématiques et physiques, tome III, Saint-Pétersbourg, 1843.)

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Pour 1800.} & \text{Pour 1900.} \\
\Omega = (1+\sigma) & \left\{ \begin{array}{l} +9'',2231 \cos \text{☊} \\ -0'',0897 \cos 2\,\text{☊} \\ +0'',0886 \cos 2\,\text{☾} \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} +0'',0885 \cos 2\,\text{☾} \\ -0'',0896 \cos 2\,\text{☊} \\ +9'',2240 \cos \text{☊} \end{array} \right\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
+0'',0181 \cos(2\,\text{☾} - \text{☊}) \\
-0,0067 \cos(2\odot - \text{☊}) \\
+0,0113 \cos(3\,\text{☾} - \Gamma') \\
-0,0050 \cos(\text{☾} + \Gamma') \\
-0,0031 \cos(\text{☾} + \text{☊} - \Gamma') \\
+0,0030 \cos(\text{☾} - \text{☊} - \Gamma') \\
-0,0010 \cos(\text{☾} - \text{☊} + \Gamma') \\
-0,0024 \cos(2\Gamma' - \text{☊}) \\
+0,0023 \cos(3\,\text{☾} - 2\odot + \Gamma') \\
+0,0023 \sin \Gamma' \\
-0,0008 \cos 2\Gamma' \\
-0,0011 \cos(\text{☾} + 2\odot - \Gamma') \\
+0,0012 \cos(4\,\text{☾} - 2\Gamma') \\
+0,0014 \cos(4\,\text{☾} - 2\odot)
\end{array}
$$

$$
+(1 - 2,162\,\sigma - 3,162\,\pi) \left\{ \begin{array}{l} +0'',5510 \cos 2\odot \\ +0'',0093 \cos(\odot + \Gamma) \\ +0'',0027 \cos(3\odot - \Gamma) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} +0'',5507 \cos 2\odot \\ +0'',0092 \cos(\odot + \Gamma) \\ +0'',0027 \cos(3\odot - \Gamma) \end{array} \right\}.
$$

SECTION VI.

Des variations du jour solaire moyen.

30. Dans les deux Sections précédentes, nous n'avons pas eu à nous occuper de l'angle qui avait été antérieurement désigné par la lettre φ et, afin de nous conformer aux notations adoptées dans les *Annales*, nous avons employé cette même lettre pour représenter l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe. Nous allons reprendre ici la considération de cet angle φ dont la valeur est déterminée, comme on l'a vu dans la Section III, par l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\omega \frac{d\psi}{dt}.$$

Nous avons montré qu'on peut considérer la quantité n comme constante et l'in-

tégrale $\int_0^t ndt$ comme proportionnelle au temps, par conséquent l'équation précédente donnera

$$\varphi = nt + \int \cos\omega\, d\psi = nt + \psi \cos\omega + \int \psi \sin\omega\, d\omega.$$

Si l'on néglige ici comme on doit le faire, les termes du troisième degré en t, ainsi que les termes périodiques multipliés par t, l'intégrale $\int \psi \sin\omega\, d\omega$ devra être réduite à sa partie constante c; il faudra en outre remplacer $\psi \cos\omega$ par $\psi \cos\omega_0$, et l'on aura

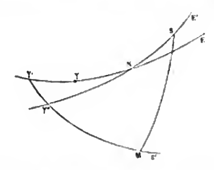
$$\varphi = nt + c + \psi \cos\omega_0,$$

ou, en substituant à ψ la valeur tirée de la première des équations (33) de la section IV,

$$(1) \qquad \varphi = c + (n + a\cos\omega_0)\,t + b\cos\omega_0\, t^2 + \Psi \cos\omega_0.$$

En joignant cette équation à celles qui font connaître les angles ψ et ω, on a la solution complète du problème que nous nous étions proposé et qui avait pour objet de déterminer à chaque instant la position des axes principaux d'inertie de la Terre, relativement à des axes fixes. L'expression précédente de l'angle φ va nous être utile pour l'étude des variations du jour solaire, question qui se rattache directement à notre théorie.

31. Soient ΥE l'écliptique fixe et Υ l'équinoxe vernal moyen de l'époque prise pour origine du temps; Υ'' E' et $\Upsilon'\,\varepsilon'$, les positions de l'écliptique et de l'équateur vrai à une époque quelconque; Υ' est, comme au n° **26**, le nœud descendant de



l'équateur vrai sur l'écliptique fixe et Υ'' est le nœud ascendant de l'écliptique vraie sur l'équateur vrai, c'est-à-dire l'équinoxe vernal vrai de l'époque que l'on con-

sidère. Soient enfin S le lieu du Soleil, que je supposerai dans l'écliptique vraie, faisant ainsi abstraction de sa petite latitude, et SM l'arc de grand cercle abaissé de S perpendiculairement sur l'équateur vrai.

Comme l'axe de rotation de la Terre est sensiblement confondu avec l'axe du plus grand moment d'inertie, l'angle φ peut être considéré comme égal à l'angle dièdre que forme le plan mené par cet axe de rotation et par le point Υ', avec le méridien terrestre qui contient l'axe du plus petit moment d'inertie A, ou, si l'on veut, avec un méridien terrestre quelconque, en laissant arbitraire la constante c de l'équation (1). En d'autres termes, φ est l'*angle horaire* du point Υ' par rapport au méridien dont il s'agit; si donc on désigne par $\mathcal{A}_0$ l'angle horaire de l'équinoxe vrai Υ'' par rapport au même méridien et que l'on fasse $\Upsilon'\Upsilon'' = \upsilon$, comme dans la Section IV, on aura

$$\varphi = \upsilon + \mathcal{A}_0;$$

si l'on remplace enfin φ par sa valeur tirée de l'équation (1), υ par la valeur $\frac{\psi - \psi_1}{\cos\omega_0} = \frac{(a - \mathrm{P})t + (b - \mathrm{P}')t^2}{\cos\omega_0}$ obtenue dans la Section IV, on aura

$$(2) \qquad \mathcal{A}_0 = c + \left(n + a\cos\omega_0 - \frac{a - \mathrm{P}}{\cos\omega_0}\right)t + \left(b\cos\omega_0 - \frac{b - \mathrm{P}'}{\cos\omega_0}\right)t^2 + \Psi\cos\omega_0.$$

Cela posé, nous aurons égard ici à la variation séculaire de l'époque μ de la longitude moyenne du Soleil et nous ferons

$$\mu = \mathcal{E} + \mathcal{E}'t^2,$$

la longitude moyenne du Soleil comptée à partir de l'équinoxe moyen mobile sera dès lors

$$\mathcal{E} + (m + \mathrm{P})t + (\mathcal{E}' + \mathrm{P}')t^2,$$

et l'on aura pour la longitude vraie

$$\odot = \mathcal{E} + (m + \mathrm{P})t + (\mathcal{E}' + \mathrm{P}')t^2 + \mathrm{E} + \Psi,$$

en désignant par E la somme des termes de l'équation du centre et des inégalités qui proviennent des perturbations.

Au moyen de cette expression de $\odot$ on peut calculer l'ascension droite vraie $\mathcal{A}_\odot$ du Soleil, par le triangle sphérique rectangle $\mathrm{S}\Upsilon''\mathrm{M}$ qui donne

$$\operatorname{tang}\mathcal{A}_\odot = \cos\omega_1 \operatorname{tang}\odot \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}(\mathcal{A}_\odot - \odot) = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega_1 \sin 2\odot}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega_1 \cos 2\odot},$$

équation d'où l'on tire, par une formule connue,

$$\mathcal{A}_{\odot} = \odot + \tang^2 \frac{1}{2}\omega_1 \frac{\sin 2\odot}{\sin 1''} - \tang^4 \frac{1}{2}\omega_1 \frac{\sin 4\odot}{\sin 2''} + \ldots;$$

nous désignerons par E′ la somme des termes périodiques contenus dans cette équation et qui constituent ce que l'on nomme la *réduction à l'écliptique;* alors on aura

$$(3) \qquad \mathcal{A}_{\odot} = \mathcal{E} + (m + P)\,t + (\mathcal{E}' + P')\,t^2 + E + E' + \Psi.$$

Retranchons maintenant l'équation (3) de l'équation (2), nous aurons l'expression suivante de l'angle horaire $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_{\odot}$ du Soleil pour le méridien terrestre considéré plus haut,

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_{\odot} = c - \mathcal{E} + \left(n - m - P + a\cos\omega_0 - \frac{a - P}{\cos\omega_0}\right)t \\ + \left(b\cos\omega_0 - \frac{b - P'}{\cos\omega_0} - P' - \mathcal{E}'\right)t^2 - E - E' - \Psi + \Psi\cos\omega_0. \end{aligned}$$

Si l'on supprime de cette expression tous les termes périodiques de l'équation du centre, des perturbations, de la réduction à l'écliptique et de la nutation, on obtiendra l'angle horaire H de l'astre fictif sur le mouvement duquel se règle le temps moyen. Si donc on pose

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} N &= n - m - P + a\cos\omega_0 - \frac{a - P}{\cos\omega_0}, \\ N' &= -\mathcal{E}' - P' - \frac{b - P'}{\cos\omega_0} + b\cos\omega_0, \end{aligned} \right.$$

et que l'on compte l'angle horaire à partir du méridien terrestre pour lequel c est égal à $\mathcal{E}$, on aura

$$(6) \qquad H = N\,t + N'\,t^2,$$

et l'accroissement de cet angle pendant le temps Δt sera

$$(7) \qquad \Delta H = (N + 2N'\,t)\,\Delta t.$$

Le jour solaire moyen est l'intervalle de temps pendant lequel l'angle horaire H augmente de quatre angles droits; en nommant T sa durée, on aura $\Delta H = \frac{2\pi}{\sin 1''}$ pour $\Delta t = T$ et, par conséquent,

$$(8) \qquad T = \frac{2\pi}{(N + 2N'\,t)\sin 1''} = \frac{2\pi}{N\sin 1''} - \frac{2\pi . 2N'\,t}{N^2\sin 1''}.$$

Jusqu'ici l'unité de temps est demeurée indéterminée ; prenons pour cette unité la durée du jour solaire moyen à l'époque de 1850 et désignons par S le nombre des siècles de 36525 jours moyens écoulés depuis cette époque, on aura

$$N = \frac{2\pi}{\sin 1''}, \qquad t = 36525\,S,$$

et la formule (8) deviendra

$$T = 1 - \frac{36525\,N' \sin 1''}{\pi} S.$$

La valeur de $\mathcal{E}'$ est, d'après M. Le Verrier,

$$\mathcal{E}' = -0'',000\,002\,17$$

et les valeurs des autres quantités qui entrent dans l'expression de N' ont été données dans la Section IV. Toutefois comme ces valeurs se rapportent à l'année julienne prise pour unité, il faut avoir soin ici de les diviser par le carré de 365,25 ; on aura donc, en remplaçant $\frac{\pi}{\sin 1''}$ par sa valeur 648000,

$$T = 1 - \frac{N'}{6480 \times 365{,}25} S,$$

et, pour calculer N', on emploiera les valeurs de b et de P' données dans la Section IV ; on obtient ainsi le résultat

$$N' = +\,0'',000\,031\,13,$$

en sorte que la valeur de T devient

$$(9) \qquad T = 1 - \frac{0{,}13153}{10^{10}} S.$$

On voit par cette formule que la durée du jour solaire moyen est actuellement décroissante, la diminution séculaire est de $0^s,000\,001\,136$; elle n'atteint pas *deux dixièmes de seconde en cent mille siècles*.

Le rapport

$$\tau = \frac{H}{360^\circ}$$

exprime la mesure du temps moyen et si l'on divise l'équation (6) par N qui est égal à 360 degrés d'après notre hypothèse, il viendra, en remarquant qu'il faut di-

viser par $(365,25)^2$ la valeur donnée plus haut pour N',

$$(10) \qquad \tau = t + \frac{N'}{1296000} t^2 = t + \frac{0,000\,031\,13}{(365,25)^2\, 1296000} t^2 = t + \frac{0,18005}{10^{15}} t^2,$$

d'où, en résolvant par rapport à t,

$$(11) \qquad t = \tau - \frac{0,18005}{10^{15}} \tau^2;$$

ainsi le temps t n'est pas rigoureusement proportionnel à sa mesure τ, mais on voit, par le résultat qui précède, combien la différence est peu sensible. Si l'on désigne, comme plus haut, par S le nombre des siècles écoulés depuis 1850, que l'on remplace en conséquence t par 36525 S dans le deuxième terme de la formule (10) et qu'en même temps on multiplie ce terme par 86400 pour le réduire en secondes, il viendra

$$(12) \qquad \tau = t + 0^s,02075\, S^2.$$

On a égard aujourd'hui dans l'astronomie à cette petite différence qui existe entre t et τ, et elle constitue la partie séculaire de l'*équation du temps*. Je n'insisterai pas sur ce sujet qui a été traité complétement dans le Tome IV des *Annales*.

NOTE

SUR

L'ÉQUATION DONT DÉPEND L'ANOMALIE EXCENTRIQUE,

ET SUR LES SÉRIES

QUI SE PRÉSENTENT DANS LA THÉORIE DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES CORPS CÉLESTES;

PAR J.-A. SERRET.

I.

Laplace a démontré le premier que l'anomalie excentrique d'une planète, l'anomalie vraie et le rayon vecteur sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de l'excentricité de l'orbite, toutes les fois que cette excentricité ne dépasse pas une certaine limite dont la valeur approchée est 0,662... Cauchy a retrouvé ensuite ce résultat par une méthode qui lui est propre, et M. Puiseux y est arrivé de son côté par des considérations du même genre. Mon attention ayant été appelée sur cet objet à l'occasion du Cours dont je suis chargé à la Faculté des Sciences, j'ai reconnu qu'en se fondant sur les théorèmes généraux dus à Cauchy, on pouvait établir la condition de convergence trouvée par Laplace, beaucoup plus simplement qu'on ne l'a fait jusqu'ici; j'ai obtenu en même temps plusieurs résultats qui me paraissent offrir quelque intérêt et que je me propose d'indiquer dans cette Note.

II.

Soient ζ une constante *réelle* donnée et z une variable réelle ou imaginaire; l'équation transcendante

(1) $$u - z\sin u = \zeta$$

a une infinité de racines u qui dépendent de la variable z, et deux de ces racines deviennent égales entre elles, lorsqu'on attribue à z une valeur telle que l'équation (1) puisse être satisfaite en même temps que sa dérivée relative à u, savoir

$$(2) \qquad 1 - z\cos u = 0.$$

Cela posé, si le module de z reste inférieur au plus petit des modules qu'il faudrait attribuer à cette variable pour que les équations (1) et (2) pussent avoir une racine commune, celle des racines u de l'équation (1) qui se réduit à ζ pour $z = 0$, sera une fonction de z bien déterminée et, d'après un théorème célèbre de Cauchy, cette quantité u et les fonctions continues de u seront développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de z. Lorsque z est réelle, l'équation (1) coïncide avec celle dont dépend l'anomalie excentrique dans la théorie du mouvement elliptique des planètes; u désigne alors cette anomalie excentrique, ζ est l'anomalie moyenne et z représente l'excentricité de l'orbite; enfin l'anomalie vraie et le rayon vecteur sont des fonctions continues de u.

Des équations (1) et (2) on tire

$$(3) \qquad u - \tan u = \zeta,$$

$$(4) \qquad z = \frac{1}{\cos u},$$

et pour obtenir la condition de convergence que nous avons en vue, il suffit évidemment de déterminer quelle est celle des racines u de l'équation (3) à laquelle répond le plus petit module de z ou de $\frac{1}{\cos u}$; lorsque, dans l'équation (1), on attribuera à z un module inférieur au module minimum dont je viens de parler, celle des racines u qui se réduit à ζ pour $z = 0$ sera certainement développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z, et il en sera de même des fonctions continues de u.

III.

Nous sommes conduits, par ce qui précède, à étudier l'équation (3); il résulte des considérations les plus élémentaires que cette équation a une infinité de racines réelles, mais il est très-remarquable qu'elle n'ait en outre que deux racines imaginaires, lesquelles sont conjuguées l'une de l'autre et se réduisent à zéro pour $\zeta = 0$. La considération de ces racines imaginaires n'est pas ici un objet de pure spéculation; ce sont ces racines qui interviendront dans la solution de la question qui nous occupe.

Désignons par U la fonction $u - \tang u$, et posons

$$u = x + y\sqrt{-1},$$

x et y étant deux variables réelles, on aura

$$U = x + y\sqrt{-1} - \frac{\sin 2x + \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}\sqrt{-1}}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}},$$

e représentant ici, suivant l'usage, la base des logarithmes népériens. Pour que la fonction U soit constamment réelle, il faut que les termes multipliés par $\sqrt{-1}$ se détruisent; on a alors

$$(5) \qquad U = x - \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}},$$

et les variables x et y sont liées entre elles par la relation

$$y - \frac{\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}} = 0;$$

cette dernière équation est satisfaite, quel que soit x, en faisant $y = 0$; mais si l'on fait abstraction des valeurs réelles de u, elle prendra la forme

$$(6) \qquad \cos 2x = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2y} - \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2},$$

et elle ne donnera $y = 0$ que si l'on prend pour x un multiple de la demi-circonférence. Il est aisé de voir que si l'on attribue à x une valeur réelle quelconque, l'équation (6) n'admet que deux racines réelles y, lesquelles sont égales et de signes contraires. Pour cela remarquons que l'équation (6) peut être écrite de l'une des deux manières suivantes,

$$(7) \qquad \begin{cases} \sin^2 x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\left[\frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2y}\right] \\ \cos^2 x = \frac{e^y - e^{-y}}{2y}\left[\frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2}y\right], \end{cases}$$

ou, si l'on veut,

$$(8)\qquad \begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}\left[\dfrac{2y^2}{1.2.3} + \dfrac{4y^4}{1.2.3.4.5} + \ldots\right], \\[2ex] \cos^2 x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2y}\left[1 - \dfrac{y^2}{1.2} - \dfrac{3y^4}{1\ldots 4} - \dfrac{5y^6}{1\ldots 6} - \ldots\right]. \end{cases}$$

Le second membre de la première équation (8) est une fonction croissante de y^2 qui prend toutes les valeurs comprises entre o et $+\infty$; donc à une valeur réelle quelconque de x répond une valeur positive unique de y^2, et, par conséquent, l'équation (6) n'a que deux racines réelles y, lesquelles sont égales et de signes contraires. Nous nous bornerons à considérer la valeur positive ; dès lors y désignera la racine positive unique de l'équation (6) et cette quantité sera en conséquence une fonction bien déterminée de x. On voit immédiatement, par l'équation (5), que U sera aussi une fonction bien déterminée de la même variable x.

Il est aisé de déterminer les limites entre lesquelles peut varier la fonction y : pour qu'à une valeur donnée de y puissent répondre des valeurs réelles de x, il faut et il suffit que les équations (8) fournissent pour $\sin^2 x$ et pour $\cos^2 x$ des valeurs positives ou nulles. Or la valeur de $\sin^2 x$ ne peut jamais être négative, d'après la première équation (8), et pour que celle de $\cos^2 x$ ne le soit pas non plus, il faut et il suffit que la quantité

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2}y, \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{y^2}{1.2} - \frac{3y^4}{1.2.3.4} - \frac{5y^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

soit positive ou nulle. Cette quantité est une fonction décroissante de y et elle ne s'annule que pour une seule valeur positive y_0 de y ; elle est positive pour toute valeur de y comprise entre o et y_0, négative pour toute valeur de y supérieure à y_0. Il résulte de là que la fonction y, définie par l'équation (6), reste constamment comprise entre les limites o et y_0, la constante y_0 étant la racine positive unique de l'équation

$$(9)\qquad \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2}y = 0, \quad \text{ou} \quad e^{2y} = \frac{y+1}{y-1}, \quad \text{ou} \quad 2y - l\frac{y+1}{y-1} = 0;$$

la détermination de cette racine n'offre aucune difficulté et l'on trouve, par les méthodes connues,

$$y_0 > 1,19967864, \qquad y_0 < 1,19967865,$$

on a, par suite,

$$(10)\qquad y_0 = 1,19967864,$$

à moins d'une unité du huitième ordre décimal, par défaut. On voit, par les équations (8), que y prend la valeur y_0 lorsque $\cos x$ est nul, c'est-à-dire lorsque x est un multiple impair du quart de la circonférence; au contraire y s'annule en même temps que $\sin x$, et, par conséquent, lorsque x est un multiple pair du quart de la circonférence.

Cherchons maintenant de quelle manière varient les fonctions y et U, quand on fait varier x entre les limites $-\infty$ et $+\infty$. Nous poserons, pour abréger,

$$(11)\qquad Y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2\times 2y} = 1 + \frac{(2y)^2}{1.2.3} + \frac{(2y)^4}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

et nous désignerons par Y' et Y'' les dérivées $\frac{dY}{dy}$, $\frac{d^2Y}{dy^2}$, conformément à la notation de Lagrange; il est aisé de s'assurer qu'on a les deux relations

$$(12)\qquad (Y + Y'y)^2 - 4Y^2y^2 = 1, \qquad Y''y + 2Y' - 4Yy = 0.$$

Au moyen de cette notation, les équations (6) et (5) deviennent

$$(13)\qquad \cos 2x = Y - Y'y,$$

$$(14)\qquad U = x - \frac{\sin 2x}{Y};$$

et la différentiation de ces équations donne, en ayant égard aux équations (12),

$$(15)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin 2x}{y\,Y''},$$

$$(16)\qquad \frac{dU}{dx} = \frac{2Y'^2}{YY''}.$$

L'équation (15) montre que $\frac{dy}{dx}$ a toujours le signe de $\sin 2x$; si donc k désigne un entier positif, nul ou négatif et que l'on fasse croître x depuis $2k\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, y croîtra depuis zéro jusqu'à sa valeur maxima y_0; au contraire si x croît depuis $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $(2k+2)\frac{\pi}{2}$, y décroîtra de y_0 à zéro. Les valeurs que prend ainsi y sont évidemment indépendantes de l'entier k; en d'autres termes, y est une fonction périodique de x, dont la période est égale à π.

La valeur de U reste finie tant que la variable x n'est pas infinie et l'équation (16) montre que la dérivée $\frac{dU}{dx}$ n'est jamais négative; il s'ensuit que U est une fonction constamment croissante de x. On voit alors, par l'équation (14), que U

croît de $-\infty$ à $+\infty$, quand x croît elle-même de $-\infty$ à $+\infty$, et que cette fonction est égale à la variable lorsque la valeur de celle-ci est un multiple de $\frac{\pi}{2}$. On a simultanément, par ce qui précède,

$$
\begin{array}{llllllllllll}
x \text{ et } U = \ldots -2\pi, & -\frac{3\pi}{2}, & -\pi, & -\frac{\pi}{2}, & 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \frac{3\pi}{2}, & 2\pi, \ldots, \\
y = \ldots \quad 0, & y_0, & 0, & y_0, & 0, & y_0, & 0, & y_0, & 0 \ldots.
\end{array}
$$

Soit maintenant ζ une quantité réelle donnée; il résulte de notre analyse que l'équation

$$U = \zeta$$

(où U désigne la fonction de x que nous venons d'étudier) a toujours une racine réelle unique; par conséquent enfin, l'*équation*

$$u - \operatorname{tang} u = \zeta,$$

où ζ désigne une constante réelle donnée, a deux racines imaginaires conjuguées $x \pm y\sqrt{-1}$ et elle ne peut en avoir un plus grand nombre. Il faut remarquer en outre que la partie imaginaire $y\sqrt{-1}$ de ces racines s'évanouit lorsque ζ est égale à zéro ou à un multiple de la demi-circonférence; dans ce cas, ζ est racine triple de l'équation.

IV.

Désignons par R le module de la sécante d'une racine u de l'équation (3), en sorte qu'on ait

$$R = \operatorname{mod} \frac{1}{\cos u};$$

si l'on prend pour u une des deux racines imaginaires conjuguées $x \pm y\sqrt{-1}$, on aura

$$R = \frac{1}{\sqrt{\cos(x + y\sqrt{-1})\cos(x - y\sqrt{-1})}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}\right)}},$$

et, d'après les formules (6) et (11),

$$(17) \qquad R = \sqrt{\frac{4y}{e^{2y} - e^{-2y}}} = \frac{1}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2y)^2}{1.2.3} + \frac{(2y)^4}{1.2.3.4.5} + \ldots}}.$$

On voit que cette valeur de R est inférieure à 1 et qu'elle est d'autant moindre

que y est plus grand; par suite le minimum R_0 de R correspond au maximum y_0 de y et l'on a

$$R_0 = \sqrt{\frac{4y_0}{e^{2y_0} - e^{-2y_0}}};$$

comme y_0 est racine de l'équation (9) et que l'on a en conséquence $e^{2y_0} = \frac{y_0+1}{y_0-1}$, la valeur de R_0 est plus simplement

$$R_0 = \sqrt{y_0^2 - 1};$$

la formule (10) donne la valeur de y_0 et l'on en déduit, pour celle de R_0,

(18) $$R_0 = 0,662\,743\,4,$$

à une unité près du septième ordre décimal, par défaut.

Le module R se réduit à l'unité pour $y = 0$, et, par conséquent, la valeur de cette quantité est constamment comprise entre R_0 et 1.

V.

Revenons maintenant à l'équation (1) et aux développements en séries des fonctions continues de la racine u qui se réduit à ζ pour $z = 0$. D'après ce qui a été dit au commencement de cette Note, la condition de convergence de ces séries est exprimée par l'inégalité

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \frac{1}{\cos u},$$

où il faut prendre pour u celle des racines de l'équation (3) dont la sécante a le plus petit module. Or les racines réelles de l'équation (3) rendront le second membre de la précédente inégalité supérieur à l'unité, tandis que l'une des deux racines imaginaires $x \pm y\sqrt{-1}$ lui fera acquérir la valeur R comprise entre R_0 et 1 et qui est généralement inférieure à 1; la condition de convergence sera donc

(19) $$\operatorname{mod} z < R \quad \text{ou} \quad \operatorname{mod} z < \sqrt{\frac{4y}{e^{2y} - e^{-2y}}},$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Si y désigne le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans les deux racines imaginaires conjuguées de l'équation $u - \operatorname{tang} u = \zeta$, celle des racines u de l'équation $u - z \sin u = \zeta$ qui se réduit à ζ pour $z = 0$, sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z, pour toutes les valeurs de cette variable

dont le module est inférieur à $\sqrt{\frac{4y}{e^{2y}-e^{-2y}}}$; *la même chose aura lieu pour toutes les fonctions continues de u.*

Cette limite $\sqrt{\frac{4y}{e^{2y}-e^{-2y}}}$ ou R dépend de la quantité ζ et elle peut prendre toutes les valeurs comprises entre R_0 et 1. Si le module de z est supérieur à R_0, mais qu'il soit inférieur à 1, l'inégalité $\text{mod}\, z < R$ sera vérifiée pour certaines valeurs de ζ, mais elle ne le sera pas pour toutes les valeurs de cette quantité; il en résulte que, dans ce cas, les séries que nous considérons seront certainement convergentes pour certaines valeurs de ζ, mais elles pourront cesser de l'être pour d'autres valeurs. Si au contraire on a

$$\text{mod}\, z < R_0 \quad \text{ou} \quad \text{mod}\, z < 0{,}662\,743\,4\ldots, \tag{20}$$

l'inégalité $\text{mod}\, z < R$ sera toujours satisfaite et les séries seront convergentes pour toutes les valeurs de ζ, ce qui est évidemment le seul cas où ces séries puissent être utiles dans la pratique. On peut ainsi énoncer le théorème suivant :

Quelle que soit la quantité réelle ζ, *celle des racines u de l'équation* $u - z\sin u = \zeta$ *qui se réduit à* ζ *pour* $z = 0$, *est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z pour toutes les valeurs de cette variable dont le module est inférieur à* 0,662 743 4....; *la même chose a lieu pour les fonctions continues de u.*

Et l'on a en particulier ce théorème intéressant pour l'astronomie :

Si l'excentricité de l'orbite elliptique d'une planète ou d'une comète est inférieure à 0,662 743 4,..., *l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie et le rayon vecteur sont développables en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de l'excentricité, pour toutes les valeurs de l'anomalie moyenne.*

VI.

Les résultats qui précèdent furent communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances des 9 et 16 juin 1856, et ils fixèrent l'attention de Cauchy, qui publia quelque temps après un Mémoire sur le dénombrement et la séparation des racines imaginaires des équations transcendantes. Dans ce remarquable travail, l'illustre géomètre fit l'application de son analyse aux équations (1) et (3), en considérant z et ζ comme des constantes *réelles* données, et, en ce qui concerne l'équation (3), il retrouva le résultat que j'avais obtenu. Le procédé très-élémentaire dont j'ai fait usage et que j'ai exposé plus haut peut être appliqué avec succès à l'étude des racines de l'équation (1) et il conduit par la voie la plus simple aux conséquences que Cauchy a tirées de sa savante méthode; c'est ce que je me pro-

pose de montrer présentement. Reprenons donc l'équation (1) et supposons que z et ζ représentent des constantes réelles données. Comme on passe du cas de z négative au cas de z positive en changeant ζ en $\zeta+\pi$ et en prenant $u-\pi$ pour variable au lieu de u, nous pouvons admettre que la constante z soit positive; nous examinerons d'abord le cas où cette quantité est inférieure à l'unité. Posons

$$(21)\qquad V = u - z\sin u - \zeta;$$

si u reste réelle V sera une fonction croissante de cette variable, car la dérivée $\frac{dV}{du} = 1 - z\cos u$ demeure constamment positive; la fonction V ne peut donc s'annuler qu'une seule fois; elle s'annule d'ailleurs nécessairement puisqu'elle croît avec u, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. On conclut de là que l'équation (1) a une racine réelle unique.

Supposons maintenant que u désigne une variable imaginaire $x+y\sqrt{-1}$; la formule (21) deviendra

$$(22)\qquad V = \left(x - z\sin x\frac{e^y+e^{-y}}{2} - \zeta\right) + \sqrt{-1}\left(y - z\cos x\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right);$$

si l'on considère x comme une variable indépendante et que l'on détermine y par la condition que V soit réelle, on aura

$$(23)\qquad y - z\cos x\frac{e^y-e^{-y}}{2} = 0,$$

$$(24)\qquad V = x - z\sin x\frac{e^y+e^{-y}}{2} - \zeta.$$

Nous ferons abstraction de la solution $y=0$ qui répond au cas de u réelle; l'équation (23) peut alors s'écrire comme il suit :

$$(25)\qquad \frac{1}{z\cos x} = 1 + \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} + \ldots;$$

le second membre est une fonction paire et croissante de y qui reste comprise entre $+1$ et $+\infty$; donc cette équation ne peut avoir que deux racines réelles y, lesquelles sont égales et de signes contraires, et encore faut-il, pour que ces racines existent effectivement, que $\cos x$ soit positif, et par suite que l'on ait

$$(26)\qquad x = 2k\pi + \xi,$$

en désignant par k un entier arbitraire et par ξ un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour notre objet, la variable indépendante x sera essentiellement discontinue. En se bornant aux valeurs qui sont données par la formule (26) et en prenant positivement la valeur de y, cette quantité y devient une fonction bien déterminée de x et, par conséquent, V est elle-même une fonction bien déterminée de la même variable x. Si l'on porte la valeur de x tirée de la formule (26) dans les équations (23) et (24), celles-ci deviennent

$$(27)\qquad y - z\cos\xi\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0,$$

$$(28)\qquad V = 2k\pi + \xi - z\sin\xi\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} - \zeta;$$

y et V sont alors des fonctions de ξ, et l'on a, en différentiant les équations précédentes,

$$\left(1 - z\cos\xi\,\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)\frac{dy}{d\xi} + z\sin\xi\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0,$$

$$\frac{dV}{d\xi} = 1 - z\cos\xi\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} - z\sin\xi\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\,\frac{dy}{d\xi},$$

d'où, en ayant égard à l'équation (27),

$$(29)\qquad \frac{dV}{d\xi} = \frac{\left(1 - z\cos\xi\,\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 + \left(z\sin\xi\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2}{1 - y\,\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}}.$$

Le numérateur de cette expression est constamment positif, le dénominateur, au contraire, est constamment négatif et il ne s'annule que pour la valeur $y = 0$ dont nous avons fait abstraction ; donc V est une fonction décroissante de ξ. On a d'ailleurs simultanément, par les équations (27) et (28),

$$\xi = -\frac{\pi}{2},\quad y = +\infty,\quad V = +\infty,$$

$$\xi = \quad 0,\quad \ldots\ldots\ldots\quad V = 2k\pi - \zeta,$$

$$\xi = +\frac{\pi}{2},\quad y = +\infty,\quad V = -\infty;$$

de plus, la fonction V reste finie pour toutes les valeurs de ξ comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; donc cette fonction s'annule pour une valeur unique de ξ comprise entre les mêmes limites, et l'on voit aussi que cette valeur de ξ est de signe contraire à $2k\pi - \zeta$. On peut conclure de là que l'équation (1) admet une infinité de

racines imaginaires $2k\pi + \xi \pm y\sqrt{-1}$; à chaque valeur de l'entier k inférieure à $\frac{\zeta}{2\pi}$ répond une valeur unique de ξ, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et o, et à chaque valeur de k supérieure à $\frac{\zeta}{2\pi}$ répond une valeur de ξ comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$; la valeur correspondante de y est donnée par la formule

$$(30) \qquad y = \sqrt{(2k\pi + \xi - \zeta)^2 \cot^2 \xi - z^2 \cos^2 \xi},$$

qu'on déduit aisément des équations écrites plus haut.

Considérons maintenant le cas où z est égal ou supérieur à l'unité. On peut poser

$$z = \frac{1}{\cos \alpha},$$

α étant un arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. Supposons d'abord u réelle et faisons croître cette variable de $2k\pi - \alpha$ à $2(k+1)\pi - \alpha$, k désignant un entier arbitraire positif, nul ou négatif; la fonction V, définie par l'équation (21), est décroissante dans l'intervalle de $2k\pi - \alpha$ à $2k\pi + \alpha$, car sa dérivée $\frac{dV}{du} = 1 - \frac{\cos u}{\cos \alpha}$ est négative; au contraire elle est croissante dans l'intervalle de $2k\pi + \alpha$ à $2(k+1)\pi - \alpha$, car la dérivée $\frac{dV}{du}$ devient alors positive. L'équation (1) ne peut donc avoir qu'une seule racine entre $2k\pi - \alpha$ et $2k\pi + \alpha$, et une seule entre $2k\pi + \alpha$ et $2(k+1)\pi - \alpha$. Si, en outre, on fait, pour abréger,

$$(31) \qquad \frac{\zeta + \alpha - \operatorname{tang}\alpha}{2\pi} = n - f, \qquad \frac{\zeta - \alpha + \operatorname{tang}\alpha}{2\pi} = n' - f',$$

n et n' étant des entiers positifs, nuls ou négatifs, f et f' des fractions inférieures à l'unité et positives ou nulles, on aura simultanément

$$\begin{aligned} u &= 2k\pi - \alpha, & V &= 2\pi(k - n + f), \\ u &= 2k\pi + \alpha, & V &= 2\pi(k - n' + f'), \\ u &= 2(k+1)\pi - \alpha, & V &= 2\pi(k + 1 - n + f); \end{aligned}$$

donc, pour que l'équation (1) ait une racine entre $2k\pi - \alpha$ et $2k\pi + \alpha$, il faut et il suffit que k soit l'un des nombres $n, n+1, \ldots n'-1$; pareillement, pour qu'il y ait une racine entre $2k\pi + \alpha$ et $2(k+1)\pi - \alpha$, il faut et il suffit que k soit l'un des nombres $n-1, n, n+1, \ldots, n'-1$; d'où il résulte que l'équation (1) a $2(n'-n)+1$ racines réelles, dont la séparation est évidemment ef-

fectuée par ce qui précède. Notre conclusion subsiste si l'une des fractions f et f' se réduit à zéro; seulement dans ce cas l'équation (1) a deux racines égales.

Supposons maintenant que u désigne une variable imaginaire $x+y\sqrt{-1}$; la valeur de V sera donnée par l'équation (22) et si l'on veut que cette fonction soit réelle, on aura, comme dans le cas de $z<1$, les deux équations (23) et (24). En outre l'équation (25) exige encore que $\cos x$ soit positif, mais ici il faut en outre que l'on ait $\cos x < \cos\alpha$, par suite la variable ξ de l'équation (26) doit être renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha$ ou entre $+\alpha$ et $+\frac{\pi}{2}$. La dérivée $\frac{dV}{d\xi}$ est toujours donnée par la formule (29); cette dérivée n'est jamais positive et elle reste finie, sauf pour les valeurs $\xi=\pm\alpha$ qui donnent $y=0$; il s'ensuit que V décroît quand on fait croître ξ de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\alpha$ ou de $+\alpha$ à $+\frac{\pi}{2}$; on a d'ailleurs simultanément, en faisant usage des formules (31),

$$\xi=-\frac{\pi}{2},\quad y=+\infty,\quad V=+\infty,$$
$$\xi=-\alpha,\quad y=0,\quad V=2\pi(k-n+f),$$
$$\xi=+\alpha,\quad y=0,\quad V=2\pi(k-n'+f')$$
$$\xi=+\frac{\pi}{2},\quad y=+\infty,\quad V=-\infty;$$

si donc k est inférieur à n, la valeur de V s'annule pour une valeur de ξ, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha$; pareillement si k est égal ou supérieur à n', la valeur de V s'annulera pour une valeur de ξ comprise entre $+\alpha$ et $+\frac{\pi}{2}$. On peut conclure de là que l'équation (1) admet encore, dans le cas que nous examinons, une infinité de racines imaginaires $2k\pi+\xi\pm y\sqrt{-1}$. A chaque valeur de k comprise dans la série $-\infty,\ldots,(n-1)$, correspond une valeur unique de ξ, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha$, et à chaque valeur de k, comprise dans la série $n', n'+1,\ldots, +\infty$, correspond une valeur unique de ξ comprise entre $+\alpha$ et $+\frac{\pi}{2}$. Aux valeurs de k comprises entre $n-1$ et n' ne correspond aucune valeur de ξ; en sorte que, si dans le passage du cas de $z<1$ au cas de $z>1$, l'équation (1) acquiert des racines réelles, on peut dire qu'elle perd exactement le même nombre de racines imaginaires.

VII.

Les excentricités des orbites des planètes étant inférieures à la limite 0,66..., l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie et le rayon vecteur sont toujours développables en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de l'excentricité. Mais il n'en est pas ainsi à l'égard d'un astre dont l'orbite elliptique serait très-excentrique; les séries peuvent alors devenir divergentes et il n'est plus permis d'en faire usage. Dans tous les cas, l'anomalie vraie et le rayon vecteur s'obtiennent très-aisément, comme on sait, quand on connaît l'anomalie excentrique et l'on possède diverses méthodes d'approximation pour calculer les valeurs de cette anomalie excentrique qui répondent à des valeurs données de l'anomalie moyenne. Parmi ces méthodes, on doit surtout remarquer celle qui a été indiquée à la page 192 du Tome I des *Annales* et qui repose sur un développement en série d'une nouvelle forme.

Soient e l'excentricité, ζ l'anomalie moyenne et u_0 une valeur approchée de l'anomalie excentrique u; si l'on pose

$$x = \zeta - u_0 + e \sin u_0, \tag{32}$$

l'équation à résoudre sera

$$u - e \sin u = u_0 - e \sin u_0 + x, \tag{33}$$

et on peut calculer l'inconnue u en la développant, par la formule de Maclaurin, en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x. La différentiation de l'équation précédente donne

$$\begin{cases} (1 - e\cos u)\dfrac{du}{dx} = 1, \\ (1 - e\cos u)\dfrac{d^2 u}{dx^2} + e\sin u\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2 = 0, \\ (1 - e\cos u)\dfrac{d^3 u}{dx^3} + 3e\sin u\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2 u}{dx^2} + e\cos u\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{34}$$

La valeur de u que nous cherchons se réduit à u_0 pour $x = 0$, et l'on a en même temps, par les équations (34),

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1 - e\cos u_0}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{e\sin u_0}{(1 - e\cos u_0)^3}, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{3e^2\sin^2 u_0}{(1 - e\cos u_0)^5} - \frac{e\cos u_0}{(1 - e\cos u_0)^4}, \quad \dots;$$

on a, d'après cela, par la formule de Maclaurin,

$$(35)\quad u = u_0 + \frac{1}{1 - e\cos u_0}x - \frac{1}{2}\frac{e\sin u_0}{(1 - e\cos u_0)^3}x^2 + \left[\frac{1}{2}\frac{e^2\sin^2 u_0}{(1 - e\cos u_0)^5} - \frac{1}{6}\frac{e\cos u_0}{(1 - e\cos u_0)^4}\right]x^3 + \ldots$$

équation dans laquelle il faut remplacer, pour le calcul, u, u_0 et x par $u \sin 1''$, $u_0 \sin 1''$, et $x \sin 1''$.

Dans le cas d'une orbite peu excentrique, comme celle de la Terre, on déduit de l'équation (35) une formule assez commode pour le calcul. Si, en effet, on prend pour u_0 l'anomalie moyenne ζ, on a $x = e\sin\zeta$ et l'équation (35) donne, en négligeant la quatrième puissance de l'excentricité,

$$(36)\qquad u = \zeta + \frac{e\sin\zeta}{(1 - e\cos\zeta)\sin 1''} - \frac{1}{2}\sin^2 1''\left[\frac{e\sin\zeta}{(1 - e\cos\zeta)\sin 1''}\right]^3;$$

on voit que le dernier terme de cette formule peut être calculé immédiatement au moyen du terme précédent.

Il n'est pas sans intérêt de rechercher la condition de convergence de la série (35); on y arrive aisément, comme on va le voir, au moyen du théorème de Cauchy que j'ai rappelé en commençant.

Les racines u de l'équation (33) sont des fonctions de x et deux de ces racines deviennent égales entre elles, lorsqu'on attribue à x une valeur telle que l'équation soit satisfaite en même temps que sa dérivée relative à u, savoir :

$$(37)\qquad 1 - e\cos u = 0.$$

Si l'on pose

$$(38)\qquad e = \sin\varepsilon,$$

ε étant un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'équation (37) donnera

$$(39)\qquad \cos u = \frac{1}{\sin\varepsilon},\quad \sin u = \pm\sqrt{-1}\,\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon},\quad u = 2k\pi \pm \sqrt{-1}\; l\cot\frac{1}{2}\varepsilon;$$

k désigne ici un entier indéterminé, la caractéristique l exprime un logarithme népérien; enfin dans les valeurs de u et de $\sin u$, il faut prendre ensemble les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

Si l'on porte les valeurs précédentes de u et de $\sin u$ dans l'équation (33), il

vient

$$(40)\qquad x = (2k\pi - u_0 + \sin\varepsilon \sin u_0) \pm \sqrt{-1}\left(l\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon\right).$$

Cette formule fait connaître les valeurs qu'il faudrait attribuer à x pour que deux racines u de l'équation (33) fussent égales entre elles. Désignons par R la plus petite des valeurs que peut prendre le module du second membre de l'équation (40), relativement aux diverses valeurs de l'entier k; si, dans l'équation (33), on attribue à x une valeur dont le module soit inférieur à R, celle des racines u de cette équation qui se réduit à u_0 pour $x = 0$ sera, par le théorème de Cauchy, développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de x. Et, comme dans notre problème x désigne une quantité réelle, la condition de convergence de la série (35) sera

$$x^2 < R^2;$$

R^2 est la valeur minimum de l'expression

$$(2k\pi - u_0 + \sin\varepsilon \sin u_0)^2 + \left(l\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon\right)^2;$$

comme on peut toujours supposer ζ et u_0 comprises entre 0 et 2π, il est évident que le minimum dont il s'agit aura lieu pour $k = 0$ si u_0 est $< \pi$ et pour $k = 1$ si u_0 est $> \pi$. Si l'on prend successivement pour k ces deux valeurs et que l'on remplace $u_0 - \sin\varepsilon \sin u_0$ par sa valeur $\zeta - x$ tirée de l'équation (32), la condition de convergence sera exprimée par l'une des deux inégalités

$$x^2 < (\zeta - x)^2 + \left(l\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon\right)^2,$$

$$x^2 < (2\pi - \zeta + x)^2 + \left(l\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon\right)^2.$$

En résolvant ces inégalités par rapport à x, on obtient

$$(41)\qquad \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}\left[\zeta + \dfrac{\left(l\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon\right)^2}{\zeta}\right], \\[2ex] -x < \dfrac{1}{2}\left[(2\pi - \zeta) + \dfrac{\left(l\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon\right)^2}{(2\pi - \zeta)}\right]; \end{cases}$$

ces formules donnent ainsi une limite inférieure et une limite supérieure de x, pour chaque valeur de l'anomalie moyenne ζ. Si l'on veut avoir des conditions de convergence indépendantes de ζ, il faudra, dans les formules (41), remplacer les se-

conds membres par leurs valeurs minima relatives à la variation de ζ; on obtient ainsi

$$(42) \qquad \pm x < l \cot \frac{1}{2}\varepsilon - \cos\varepsilon,$$

ou, pour le calcul,

$$(43) \qquad \pm x < \frac{\log \cot \frac{1}{2}\varepsilon}{M \sin 1''} - \frac{\cos\varepsilon}{\sin 1''},$$

en désignant par $\pm x$ la valeur absolue de x; dans la formule (43) la caractéristique *log* exprime un logarithme vulgaire et la lettre M représente le module des logarithmes.

Le second membre de la formule (42) ou (43) est une fonction décroissante de ε ou de e qui ne devient égale à zéro que pour $e = 1$. Si l'excentricité est égale à 0,9 ce second membre est encore supérieur à $1°30'$; par conséquent la série (35) reste convergente dans le cas d'une aussi grande excentricité, même quand x atteint et dépasse cette limite de $1°30'$. Lorsqu'on fait usage de la formule (35), on s'arrange toujours de manière que x soit un angle peu considérable; la série est alors généralement très-convergente et il suffit d'un petit nombre de termes pour obtenir l'approximation dont on a besoin.

RECHERCHES

SUR

LES ATMOSPHÈRES DES COMÈTES;

PAR ÉDOUARD ROCHE.

1. L'objet de ce travail est d'étudier la figure d'une atmosphère qui enveloppe un noyau de comète et l'accompagne dans sa marche autour du Soleil. Cette atmosphère est soumise à l'attraction du Soleil, à celle de la comète elle-même, et elle peut avoir un mouvement de rotation. Sous ces diverses influences, il doit arriver que sa forme change d'un moment à un autre : elle n'affectera pas en général une figure permanente. Mais si l'on admet qu'elle prend à chaque instant la figure avec laquelle elle pourrait être en équilibre en vertu de ces forces, la succession des formes ainsi calculées représentera, au moins approximativement, les variations que l'atmosphère de la comète éprouve réellement. La question, ainsi ramenée à un problème de statique, devient abordable par le calcul; elle est traitée au commencement de ce Mémoire.

Les conséquences de cette première discussion jettent quelque jour sur la manière dont les queues tendent à se produire. Elles conduisent cependant à un résultat en contradiction avec les faits : toute comète aurait son noyau pour centre de figure; elle présenterait nécessairement deux queues opposées, l'une dirigée vers le Soleil, l'autre en sens contraire.

J'examine, dans la seconde partie, comment on peut éviter cette difficulté. Pour cela, je reprends l'étude de la figure de l'atmosphère cométaire, en joignant à l'attraction du Soleil et à celle du noyau la force répulsive admise par M. Faye, dans ses communications à l'Académie des Sciences sur la comète de Donati, force qui s'exerce suivant le rayon vecteur du Soleil, en raison inverse du carré de la distance à cet astre, mais dont l'action dépend de la densité des

molécules qu'elle sollicite. Je trouve que cette hypothèse explique d'une manière satisfaisante les apparences observées, et notamment l'existence d'une queue unique opposée au Soleil. Enfin je cherche si l'on pourrait rendre compte des phénomènes par la supposition d'un milieu interplanétaire que la comète traverserait.

PREMIÈRE PARTIE.

Conditions d'équilibre d'une atmosphère.

2. Nous commencerons par déterminer la figure d'une atmosphère recouvrant un astre à peu près sphérique, qui possède un mouvement de rotation uniforme, et de plus attirée par un point situé à une grande distance dans le plan de l'équateur. Ce problème comprend en particulier : le cas où l'attraction extérieure est négligeable, et l'on trouve alors des résultats applicables à l'atmosphère du Soleil; celui où les deux mouvements de rotation et de translation s'effectuent dans le même temps; enfin le cas où la rotation est nulle, ce qui aurait lieu pour une comète ayant un simple mouvement de translation vers le Soleil. Dans le second cas, comme dans le premier, l'atmosphère possède réellement une forme permanente, parce qu'elle reste constamment à la même distance et dans la même position relativement au corps troublant. Au contraire, dans le cas général, l'action perturbatrice change à tout instant de grandeur et de direction, la masse fluide se déforme continuellement, et il en résulte une sorte de marée réglée sur le mouvement apparent du corps extérieur. Mais pour une position donnée de ce corps il existe une figure d'équilibre du fluide atmosphérique, et c'est cette figure que nous nous proposons de calculer.

Dans l'état d'équilibre, la forme d'une surface de niveau ou d'égale densité doit être telle, qu'en chaque point la résultante des diverses forces qui sollicitent une molécule soit normale à la surface. Si l'astre tourne sur lui-même, les couches atmosphériques finiront par prendre le même mouvement, et il faudra avoir égard à la force centrifuge qui correspond à cette rotation. Le peu de densité de l'atmosphère permet de négliger l'attraction de ses propres molécules. Il en est de même de l'excentricité du sphéroïde recouvert par l'atmosphère : nous le supposerons toujours sphérique.

Laplace s'est occupé de la figure des atmosphères des corps célestes dans le Chapitre VII du Livre III de la *Mécanique céleste ;* mais ses formules ne sont guère applicables qu'à l'atmosphère du Soleil, parce qu'il néglige toutes les actions extérieures, et qu'il tient compte seulement de l'attraction du noyau central et de la force centrifuge due au mouvement de rotation. Même pour ce cas-là, sa discus-

sion n'est pas complète : il n'a pas mentionné une propriété importante que nous signalerons plus loin.

3. Prenons pour origine des coordonnées (*fig.* 1, *Pl. II*) le centre de l'astre que l'atmosphère environne et sur lequel elle pèse; pour axe des x l'axe de rotation; pour axe des y le rayon mené au point extérieur M; enfin pour axe des z une perpendiculaire au plan des xy. Appelons a la distance OM; cette distance sera considérée comme constante, parce que nous examinons ce qui se passe à une époque déterminée et pour une position connue de M. Nous désignerons par t la durée de rotation de l'astre, par m sa masse, et par M celle du corps troublant. Soient A une molécule atmosphérique, s sa distance à M, r son rayon vecteur, θ l'angle de ce rayon avec l'axe Ox, δ l'angle avec l'axe Oy, ψ l'angle que OP, projection de r sur le plan des yz, fait avec Oy.

L'équation différentielle des surfaces de niveau s'obtiendra en égalant à zéro la somme des forces multipliées chacune par l'élément différentiel de sa direction. S étant l'action de la masse M sur la molécule A, $\frac{m}{r^2}$ la pesanteur vers le noyau, $\frac{4\pi^2 r \sin\theta}{t^2}$ la force centrifuge, on aura

$$S\,ds - \frac{m}{r^2}\,dr + \frac{4\pi^2 r \sin\theta}{t^2}\,d.r\sin\theta = 0;$$

en intégrant, on a l'équation des surfaces de niveau

$$(1) \qquad \int S\,ds + \frac{m}{r} + \frac{2\pi^2}{t^2} r^2 \sin^2\theta = \text{const.}$$

Il reste à évaluer l'action de M sur A.

4. Remarquons d'abord que la masse m tombe vers M avec l'atmosphère qui la recouvre. Si l'on veut, à un instant donné, les considérer comme fixes, il faut appliquer à chaque point du système une accélération égale et contraire à celle qui sollicite vers M le centre de gravité O de m. Mais l'attraction de M sur l'unité de masse en A est $\frac{M}{s^2}$; l'élément de sa direction est $-ds$, l'intégrale du produit $\frac{M}{s}$. L'attraction que M exerce au point O est $\frac{M}{a^2}$; l'élément de sa direction est dy, et l'intégrale du produit $\frac{M}{a^2}y$. Donc il faut prendre pour valeur de $\int S\,ds$ la différence

$$\frac{M}{s} - \frac{M}{a^2}y.$$

Nous admettrons, dans tout ce qui suit, que l'astre troublant est fort éloigné relativement aux dimensions de l'atmosphère, c'est-à-dire que le rapport $\frac{r}{a}$ est assez petit pour qu'on puisse négliger le cube $\frac{r^3}{a^3}$. Or on a par la figure

$$s^2 = a^2 - 2ar\cos\delta + r^2,$$

d'où

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a}\left(1 - 2\frac{r}{a}\cos\delta + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

A ce degré d'approximation, on trouve en développant

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{r}{a}\cos\delta + \frac{r^2}{2a^2}(3\cos^2\delta - 1)\right].$$

Substituons dans la valeur de $\int S\,ds$, en remarquant que $y = r\cos\delta$, nous aurons

$$\frac{M}{a} + \frac{Mr^2}{2a^3}(3\cos^2\delta - 1).$$

Enfin l'équation (1) devient, en renfermant le terme $\frac{M}{a}$ dans la constante arbitraire,

(2) $$\frac{Mr^2}{2a^3}(3\cos^2\delta - 1) + \frac{m}{r} + \frac{2\pi^2}{t^2}r^2\sin^2\theta = \text{const.}$$

5. Appelons T la durée de la révolution dans le mouvement relatif de translation de M autour de m, nous avons, par la théorie des forces centrales,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{M + m}{a^3}.$$

Posant maintenant

(3) $$\mu = \frac{m}{M}, \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{T^2}{t^2},$$

on aura

(4) $$\frac{4\pi^2}{t^2} = \frac{\gamma(M + m)}{a^3}.$$

Et substituant dans l'équation (2), on pourra écrire

(5) $$\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) + \frac{2\mu}{r} + \gamma(1 + \mu)\frac{r^2\sin^2\theta}{a^3} = C,$$

C étant une arbitraire dont les diverses valeurs caractérisent les diverses surfaces de niveau.

On voit encore sur la figure que $\cos\delta = \sin\theta\cos\psi$, donc

$$\frac{r^2}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) + \frac{2\mu}{r} + \gamma(1+\mu)\frac{r^2\sin^2\theta}{a^3} = C \tag{6}$$

est l'équation des surfaces de niveau rapportées aux coordonnées r, θ, ψ.

En coordonnées rectangulaires, cette équation devient

$$\frac{2y^2 - x^2 - z^2}{a^3} + \frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \gamma(1+\mu)\frac{y^2+z^2}{a^3} = C, \tag{7}$$

car on a les formules de transformation

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\psi, \quad z = r\sin\theta\sin\psi.$$

6. Le nombre γ est le carré du rapport des deux mouvements de rotation et de translation de l'astre considéré. Si la vitesse de rotation est nulle, $t = \infty$ et $\gamma = 0$; si les deux mouvements s'effectuent dans le même temps, $\gamma = 1$. Enfin, si la rotation est très-rapide, il faudra faire $\gamma = \infty$; et de même si la masse M du corps troublant est infiniment petite, car cela revient à supposer T infini.

L'équation (7) montre que les surfaces de niveau de l'atmosphère sont symétriques par rapport aux trois plans coordonnés; elles ont l'origine pour centre, et ne sont pas généralement de révolution. Elles deviennent de révolution autour de l'axe Ox lorsque la masse M n'existe pas, et autour de l'axe Oy quand il n'y a pas de rotation. En effet, dans le premier cas, $\gamma = \infty$, et l'équation (5) se réduit à une relation entre r et θ ; dans le second, $\gamma = 0$, elle se réduit alors à une relation entre r et δ.

De la surface qui limite l'atmosphère.

7. L'atmosphère d'un corps céleste ne saurait s'étendre indéfiniment. Son caractère essentiel est de presser sur le noyau qu'elle enveloppe : or il existe une surface en dehors de laquelle une molécule ne pèse plus vers le noyau ; nous l'appellerons la *surface limite*. Son équation s'obtient en égalant à zéro la somme des composantes suivant le rayon vecteur des diverses forces qui agissent sur la molécule. Ce sont ici la force centrifuge, l'attraction du noyau, et celle du corps M diminuée de l'action qu'il exerce sur le centre de m (n° 4).

On aura du reste immédiatement cette équation si l'on observe que la dérivée par rapport à r du premier membre de l'équation des surfaces de niveau est précisément la composante de la pesanteur suivant le rayon vecteur r (*Mécanique*

céleste, livre III, nº 25). Sur la surface en question cette composante doit changer de signe. Il suit de cette remarque, et de l'équation des surfaces de niveau, prise par exemple sous la forme (6), que

$$\frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{\mu}{r^2} + \gamma(1+\mu)\frac{r\sin^2\theta}{a^3} = 0 \tag{8}$$

est l'équation de la surface limite, au delà de laquelle toute molécule tend à s'éloigner de l'astre, et par conséquent ne saurait faire partie de l'atmosphère proprement dite.

Pour r très-petit, le premier membre de cette équation est évidemment négatif; et il le sera pour tous les points qui pèsent vers le noyau m, puisqu'on a pris négativement les forces dirigées vers l'origine des coordonnées. Donc l'inégalité

$$\frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{\mu}{r^2} + \gamma(1+\mu)\frac{r\sin^2\theta}{a^3} < 0 \tag{9}$$

doit être satisfaite en tout point appartenant réellement à l'atmosphère.

8. Il est aisé de voir que cette surface limite est symétrique par rapport aux plans coordonnés; l'origine en est le centre, et elle sera de révolution dans les mêmes circonstances que les surfaces de niveau.

Cherchons suivant quelle direction son rayon vecteur r est minimum. Pour cela formons la différentielle totale de l'équation (8):

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1}{a^3} + \frac{2\mu}{r^3} + \gamma(1+\mu)\frac{\sin^2\theta}{a^3}\right]dr \\ +&\left[\frac{6r}{a^3}\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi + \gamma(1+\mu)\frac{2r\sin\theta\cos\theta}{a^3}\right]d\theta \\ &-\frac{6r}{a^3}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi\, d\psi \end{aligned}\right\} = 0.$$

Égalons à zéro les dérivées partielles $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\psi}$, nous aurons ainsi deux équations auxquelles on peut satisfaire de trois manières différentes, en posant

$$\theta = 0,$$

ou

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = 0,$$

ou enfin

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

ce sont les directions des trois axes coordonnés. L'équation (8) donne pour les valeurs correspondantes du rayon vecteur

$$r^3 = -\mu a^3,$$

$$r^3 = \frac{\mu a^3}{2+\gamma(1+\mu)},$$

$$r^3 = \frac{\mu a^3}{\gamma(1+\mu)-1}.$$

Ainsi la surface limite ne coupe pas l'axe Ox; elle ne coupera pas non plus l'axe Oz si $\gamma(1+\mu) < 1$. Dans tous les cas, le rayon minimum est dirigé suivant Oy.

Nous avons admis précédemment et toutes nos formules supposent que $\frac{r}{a}$ est une petite quantité, $\frac{1}{10}$ par exemple. Pour que le plus petit rayon de la surface limite (que nous verrons tout à l'heure être le plus grand rayon de l'atmosphère) satisfasse à cette condition, il faut que $\frac{\mu}{2+\gamma(1+\mu)}$ soit aussi une fort petite quantité. Cette condition sera toujours remplie dans les applications que nous ferons de ces formules, soit dans le cas des comètes parce que μ sera très-petit, soit dans le cas du Soleil parce que γ sera infiniment grand.

9. Cette distance minimum à laquelle est nécessairement limitée l'atmosphère dans le sens du corps troublant, détermine entre les deux centres m et M le point de nulle pesanteur. Seulement il faut remarquer qu'il ne s'agit pas ici de la pesanteur absolue d'une molécule : c'est la *pesanteur relative* vers le centre O qui est nulle à la limite atmosphérique, c'est-à-dire la somme algébrique de la pesanteur absolue de la molécule vers O et de la pesanteur de O dans le sens de la molécule. Quant à la partie commune de ces deux pesanteurs, elle produit le déplacement du système et ne modifie pas la forme de l'atmosphère.

Si l'on veut calculer directement cette distance r, en cherchant le point où la pesanteur est nulle, on écrira l'équation

$$\frac{m}{r^2} + \frac{M}{a^2} = \frac{M}{(a-r)^2} + \frac{4\pi^2 r}{t^2},$$

où le terme $\frac{M}{a^2}$ représente la pesanteur de m vers M. Eliminons t, au moyen de l'équation (4), il vient

$$\frac{(2a-r)r^3}{a^2(a-r)^2} = \mu - \gamma(1+\mu)\frac{r^3}{a^3}.$$

Si l'on admet à priori que $\frac{r}{a}$ est très-petit, on peut réduire le premier membre à $\frac{2r^3}{a^3}$, et il en résulte

$$r = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2+\gamma(1+\mu)}}, \tag{10}$$

comme on l'avait trouvé au n° **8**.

Discussion des surfaces de niveau fermées.

10. Occupons-nous d'abord des surfaces de niveau dont tous les points satisfont à l'inégalité (9); elles sont contenues à l'intérieur de la surface limite (8), et la pression y est dirigée vers le noyau. Nous verrons qu'elles sont fermées et peuvent convenir à l'équilibre des couches atmosphériques.

Différentions l'équation (6) en laissant l'angle ψ constant,

$$dr = \frac{3\cos^2\psi + \gamma(1+\mu)}{\frac{\mu}{r^2} - \frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \gamma(1+\mu)\frac{r\sin^2\theta}{a^3}}\frac{r^2}{a^3}\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

Le dénominateur est toujours positif, puisque l'inégalité (9) est supposée satisfaite; le numérateur est aussi positif, donc dr reste positif, θ croissant de o à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi le rayon vecteur r augmente avec θ du pôle à l'équateur quel que soit ψ, c'est-à-dire dans tous les azimuts. L'axe des pôles est nécessairement le plus petit des trois axes.

Remarquons actuellement que ψ augmentant de o à $\frac{\pi}{2}$, le numérateur diminue et le dénominateur augmente; il en résulte que $\frac{dr}{d\theta}$ diminue. L'augmentation du rayon vecteur avec θ est donc d'autant moins rapide que ψ approche plus de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi l'axe qui répond à $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, est moindre que celui qui répond à $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$. L'axe dirigé vers le corps troublant est le plus grand des trois.

Tous les rayons sont finis et la surface est fermée. Puisqu'elle est intérieure à la surface limite (8), chaque rayon r est moindre que le plus grand rayon (10) de la surface limite. Pour tout point d'une surface de niveau fermée on a donc l'inégalité

$$r < \frac{a\sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{2+\gamma(1+\mu)}}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\mu a^3}{r^3} > 2 + \gamma(1+\mu). \tag{11}$$

11. L'atmosphère a une figure possible d'équilibre, mais elle n'en a qu'une seule ; je veux dire que, pour une valeur attribuée à la constante, il ne saurait exister plusieurs surfaces de niveau qui soient intérieures à la surface limite. On va voir en effet que l'équation (6) n'a qu'une seule racine réelle et positive, quand on suppose satisfaite l'inégalité (9), condition qui a toujours lieu pour les points appartenant à l'atmosphère proprement dite.

L'équation (6), qui est du troisième degré en r, peut s'écrire

$$\frac{[3\cos^2\psi + \gamma(1+\mu)]\sin^2\theta - 1}{a^3} r^3 - Cr + 2\mu = 0;$$

et l'inégalité (9) donne

$$r < a\sqrt[3]{\frac{\mu}{[3\cos^2\psi + \gamma(1+\mu)]\sin^2\theta - 1}}.$$

Or je dis qu'il ne peut exister qu'une seule racine positive satisfaisant à cette condition. Supposons qu'il y en ait deux α et β, la troisième sera $-(\alpha+\beta)$ puisque l'équation manque du second terme : elle est donc moindre en valeur absolue que

$$2a\sqrt[3]{\frac{\mu}{[3\cos^2\psi + \gamma(1+\mu)]\sin^2\theta - 1}}.$$

Le produit des trois racines sera moindre que

$$\frac{2\mu a^3}{[3\cos^2\psi + \gamma(1+\mu)]\sin^2\theta - 1}.$$

Or il devrait lui être égal au signe près, puisque c'est là précisément le dernier terme de l'équation. Cette équation a donc au plus une racine positive qui satisfait à l'inégalité (9).

12. Déterminons actuellement les rapports de grandeur des trois axes d'une surface de niveau. Soit R (*fig.* 2) la longueur du demi-axe dirigé suivant Ox et qui répond à $\theta = 0$; R′ le demi-axe dirigé suivant Oy, qui répond à $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$; et R″ le troisième demi-axe qu'on obtient en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Il résulte de ce qu'on a vu au n° **10** que $R < R'' < R'$.

Ces longueurs, pour l'une des surfaces (6), seront données en fonction de la

constante arbitraire C par les équations

$$(12) \qquad \frac{R^3}{a^3} + CR - 2\mu = 0,$$

$$(13) \qquad [2 + \gamma(1+\mu)]\frac{R'^3}{a^3} - CR' + 2\mu = 0,$$

$$(14) \qquad [1 - \gamma(1+\mu)]\frac{R''^3}{a^3} + CR'' - 2\mu = 0.$$

On pourra aussi calculer R et R″ en fonction de R′ supposé connu. Pour cela on éliminera C entre les équations précédentes, ce qui donne

$$(15) \qquad \frac{R^3}{R'^3} + \left[\frac{2\mu a^3}{R'^3} + 2 + \gamma(1+\mu)\right]\frac{R}{R'} - \frac{2\mu a^3}{R'^3} = 0,$$

$$(16) \qquad [1 - \gamma(1+\mu)]\frac{R''^3}{R'^3} + \left[\frac{2\mu a^3}{R'^3} + 2 + \gamma(1+\mu)\right]\frac{R''}{R'} - \frac{2\mu a^3}{R'^3} = 0;$$

et l'on aura à résoudre ces équations du troisième degré en $\frac{R}{R'}$ et $\frac{R''}{R'}$.

13. Considérons d'abord la première, et posons

$$u = \frac{\mu a^3}{R'^3}, \qquad v = \frac{R}{R'};$$

u est essentiellement positif, et l'on sait que v doit être plus petit que l'unité. L'équation (15) devient

$$v^3 + [2u + 2 + \gamma(1+\mu)]v - 2u = 0;$$

ou bien, en résolvant par rapport à u,

$$u = \frac{v^3 + [2 + \gamma(1+\mu)]v}{2 - 2v}.$$

La dérivée

$$\frac{dv}{du} = \frac{2 - 2v}{3v^2 + 2u + 2 + \gamma(1+\mu)}$$

est positive, à cause de $u > 0$, et $v < 1$. Il s'ensuit que v diminue quand u diminue, et que le rapport $\frac{R'}{R}$ augmente quand R′ augmente, c'est-à-dire pour des couches de plus en plus éloignées du centre.

Au voisinage du centre, u est très-grand et v diffère très-peu de l'unité ; le rapport $\frac{R'}{R}$ reste sensiblement constant et égal à 1, parce que $\frac{dv}{du}$ est alors fort petit.

14. Passons à la seconde équation. En faisant

$$w = \frac{R''}{R'},$$

elle devient

$$[1 - \gamma(1+\mu)]w^2 + [2u + 2 + \gamma(1+\mu)]w - 2u = 0;$$

d'où

$$u = \frac{[1-\gamma(1+\mu)]w^2 + [2+\gamma(1+\mu)]w}{2 - 2w},$$

et la dérivée

$$\frac{dw}{du} = \frac{2 - 2w}{2u + 2 + \gamma(1+\mu) + 3[1-\gamma(1+\mu)]w^2}.$$

On sait encore que w doit être moindre que l'unité (n° **10**).

Mais puisqu'on se borne aux surfaces de niveau fermées pour lesquelles l'inégalité (11) est satisfaite, on a par la définition de u

(17) $$u > 2 + \gamma(1+\mu).$$

Cela posé, je vais faire voir que le dénominateur de $\frac{dw}{du}$ est toujours positif.

Distinguons deux cas : ou bien l'on a

$$1 - \gamma(1+\mu) \geqq 0,$$

et alors le dénominateur est > 0 quel que soit w; ou bien

$$1 - \gamma(1+\mu) < 0,$$

et la condition de u positif exige que l'on ait

$$w^2 < \frac{2+\gamma(1+\mu)}{\gamma(1+\mu)-1}.$$

De cette inégalité je conclus que le dénominateur de $\frac{dw}{du}$,

$$2u + 2 + \gamma(1+\mu) - 3[\gamma(1+\mu) - 1]w^2,$$

est plus grand que

$$2u + 2 + \gamma(1+\mu) - 3[2 + \gamma(1+\mu)] = 2[u - 2 - \gamma(1+\mu)],$$

quantité positive en vertu de l'inégalité (17). Donc, dans tous les cas, ce dénominateur est positif.

Ainsi $\frac{dw}{du} > 0$, et w augmente avec u; le rapport $\frac{R'}{R''}$ augmente donc aussi en même temps que R'. Vers le centre, u étant très-grand, ce rapport se maintient sensiblement égal à l'unité.

En résumé, les couches atmosphériques très-voisines du noyau central supposé sphérique, tendent elles-mêmes à devenir sphériques. A mesure qu'on s'éloigne du centre, les surfaces de niveau s'aplatissent vers les pôles, et elles s'allongent de plus en plus dans la direction du corps troublant.

Discussion de la surface libre de l'atmosphère.

15. Nous appellerons *surface libre* la plus grande des surfaces de niveau fermées, celle qui atteint la surface limite. C'est à la surface libre que se termine l'atmosphère quand elle s'étend aussi loin que possible; mais elle peut se terminer à toute autre surface de niveau intérieure.

Il est aisé de trouver la valeur de la constante arbitraire C qui correspond à la surface libre. Son demi grand axe R' doit évidemment égaler le plus petit rayon (10) de la surface limite, lequel est dirigé, comme on sait, suivant la même direction Oy. Donc

$$(18) \qquad R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2+\gamma(1+\mu)}}.$$

Or, si dans le premier terme de l'équation (13) on met pour R' cette expression, on a

$$CR' = 3\mu;$$

d'où enfin

$$(19) \qquad C = \frac{3\mu^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2+\gamma(1+\mu)}}{a}.$$

Cette valeur de C étant portée dans l'équation générale des surfaces de niveau, on aura l'équation de la surface libre.

16. Pour calculer les rapports des axes R, R', R'' de cette surface libre, il suffira de mettre à la place de R' sa valeur (18) dans les équations en v et w des nos **13** et **14**. La valeur actuelle de R' donne

$$u = \frac{\mu a^3}{R'^3} = 2+\gamma(1+\mu);$$

et ces deux équations deviennent

$$(20)\qquad v^3 + 3[2+\gamma(1+\mu)]v - 2[2+\gamma(1+\mu)] = 0,$$

$$(21)\qquad [1-\gamma(1+\mu)]w^3 + 3[2+\gamma(1+\mu)]w - 2[2+\gamma(1+\mu)] = 0;$$

nous allons les discuter.

De la première, on tire

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{\gamma(2-3v)^2}{6v^2(1-v)}, \quad \frac{dv}{d\gamma} = \frac{(1+\mu)(3v-2)^2}{6v^2(1-v)}.$$

Mais v étant < 1, ces dérivées sont constamment positives; cela prouve que v augmente avec μ, et aussi avec γ. Le minimum de v a lieu pour $\mu = 0$, $\gamma = 0$; le maximum pour $\mu = \infty$, $\gamma = \infty$.

Dans le premier cas, v est donné par l'équation

$$v^3 + 6v - 4 = 0,$$

qui a deux racines imaginaires, et une réelle positive α dont la valeur approchée est 0,626. Dans le second cas, on trouve que $v = \frac{2}{3}$. Ainsi v, ou le rapport $\frac{R}{R'}$, est plus petit que $\frac{2}{3}$; mais il en diffère peu, sa valeur minimum étant α.

Lorsque μ et γ seront donnés, on pourra toujours, par l'équation (20), calculer le rapport v de l'axe des pôles au grand axe; et il n'y aura pas d'incertitude, puisque cette équation a toujours deux racines imaginaires et une réelle comprise entre α et $\frac{2}{3}$.

17. Quant à l'équation (21), elle donne

$$\frac{dw}{d\mu} = \frac{\gamma(w^3-3w+2)^2}{18w^2(1-w)}, \quad \frac{dw}{d\gamma} = \frac{(1+\mu)(w^3-3w+2)^2}{18w^2(1-w)}.$$

Or $w^3 - 3w + 2 = (w-1)^2(w+2)$; de plus on sait que $w < 1$. Il en résulte que ces dérivées sont toujours positives, et que w croît en même temps que μ et γ.

Ainsi w sera minimum pour $\mu = 0$, $\gamma = 0$; ce qui donne

$$w^3 + 6w - 4 = 0, \quad \text{d'où} \quad w = \alpha = 0,626.$$

Il sera maximum pour $\mu = \infty$, $\gamma = \infty$; et alors

$$w^3 - 3w + 2 = 0,$$

équation qui est satisfaite par $w = 1$. Le rapport w ou $\frac{R''}{R'}$ de l'axe moyen au grand axe est donc toujours compris entre α et l'unité.

Pour des valeurs quelconques données de μ et γ, l'équation (21) fournira la valeur correspondante de w. Cette équation a deux racines imaginaires, toutes les fois que $1 - \gamma(1 + \mu) > 0$, et une racine réelle comprise entre α et 1. Si au contraire $1 - \gamma(1 + \mu) < 0$, on voit aisément, par des substitutions, que l'équation a une racine négative, une positive plus grande que 1, et une autre comprise entre α et l'unité : c'est cette dernière qui répond à la question, et la seule qu'on aura besoin de calculer.

18. La surface libre jouit d'une propriété remarquable que nous appliquerons souvent : le sommet du grand axe, dont les coordonnées sont $\psi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = R'$, est un point singulier, où l'on peut mener à la surface une infinité de plans tangents dont l'enveloppe est un cône du second degré.

Faisons, dans l'équation (7), $C = \frac{3\mu}{R'}$, nous aurons

$$\frac{2y^2 - x^2 - z^2}{a^2} + \frac{2\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \gamma(1 + \mu)\frac{y^2 + z^2}{a^2} = \frac{3\mu}{R'},$$

pour l'équation en coordonnées rectangulaires de la surface libre. Portons l'origine au sommet ($x = 0$, $y = R'$, $z = 0$), en remplaçant y par $y + R'$,

$$\frac{2y^2 + 4R'y + 2R'^2 - x^2 - z^2}{a^2} + \frac{2\mu}{\sqrt{x^2 + (y + R')^2 + z^2}} + \gamma(1 + \mu)\frac{y^2 + 2R'y + R'^2 + z^2}{a^2} = \frac{3\mu}{R'}.$$

Le plan tangent en ce point sera donné par une équation de la forme

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 z = 0.$$

Or on s'assurera facilement que les trois coefficients sont nuls en vertu de la valeur (18) de R'; de sorte qu'en ce point il n'y a pas un plan tangent déterminé. Il y en a une infinité dont l'enveloppe est représentée par

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 y^2 + 2\left(\frac{d^2F}{dydz}\right)_0 yz + 2\left(\frac{d^2F}{dxdz}\right)_0 xz + \left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)_0 z^2 = 0;$$

équation qui devient, dans le cas actuel,

$$(22) \qquad [3 + \gamma(1 + \mu)]x^2 - 3[2 + \gamma(1 + \mu)]y^2 + 3z^2 = 0,$$

c'est une surface conique, qui est de révolution lorsque $\gamma = 0$. A cause de la symétrie des figures, l'autre extrémité du grand axe jouit des mêmes propriétés.

Des surfaces de niveau extérieures à la surface libre.

19. Nous avons uniquement considéré, dans la discussion précédente, les surfaces de niveau fermées, qui enveloppent le noyau de toute part et ne sortent pas de la surface limite. Si l'on prend l'équation (13) résolue par rapport à la constante

$$C = \frac{2\mu + [2 + \gamma(1+\mu)]\frac{R'^3}{a^3}}{R'},$$

et sa dérivée par rapport à R'

$$\frac{dC}{dR'} = \frac{-2\mu + [4 + 2\gamma(1+\mu)]\frac{R'^3}{a^3}}{R'^2},$$

on voit que ces surfaces, qui coupent l'axe des y à des distances croissantes depuis $R' = 0$ jusqu'à la valeur (18) correspondante à la surface libre, répondent elles-mêmes à des valeurs de la constante arbitraire positives et décroissantes depuis l'infini jusqu'à la valeur (19).

En ne bornant pas la discussion aux surfaces fermées, on reconnaîtrait qu'aux mêmes valeurs de C répond une autre série de surfaces coupant l'axe des y à des distances décroissantes de l'infini à la valeur (18) de R'; mais elles ne coupent pas l'axe des x, attendu que l'équation (12) n'a qu'une seule racine positive.

Les valeurs de C décroissantes depuis la valeur (19) jusqu'à zéro donnent une troisième série de surfaces qui coupent l'axe des x, mais ne coupent pas l'axe des y parce que l'équation (13) acquiert alors des racines imaginaires.

Enfin, aux valeurs négatives de C correspond une quatrième série de surfaces, coupant aussi l'axe des x sans couper l'axe des y, et faisant suite aux précédentes.

Ces trois dernières séries de surfaces, étant formées de nappes indéfinies, ne conviennent pas à l'équilibre des couches atmosphériques. Elles offrent cependant des propriétés intéressantes.

20. Si de l'équation (6) on retranche l'équation (8) multipliée par r, il vient

$$(23) \qquad \frac{3\mu}{r} = C, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{3\mu}{C};$$

relation très-simple qui caractérise les points où la surface limite est coupée par les surfaces de niveau. Mais on peut s'assurer que les seules surfaces de niveau qui coupent effectivement la surface limite sont celles de la troisième série dont nous venons de parler.

Ces points jouissent encore d'une autre propriété remarquable : le rayon vecteur mené du centre O y est tangent à la surface de niveau. On le vérifie en montrant que, suivant cette direction, le rayon vecteur r a deux valeurs qui deviennent égales. En effet l'équation (6) de ces surfaces, qui est de la forme $V = \text{const.}$, et du troisième degré en r, fournit généralement trois valeurs du rayon, pour une direction donnée θ, ψ. Si deux de ces racines sont égales, elles sont solutions communes à l'équation $V = \text{const.}$, et à sa dérivée par rapport à r, $\frac{dV}{dr} = 0$. Or cette dernière équation n'est autre chose que la surface limite (n° **7**). Les racines égales répondent donc aux intersections de la surface limite par les surfaces de niveau, comme il fallait le démontrer.

La première et la seconde série de surfaces, qui correspondent aux mêmes valeurs de C, ne coupent pas la surface limite, les unes lui étant intérieures, les autres extérieures. Mais si l'on donne à C la valeur (19), elles se réunissent en une seule, dont une partie fermée est comprise dans la surface limite, c'est ce que nous avons appelé la surface libre; l'autre partie sort de la surface limite avec laquelle elle a un point commun sur l'axe des y (le point singulier étudié au n° **18**), et elle s'étend au delà en nappe indéfinie.

Pour une valeur de C tant soit peu plus petite que (19), on obtient une surface de la troisième série, qui, par conséquent, ne coupe pas l'axe des y; comme elle est très-voisine de la précédente, il importe de l'étudier.

21. Différentions l'équation (6) par rapport à r et à C, en laissant θ et ψ constants, nous aurons

$$\frac{dC}{dr} = \frac{2r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{2\mu}{r^2} + \frac{2\gamma(1+\mu)}{a^3}r\sin^2\theta.$$

Éliminons ensuite θ et ψ au moyen de la même équation (6), nous pourrons écrire

$$\frac{dr}{dC} = \frac{r}{2\left(C - \frac{3\mu}{r}\right)}.$$

Tant que $\frac{dr}{dC}$ aura une valeur finie, deux surfaces consécutives, c'est-à-dire répondant à des valeurs C, C + dC de la constante arbitraire, différeront infiniment peu.

Mais, au voisinage du point où une surface de niveau traverse la surface limite, on a $C - \frac{3\mu}{r} = 0$ (n° **20**), et $\frac{dr}{dC}$ devient infini. Si, par exemple, on considère la surface libre, puis la surface répondant à une valeur de C un peu moindre, on verra que la nouvelle surface enveloppe la précédente, et en diffère infiniment peu jusqu'au voisinage de l'axe Oy; mais, au lieu de couper cet axe, comme la surface libre, elle s'arrête avant de l'atteindre, devient tangente aux rayons vecteurs, puis s'éloigne indéfiniment.

L'examen de quelques cas particuliers éclaircira cette discussion générale, en montrant d'une manière plus précise la forme des diverses surfaces de niveau dont nous venons de signaler l'existence.

Examen du cas particulier où $\mu = \infty$.

22. Ce cas est celui de l'atmosphère du Soleil, car il n'y a alors d'autre corps troublant que les planètes, dont la masse est très-petite relativement à celle du Soleil; on peut donc faire M nul, et par suite μ infini. Cela revient à ne considérer d'autre force que l'attraction centrale et la force centrifuge due au mouvement de rotation, et il est évident que l'atmosphère est susceptible d'un état d'équilibre relatif.

Les conditions de cet équilibre se déduiront des formules générales, en y introduisant l'hypothèse $\mu = \infty$. L'équation des surfaces de niveau se réduit ainsi à

$$(24) \qquad \frac{2}{r} + \frac{\gamma}{a^3} r^2 \sin^2 \theta = \text{const}.$$

L'équation (4) devient, à cause de M nul,

$$\frac{4\pi^2}{mt^2} = \frac{\gamma}{a}.$$

$\frac{\gamma}{a^3}$ est la quantité désignée par α dans la *Mécanique céleste* (livre III, n° **47**), ou le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, sous l'équateur et à une distance du centre égale à l'unité.

Les surfaces de niveau sont, comme on devait le prévoir, de révolution autour de Ox, axe de rotation du Soleil. On trouvera, soit directement, soit au moyen des équations (15) et (16), que les axes de ces surfaces sont liés par les relations

$$\frac{R''}{R'} = 1, \quad \frac{R' - R}{R} = \frac{\alpha R'^3}{2}.$$

L'aplatissement des couches atmosphériques va en croissant avec la distance au centre.

Quant à l'équation (8) de la surface limite, elle devient pour $\mu = \infty$, et en y introduisant α,

$$\alpha r^3 \sin^2\theta = 1.$$

Celle de la surface libre (nº **15**) est

$$\frac{2}{r} + \alpha r^2 \sin^2\theta = 3\alpha^{\frac{1}{3}},$$

dont les demi-axes ont pour longueur

$$R = \frac{2}{3}R', \quad R'' = R' = \alpha^{-\frac{1}{3}}.$$

Au point singulier, extrémité de l'axe R', le lieu des plans tangents que l'on peut mener à la surface est donné par l'équation (22), qui se réduit ici à $x^2 - 3y^2 = 0$, d'où

$$y\sqrt{3} = \pm x.$$

Ce sont deux plans faisant entre eux un angle de 120 degrés. Comme la surface est de révolution, il s'ensuit qu'elle possède tout le long de l'équateur une arête saillante, qui n'est du reste que la ligne de jonction de la portion fermée de la surface libre avec ses deux nappes indéfinies (nº **20**).

23. La *fig.* 3 représente la section méridienne de la surface limite composée de deux branches L, L, qui ont pour asymptote l'axe Ox, la section méridienne de la surface libre, et celle d'une surface de niveau extérieure très-voisine. Cette dernière s'écarte peu de la surface libre, et sa forme est sensiblement la même, excepté vers l'équateur où elle devient tangente aux rayons vecteurs, et s'ouvre en quelque sorte pour se développer en deux nappes infinies.

Il résulte de là que si le fluide atmosphérique qui enveloppe le Soleil est en excès, je veux dire s'il dépasse la surface libre, il doit s'écouler par cette ouverture dans le plan de l'équateur, et y former une espèce d'anneau circulant encore autour du Soleil, mais qui sera désormais indépendant de l'atmosphère.

Cet effet se produira, par exemple, si en se refroidissant le noyau solaire éprouve une contraction, d'où diminution du moment d'inertie et augmentation de la vitesse angulaire : car alors α augmente et R' diminue. Par suite, la surface libre se rétrécit, se rapproche du centre, en restant semblable à elle-même; et tout le fluide qui se trouve en dehors, coulant le long des surfaces de niveau, afflue vers l'équateur, et s'échappe, comme on vient de le dire, cessant ainsi d'appartenir à l'atmosphère solaire.

C'est là précisément le fait que Laplace a pris pour fondement de son hypothèse sur la formation des planètes : nous le retrouvons ici comme conséquence de la théorie mathématique des atmosphères et d'une propriété de leurs surfaces de niveau.

Cas où l'atmosphère n'a pas de rotation.

24. La vitesse de rotation étant supposée nulle, on a $\gamma = 0$ (n° **6**). Nous admettrons de plus que le rapport μ de la masse de l'astre à celle du corps troublant est fort petit. Ces conditions seront réalisées si l'on considère une comète n'ayant qu'un mouvement de translation rectiligne vers le Soleil. Son atmosphère n'est soumise qu'aux attractions du Soleil et du noyau, et nos formules donneront la figure avec laquelle l'équilibre pourrait avoir lieu, si la distance a de la comète au Soleil restait constante.

L'équation (5) des surfaces de niveau devient, dans le cas actuel,

$$\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) + \frac{2\mu}{r} = C, \tag{25}$$

et celle de la surface limite

$$\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) - \frac{\mu}{r^2} = 0. \tag{26}$$

Ces diverses surfaces sont de révolution autour du rayon vecteur Oy ; elles ont un même cône asymptote représenté par l'équation

$$3\cos^2\delta - 1 = 0,$$

d'où $\delta = 54^\circ\, 44'$, et en coordonnées rectangulaires par

$$x^2 + z^2 = 2y^2.$$

La valeur de la constante arbitraire correspondante à la surface libre est (n° **15**)

$$C = \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \mu^{\frac{2}{3}}}{a}; \tag{27}$$

et la distance limite de l'atmosphère dans la direction du Soleil, ou la longueur du demi grand axe de la surface libre, est

$$R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}. \tag{28}$$

Les demi-axes R, R″ sont égaux, et le rapport $\frac{R}{R'}$ est donné par l'équation (n° **16**)

$$\frac{R^2}{R'^2} + 6\frac{R}{R'} - 4 = 0,$$

d'où approximativement

$$\frac{R}{R'} = 0,626 \quad \text{et} \quad R' = 1,598\,R.$$

Enfin, aux points singuliers, extrémités de l'axe R′, le lieu des tangentes qu'on peut mener à la surface libre s'obtient par l'équation (22), qui se réduit, pour $\gamma = 0$, à

$$x^2 + z^2 = 2y^2.$$

C'est un cône de révolution autour de Oy, égal au cône asymptote dont nous parlions tout à l'heure : l'angle au sommet est $2\delta = 109^\circ\,28'$.

25. La discussion précédente a permis de tracer la *fig.* 4, où sont représentées les sections par le plan xOy de la surface limite LL, de la surface libre, et de diverses surfaces de niveau tant intérieures qu'extérieures.

Celle de ces surfaces qui répond à une valeur de la constante C tant soit peu moindre que (27), est extérieure à la surface libre et en diffère peu ; mais au voisinage de l'axe Oy, elle s'ouvre, devient tangente au rayon vecteur, aux points où elle coupe la surface limite, et s'étend ensuite indéfiniment.

Ici l'on voit que le fluide cométaire en excès, ou qui dépasse la surface limite, devra s'échapper, sous forme de jet, par les deux sommets coniques, extrémités du grand axe, c'est-à-dire suivant la direction Oy du Soleil, aussi bien que dans la direction opposée.

Examen du cas où $\gamma = 1$.

26. Lorsque le mouvement de rotation de l'atmosphère s'exécute dans un temps égal à celui de la révolution apparente du corps troublant, la condition $\gamma = 1$ se trouve remplie (n° **6**). Si de plus la distance a reste constante, il existera pour l'atmosphère un état d'équilibre permanent. Cela aurait lieu pour l'atmosphère d'un satellite, par exemple de la Lune, soumise à l'action perturbatrice de la Terre à laquelle elle présente toujours les mêmes points de sa surface. Une comète se trouve aussi à peu près dans les mêmes circonstances, au voisinage de son périhélie : elle décrit alors sensiblement un arc de cercle, et elle doit tourner constamment la même face vers le Soleil.

Introduisons l'hypothèse $\gamma = 1$ dans les formules générales, en admettant toujours que le rapport μ est très-petit. L'équation (6) des surfaces de niveau devient

$$\frac{r^2}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) + \frac{2\mu}{r} + \frac{r^2}{a^3}(1+\mu)\sin^2\theta = C;$$

et l'équation (8) de la surface limite

$$\frac{r}{a^3}(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) - \frac{\mu}{r^2} + \frac{r}{a^3}(1+\mu)\sin^2\theta = 0.$$

Les couches atmosphériques ne sont plus de révolution; vers le centre, elles tendent à devenir sphériques, tandis qu'en s'éloignant elles s'aplatissent aux pôles de rotation, et s'allongent dans la direction du corps extérieur.

27. La surface libre est caractérisée par une valeur de la constante C, donnée généralement par la formule (19), qui se réduit ici à

$$C = \frac{3^{\frac{4}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}}{a}.$$

La formule (18) donne, en ayant égard à la petitesse de μ,

(29) $$R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}},$$

pour le demi grand axe de la surface libre.

Quant aux deux autres axes de cette surface, les équations (20) et (21) serviront à les déterminer. Si l'on suppose μ infiniment petit, ces équations deviennent

$$\frac{R^3}{R'^3} + 9\frac{R}{R'} - 6 = 0, \quad 3\frac{R''}{R'} - 2 = 0;$$

d'où, approximativement,

$$\frac{R}{R'} = 0,638, \quad \text{et} \quad \frac{R''}{R'} = \frac{2}{3}.$$

L'axe des pôles est le plus petit; les deux autres sont

$$R' = 1,567\,R \quad \text{et} \quad R'' = 1,045\,R.$$

Les sommets du grand axe sont encore des points singuliers; et le cône

$$4x^2 - 9y^2 + 3z^2 = 0$$

représente (toujours pour μ infiniment petit) l'enveloppe des plans tangents que l'on peut mener à la surface libre par ces points.

En donnant à la constante C une valeur un peu moindre que celle qui caractérise la surface libre, on obtient des surfaces qui l'enveloppent sans s'en écarter beaucoup, mais qui s'ouvrent à leur rencontre avec la surface limite; au delà elles s'étendent en nappes indéfinies.

Dans ce cas, comme dans le précédent, s'il y a excès de fluide atmosphérique, l'écoulement aura lieu par les deux pointes opposées que présente la surface libre suivant la direction de son grand axe.

Application aux phénomènes cométaires.

28. Résumons d'abord les conséquences principales de la théorie que nous venons d'exposer. Si l'on imagine une atmosphère très-étendue, enveloppant un astre doué d'un mouvement de rotation, et attirée par un corps céleste que l'on suppose à une grande distance dans le plan de l'équateur, cette atmosphère se disposera en couches d'égale densité. Ces couches sont séparées par des surfaces de niveau qui affectent des formes très-diverses. A peu près sphériques vers le centre, elles s'aplatissent ensuite aux pôles, et s'allongent dans la direction du corps troublant. En continuant à s'éloigner du centre, on atteint des surfaces qui cessent d'avoir la forme sphéroïdale. Elles n'entourent plus l'astre complétement, mais se développent en nappes infinies. Si le fluide atmosphérique était enfermé de toute part, ou s'il existait une pression extérieure suffisante, de pareilles surfaces pourraient convenir à l'équilibre. Mais l'atmosphère n'étant maintenue que par sa pesanteur, elle ne saurait exister au delà de la surface libre, c'est-à-dire de la plus grande des surfaces de niveau telles qu'en chaque point la résultante des forces soit dirigée du dehors au dedans.

Lorsque par une cause quelconque le fluide vient à dépasser cette surface libre, il doit se répandre dans tous les sens sur les surfaces de niveau immédiatement extérieures; et comme elles sont illimitées, le fluide excédant se dissipera entièrement dans l'espace. C'est pour ce motif qu'il importe de connaître la forme de ces surfaces à nappes infinies. Les plus voisines de la surface libre n'en diffèrent sensiblement qu'aux environs du grand axe, où elles s'ouvrent pour donner passage au fluide en excès.

Quand il s'agit de l'atmosphère solaire, les actions extérieures pouvant être négligées, tout est symétrique autour de l'axe des pôles : ce n'est plus alors par deux points seulement que l'écoulement s'effectue, c'est par tout le contour de la ligne équatoriale.

29. Occupons-nous plus spécialement d'une atmosphère cométaire. Pendant la plus grande partie de son mouvement, la comète marche presque en ligne droite sur la direction du Soleil; au voisinage du périhélie, au contraire, elle décrit un arc sensiblement circulaire. Dans tous les cas, nos formules déterminent, pour une position donnée de la comète, la forme que son atmosphère tend à prendre. Le grand axe de la surface libre est dirigé vers le Soleil; il est donné par la formule (18) qui, à cause de μ très-petit, peut être réduite à

$$(30) \qquad R' = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2+\gamma}};$$

γ est nul dans le cas du mouvement de translation rectiligne, et égal à l'unité dans le cas du mouvement circulaire. Cet allongement, suivant la direction du Soleil, tend évidemment à produire une sorte de libration, et à régler l'orientation de la comète, de manière à ce qu'elle présente constamment au Soleil la même face.

Quand la comète approche du Soleil, le fluide qui l'entoure éprouve une dilatation progressive due à l'accumulation de la chaleur solaire. De plus, les dimensions de la surface libre, qui dépendent de la distance a, d'après la formule (30), diminuent avec elle : cette surface se contracte donc, et tout ce qui se trouve en dehors se déverse vers les extrémités du grand axe, et s'écoule par ces deux points, comme par des ouvertures, formant ainsi deux jets opposés suivant le rayon vecteur du Soleil (*fig.* 5).

Après le passage au périhélie, a augmente; la seconde cause de la production des queues n'existe plus. L'accumulation de la chaleur solaire, et la dilatation qui en est la suite, reste la seule cause qui entretienne le développement des queues.

30. On aurait pu croire au premier abord que l'étude d'une atmosphère de comète (atmosphère nécessairement peu étendue à raison de l'excessive petitesse de la masse μ de ces astres) est étrangère à l'explication des phénomènes que l'on y voit se développer sur d'immenses proportions. Les points matériels qui constituent la nébulosité et la queue, primitivement émanés du noyau et de l'atmosphère, ont cessé d'en faire partie. Ce sont des systèmes de particules indépendantes dont la trajectoire est déterminée par les forces extérieures jointes aux circonstances initiales du mouvement. Si elles restent agglomérées de manière à être visibles dans leur ensemble, c'est à cause de l'identité des forces qui les sollicitent, et de la vitesse à peu près commune qu'elles possédaient en se séparant du noyau.

Le calcul des mouvements de ces particules est un problème difficile, que Bessel n'a pu résoudre, dans son *Mémoire sur la constitution physique de la Comète de*

Halley, qu'en négligeant l'action de la comète, c'est-à-dire en supposant les particules bien au delà de l'atmosphère. Mes recherches portent au contraire sur ce qui se passe dans cette atmosphère même ou à sa limite; je ramène cette question de mouvement à une question d'équilibre qui peut être résolue, et je montre l'origine de la queue dans la succession des formes que prend l'atmosphère de la comète au voisinage du Soleil. Le problème qui fait l'objet de mon Mémoire se rattache donc essentiellement à la théorie des queues, bien qu'il soit tout à fait indépendant des calculs de Bessel et des travaux récents de M. Faye.

31. De la formule (30) résulte que, toutes les autres circonstances restant les mêmes, les dimensions d'une comète doivent varier proportionnellement à la distance au Soleil : en se rapprochant de cet astre, elle doit diminuer de volume.

Cette relation fournit également un moyen de calculer la masse d'une comète, ou du moins d'en apprécier l'ordre de grandeur. Comme il ne s'agit que d'une approximation, il n'y a aucun inconvénient à supposer $\gamma = 0$ dans la formule (30), et en appelant D l'axe entier de l'atmosphère, on a

$$D = a\sqrt[3]{4\mu}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{D^3}{4a^3}.$$

La difficulté est d'évaluer le diamètre D. Le noyau apparent doit être intérieur à la surface libre : en prenant donc pour D le diamètre du noyau, c'est une limite inférieure de la masse que l'on obtient. Ou bien encore on observera la comète à une grande distance du Soleil, avant que la queue ait commencé à paraître; il est probable qu'alors la nébulosité cométaire diffère peu de l'atmosphère même, et on aura une valeur approchée de la masse.

32. Si les principes de notre théorie étaient rigoureusement exacts, toutes les surfaces de niveau auraient pour centre le noyau, et les comètes affecteraient nécessairement une forme symétrique de part et d'autre de ce point. Par conséquent on observerait, non pas une queue unique, mais deux queues partant du noyau, l'une dirigée vers le Soleil, l'autre à l'opposite. Or le fait de deux queues diamétralement opposées est tout à fait exceptionnel, si même il s'est jamais présenté.

La théorie qui fait dépendre les phénomènes cométaires de la seule attraction du Soleil et du noyau est donc en défaut. Il y a là autre chose que des effets de la gravitation, et l'on est conduit naturellement à chercher si l'on pourrait rendre compte des apparences en joignant à la gravité une nouvelle force : par exemple, la force répulsive adoptée par M. Faye dans ses publications sur la comète de Donati, et dont il attribue l'origine aux radiations solaires. Cette force possède en

effet une composante radiale répulsive propre à faire concevoir à priori l'existence d'une queue unique. Nous n'avons pas ici à discuter les questions physiques ou astronomiques que soulève cette hypothèse; nous devons rester dans le domaine de l'analyse, et nous borner à introduire dans les formules les termes qui représentent l'action de cette force, sans préjuger quelle en peut être la cause.

SECONDE PARTIE.

Hypothèse d'une force répulsive.

33. Nous allons reprendre l'étude géométrique d'une atmosphère de comète, en ayant égard à cette nouvelle force. Nous admettrons qu'elle agit suivant le rayon vecteur mené du Soleil, et en raison inverse du carré de la distance à cet astre. Elle peut donc être représentée par la gravité elle-même multipliée par un certain facteur φ. Mais ce qui en caractérise la nature et la distingue de la gravitation, c'est que sa grandeur dépend de la matière sur laquelle elle agit, comme cela a lieu pour les actions qui s'exercent proportionnellement à la surface des corps et non à leur masse, telles que la pression ou la résistance d'un milieu : l'intensité φ varie en raison inverse de la densité des particules. On devra la considérer comme nulle s'il s'agit du noyau cométaire dont la densité est assez grande. Elle augmente quand la densité diminue; elle aura diverses valeurs si l'atmosphère contient des substances inégalement affectées par cette action solaire.

34. La force répulsive étant ainsi définie, il est aisé de former l'équation des surfaces de niveau dans l'atmosphère soumise à cette nouvelle influence. Toutefois nous nous bornerons à l'examen du seul cas où $\gamma = 0$ (n° **24**) : c'est celui d'une comète sans rotation tombant en ligne droite vers le Soleil. Les circonstances principales de cette discussion se reproduiraient sans modification importante dans l'examen du cas général.

L'équation (1) des surfaces de niveau se réduit, puisqu'il n'y a pas de rotation, à $\int S ds + \frac{m}{r} = \text{const}$; et en mettant pour l'intégrale sa valeur (n° **4**),

$$\frac{M}{s} - \frac{M}{a'^3}x + \frac{m}{r} = \text{const.} \tag{31}$$

L'attraction du Soleil M sur une molécule m étant $\frac{Mm}{s^2}$, la répulsion exercée sur la même particule sera $-\varphi\frac{Mm}{s^2}$. On voit par là que, pour tenir compte de la nouvelle

force, il suffira d'ajouter à $\frac{M}{s}$ le terme $-\varphi\frac{M}{s}$, ce qui revient à le multiplier par $1-\varphi$. Le terme suivant n'a pas besoin d'être modifié, car il représente l'attraction exercée sur le noyau cométaire, et nous sommes convenus de négliger la répulsion éprouvée par ce noyau. Le dernier terme subsiste également sans altération, comme provenant de l'action du noyau sur la molécule. L'équation des surfaces de niveau, dans le cas actuel, est donc

$$(1-\varphi)\frac{M}{s}-\frac{M}{a^2}y+\frac{m}{r}=\text{const.}$$

Remplaçons $\frac{1}{s}$ et y par leurs valeurs (n° 4), en négligeant toujours $\frac{r^3}{a^3}$, nous aurons

$$\frac{M(1-\varphi)}{a}\left[1+\frac{r}{a}\cos\delta+\frac{r^2}{2a^2}(3\cos^2\delta-1)\right]-\frac{M}{a^2}r\cos\delta+\frac{m}{r}=\text{const.}$$

Renfermant $\frac{M(1-\varphi)}{a}$ dans la constante, multipliant l'équation par $\frac{2}{M}$, et posant toujours $\frac{m}{M}=\mu$, il vient enfin

$$(1-\varphi)\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\delta-1)+\frac{2\mu}{r}-\varphi\frac{2r\cos\delta}{a^2}=C. \tag{32}$$

35. L'inégalité satisfaite par les points appartenant réellement à l'atmosphère, et qui exprime que la pesanteur est dirigée vers le noyau, s'obtient (n° 7) au moyen de la dérivée relative à r de l'équation des surfaces de niveau. C'est ici

$$(1-\varphi)\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta-1)-\frac{\mu}{r^2}-\varphi\frac{\cos\delta}{a^2}<0. \tag{33}$$

Cette même dérivée, égalée à zéro, donne l'équation de la surface limite

$$(1-\varphi)\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta-1)-\frac{\mu}{r^2}-\varphi\frac{\cos\delta}{a^2}=0. \tag{34}$$

En faisant $\varphi=0$, on retombe sur les équations déjà discutées. Celles-ci en diffèrent principalement par la présence d'un terme en $\cos\delta$; et c'est là un point important, car il en résulte que les surfaces que nous avons à étudier n'ont plus pour centre l'origine O. Mais tout est symétrique autour de la droite Oy qui va de la comète au Soleil. Il suffira donc d'examiner ce qui se passe dans un plan méridien xOy, et nous n'aurons à parler dorénavant que de *courbe* limite et de *courbes* de niveau.

Pour discuter commodément ces équations, on distinguera trois cas, suivant

que $\varphi < 1$, $\varphi = 1$ ou $\varphi > 1$, c'est-à-dire suivant que la force répulsive est inférieure, égale ou supérieure à l'attraction solaire.

36. *Premier cas*. $\varphi < 1$. — Pour abréger, j'omettrai l'examen du cas où φ est fort petit et comparable à μ. On peut admettre, comme le calcul le justifie d'ailleurs, que pour φ infiniment petit la forme des surfaces de niveau diffère très-peu de ce qu'elle est pour $\varphi = 0$ (n° **24**), et que cette forme se modifie d'une manière continue, à mesure que φ augmente. Supposons donc immédiatement φ très-supérieur au nombre μ, qui, pour toutes les comètes, est excessivement faible.

Il faut d'abord étudier la courbe limite (34). Lorsque $\varphi = 0$, cette courbe est formée de deux branches L, L (*fig*. 4) dont le centre est en O, ayant pour asymptotes les deux droites $\cos^2\vartheta = \frac{1}{3}$, et telles que

$$OA = a\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}.$$

Voyons ce qui arrive pour une valeur finie de φ plus petite que l'unité.

Les points A', A où la courbe limite (*fig*. 6) coupe actuellement l'axe Oy, s'obtiennent en faisant dans l'équation (34) $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$. Or on a

$$\text{pour } \cos\vartheta = 1, \qquad 2(1-\varphi)r^3 - \varphi a r^2 - \mu a^3 = 0;$$
$$\text{pour } \cos\vartheta = -1, \quad 2(1-\varphi)r^3 + \varphi a r^2 - \mu a^3 = 0.$$

La première équation n'a qu'une seule racine positive, dont la valeur est supérieure à $\frac{\varphi a}{2(1-\varphi)}$, mais en diffère fort peu si μ est très-petit. Cette racine est donc approximativement

$$r = \frac{\varphi a}{2(1-\varphi)} = OA';$$

c'est une quantité du même ordre que a, et par conséquent très-grande.

La seconde équation n'a aussi qu'une racine positive. Sa valeur approchée, toujours pour μ très-petit, est

$$r = a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}} = OA.$$

On obtiendrait aisément des expressions de ces racines, développées suivant les puissances de μ; mais la petitesse de la masse des comètes permet de se borner au premier terme que nous venons de donner.

De là on peut conclure que, φ augmentant, la branche L de la courbe limite se rapproche de l'axe des x ou de la comète, et que la branche L' s'en éloigne au con-

traire très-rapidement : pour une valeur finie de φ, on peut presque dire que la courbe L′ n'existe pas, tant elle est éloignée dans le sens du Soleil M, et qu'il n'y a de limite atmosphérique que du côté opposé au Soleil.

37. Je passe à la discussion des surfaces de niveau, et particulièrement de celle qui atteint en A la surface limite, et que j'appelle la surface libre. Pour avoir son équation, il suffit de prendre l'équation (32) et d'y donner à l'arbitraire C une valeur telle, qu'elle soit satisfaite par les coordonnées du point A ($\vartheta = \pi$, $r = \text{OA}$). On a d'abord, en y faisant $\cos\vartheta = -1$,

$$2(1-\varphi)r^3 + 2\varphi ar^2 + 2\mu a^3 = \text{C}a^2 r,$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{C}a^2 &= 2(1-\varphi)r^2 + 2\varphi ar + \frac{2\mu a^3}{r}\\ &= 6(1-\varphi)r^2 + 4\varphi ar,\end{aligned}$$

en ayant égard à l'équation en r que la valeur de OA doit vérifier (n° **36**). Enfin, substituant à r la valeur approchée $a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}$ de OA, on a, au même degré d'approximation,

$$\text{C}a^2 = 4a^2\sqrt{\mu\varphi};$$

et l'équation cherchée de la surface libre est

$$(35)\qquad (1-\varphi)r^3(3\cos^2\vartheta - 1) - 2\varphi ar^2\cos\vartheta + 2\mu a^3 = 4a^2 r\sqrt{\mu\varphi}.$$

Cette surface coupe l'axe des y en un autre point B (*fig.* 7), tel que

$$\cos\vartheta = 1,\quad 2(1-\varphi)r^3 - 2\varphi ar^2 - 4a^2 r\sqrt{\mu\varphi} + 2\mu a^3 = 0;$$

cette équation a deux racines positives : l'une a pour valeur approchée $\frac{\varphi a}{1-\varphi}$, elle est très-grande par conséquent, et se rapporte à une branche de courbe fort éloignée dont nous n'avons pas besoin de nous occuper. L'autre racine positive est, aux quantités près de l'ordre μ, racine de l'équation du second degré qu'on obtient en négligeant r^3; on trouve ainsi

$$\text{OB} = a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}(\sqrt{2}-1).$$

Enfin le point d'intersection avec Ox est donné par les conditions

$$\cos\vartheta = 0,\quad (1-\varphi)r^3 + 4a^2 r\sqrt{\mu\varphi} - 2\mu a^3 = 0.$$

Il n'y a ici qu'une racine positive, ayant pour valeur approchée

$$OC = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}.$$

38. Nous adopterons les notations suivantes : r_0 sera la valeur de r qui répond à $\cos\theta = 0$, r_1 celle qui répond à $\cos\theta = 1$, r_{-1} à $\cos\theta = -1$. Ces axes de la surface libre sont approximativement

$$(36) \qquad r_1 = a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}(\sqrt{2}-1), \quad r_{-1} = a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}, \quad r_0 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}.$$

Le grand axe entier D est $r_1 + r_{-1} = AB$, ou

$$(37) \qquad D = a\sqrt{\frac{2\mu}{\varphi}}.$$

On voit que D diminue à mesure que φ augmente. Seulement il faut se rappeler que les formules précédentes ne sont pas applicables lorsque φ est infiniment petit ou seulement comparable à μ (n° **36**). Cela résulte du mode de développement employé pour obtenir des valeurs approchées ; aussi ces formules ne reproduisent-elles pas, pour $\varphi = 0$, celles qui conviennent à cette hypothèse (n° **24**).

Enfin, on remarquera que $\frac{r_0 - r_1}{r_0} = 3 - 2\sqrt{2}$, ou environ $\frac{1}{6}$. C'est l'aplatissement de la courbe AB (*fig.* 7) au voisinage du point B. Il est indépendant de φ, mais seulement à ce degré d'approximation ; φ reparaîtrait dans des valeurs plus approchées.

39. Le point A où la surface libre rencontre la surface limite est un point multiple. Cette propriété, déjà remarquée dans les autres cas, se retrouve ici. La démonstration résulte d'une observation faite au n° **20**. Prenons généralement l'équation des surfaces de niveau sous la forme V = const., nous aurons

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\frac{dV}{d\theta}}{\frac{dV}{dr}}.$$

Là où ces surfaces coupent la surface limite, qui est $\frac{dV}{dr} = 0$, $\frac{dr}{d\theta}$ devient infini, c'est-à-dire que le rayon vecteur est tangent à la surface de niveau ; c'est un premier théorème. Mais si, de plus, $\frac{dV}{d\theta} = 0$, $\frac{dr}{d\theta}$ deviendra indéterminé, ou possédera plusieurs valeurs. Cela a lieu pour le point commun à la surface libre et à la surface

limite : car ce point est sur l'axe des y, et la valeur de $\frac{dV}{d\delta}$ est, d'après l'équation (32),

$$\frac{dV}{d\delta} = 3(1-\varphi)\sin 2\delta \cdot \frac{r^2}{a^2} + \varphi \sin\delta \cdot \frac{2r}{a^2},$$

laquelle s'annule pour $\delta = \pi$. La proposition est donc établie.

Pour déterminer la valeur multiple de $\frac{dr}{d\delta}$ au point A, bornons-nous au cas de μ très-petit. L'équation de la courbe (35), transformée en coordonnées rectangulaires, peut s'écrire

$$2\mu a^3 = \sqrt{x^2+y^2}\,[4a^2\sqrt{\mu\varphi} + 2\varphi a y + (1-\varphi)(x^2-2y^2)].$$

La petitesse de μ entraîne celle de x et de y par rapport à a, ce qui permet de négliger les carrés x^2 et y^2; et ce n'est même qu'à cette condition que l'équation est satisfaite par $x=0$, $y=-a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}$. Nous écrirons donc simplement

$$2\mu a^3 = \sqrt{x^2+y^2}\,[4a^2\sqrt{\mu\varphi} + 2\varphi a y]$$

Portons maintenant l'origine des coordonnées au point A, en remplaçant y par $y - a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}$, nous aurons, tout calcul fait,

$$\mu a^2 x^2 - 2\mu a^2 y^2 + 2a\sqrt{\mu\varphi}\,x^2 y + \varphi x^2 y^2 + \varphi y^4 = 0.$$

Les termes de moindre dimension, égalés à zéro, fournissent la tangente à l'origine des coordonnées; or c'est ici $x^2 - 2y^2 = 0$, ou en coordonnées polaires

$$3\cos^2\delta = 1; \quad \text{d'où} \quad \delta = 54^\circ\,44'.$$

L'angle des deux branches qui se coupent en A est $2\delta = 109^\circ$ environ, comme dans le cas de $\varphi = 0$.

40. Il existe un autre point du même genre sur l'axe Oy, là où la branche L' de la courbe limite est rencontrée par une courbe de niveau; mais cette courbe est si éloignée, d'après ce qu'on a dit au nº **37**, qu'il est inutile de s'occuper de ce qui se passe à cette distance. Les surfaces de niveau qui enveloppent la surface libre (*fig.* 7) sont donc fermées à droite, du côté du Soleil, tandis qu'elles s'ouvrent du côté opposé, en devenant tangentes aux rayons vecteurs issus du point O.

Nous ne nous arrêterons pas ici à discuter les diverses surfaces de niveau. Ce que nous avons dit suffit pour voir la transformation que l'hypothèse d'une force ré-

pulsive leur a fait subir. L'écoulement du fluide atmosphérique a lieu maintenant par l'ouverture qui se fait dans les couches de niveau extérieures à la surface libre, au voisinage du sommet A; et il doit en résulter un jet unique, origine d'une queue dirigée en sens contraire du Soleil.

41. *Second cas.* $\varphi = 1$. — L'atmosphère ne pèse plus vers le Soleil, dont l'attraction se trouve exactement contre-balancée par la force répulsive; mais comme elle pèse toujours vers le noyau, il continue à y avoir des figures d'équilibre. L'équation (32) des surfaces de niveau se réduit alors à

$$2r^2 \cos\theta + Ca^2 r - 2\mu a^2 = 0,$$

l'équation de la surface limite à

$$r^2 \cos\theta + \mu a^2 = 0,$$

et l'inégalité à laquelle doivent satisfaire les points intérieurs à l'atmosphère est

$$r^2 \cos\theta + \mu a^2 > 0.$$

Considérant ce qui a lieu dans le plan xOy, on verra que la courbe limite est formée d'une seule branche L, située à gauche de Ox et ayant cet axe pour asymptote (*fig.* 8); elle coupe l'axe Oy à la distance $OA = a\sqrt{\mu}$, c'est le point le plus voisin de l'origine O, et $\frac{dr}{d\theta}$ y est nul. L'inégalité est toujours vérifiée à droite de cette courbe L.

L'équation des surfaces de niveau étant résolue donne

$$r = \frac{-Ca^2 \pm \sqrt{C^2a^4 + 16\mu a^2 \cos\theta}}{4\cos\theta}.$$

Ne nous occupons d'abord que des courbes fermées, qui par conséquent doivent couper chaque axe. Pour que l'intersection avec Ox soit à une distance finie, il faut évidemment prendre le signe supérieur dans la dernière équation; et alors les points d'intersection avec l'axe Oy sont donnés par les conditions

$$\theta = 0, \quad r = \frac{\sqrt{C^2a^4 + 16\mu a^2} - Ca^2}{4};$$

$$\theta = \pi, \quad r = \frac{Ca^2 - \sqrt{C^2a^4 - 16\mu a^2}}{4}.$$

Cette dernière racine sera réelle si l'on a $C^2a^4 > 16\mu a^2$. Les courbes fermées répondent donc à des valeurs de C décroissantes, depuis l'infini jusqu'à

$C = \frac{4\sqrt{\mu}}{a}$; et, pour cette valeur extrême, $r = \frac{Ca^2}{4} = a\sqrt{\mu}$, qui est précisément la distance OA de la courbe limite. Il suit de là que cette valeur de la constante caractérise la surface libre; les autres surfaces fermées lui sont intérieures, et de plus en plus voisines du centre à mesure que l'on prend C plus grand.

La surface libre coupe les axes aux distances

$$r_1 = a\sqrt{\mu}(\sqrt{2}-1), \quad r_{-1} = a\sqrt{\mu}, \quad r_0 = \frac{1}{2}a\sqrt{\mu},$$

ce qui s'accorde du reste avec les formules (36), en y faisant $\varphi = 1$.

Les théorèmes démontrés au n° **39** subsistent également. Le point A est un point singulier, à partir duquel la surface se développe en nappe indéfinie. En faisant décroître C au-dessous de la valeur $\frac{4\sqrt{\mu}}{a}$ qui convient à la surface libre, on trouve des surfaces fermées du côté du Soleil, mais s'ouvrant à gauche au voisinage du sommet A, dès qu'elles viennent à rencontrer la surface limite.

C continuant à décroître jusqu'à zéro, on arrive à une courbe de niveau N (*fig.* 8),

$$r^2 \cos\vartheta = \mu a^2,$$

qui ne coupe plus Ox, tandis que les précédentes coupaient cet axe à des distances croissantes. Pour C négatif, on a des courbes analogues, mais situées de plus en plus à droite. Enfin, en prenant le signe inférieur dans l'équation résolue, on obtiendrait une autre catégorie de courbes, dont nous ne dirons rien parce qu'elles sont sans intérêt pour le problème qui nous occupe.

42. *Troisième cas.* $\varphi > 1$. — Commençons par examiner la courbe limite (34), dont la forme va se trouver modifiée. Elle coupe l'axe Ox au point où

$$\cos\vartheta = 0, \quad (1-\varphi)r^2 + \mu a^2 = 0;$$

et cette équation, qui n'avait pas de racine positive lorsque $\varphi < 1$, est maintenant satisfaite par

$$r = a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi - 1}}.$$

De plus, les directions des rayons vecteurs infinis, au lieu d'être $\cos\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, sont actuellement $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Les courbes L, L_1, L_0 de la *fig.* 9 se rapportent aux trois hypothèses $\varphi < 1$, $\varphi = 1$ et $\varphi > 1$.

Si l'on cherche l'intersection de ces courbes avec les droites $\cos\delta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, on a

$$r = a\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}};$$

cette distance diminue à mesure que φ augmente. On peut remarquer que la droite qui va de ce point d'intersection au sommet de la courbe, reste parallèle à elle-même, quel que soit φ : cela résulte de ce que $a\sqrt{\frac{\mu}{\varphi}}$ est l'ordonnée de ce sommet (n° **36**).

A ce changement de forme de la courbe limite, il en correspond un analogue pour les branches infinies des courbes de niveau; mais rien n'est changé dans la forme générale des courbes fermées. Les formules (36) et (37) s'appliquent toujours à la surface libre. Les propriétés particulières au point singulier A, et aux surfaces extérieures très-voisines de la surface libre, subsistent avec toutes leurs conséquences.

Comparaison de l'hypothèse précédente avec les observations.

43. Il résulte de cette discussion que l'hypothèse d'une force répulsive, agissant suivant le rayon vecteur du Soleil, en raison inverse du carré de la distance, modifie profondément la forme de l'atmosphère cométaire. Les couches de niveau n'ont plus de centre de figure; la surface libre se termine par un point conique, mais seulement du côté opposé au Soleil. Au delà, les surfaces de niveau, fermées du côté du Soleil, s'ouvrent à l'opposite, laissant un passage au fluide en excès (*fig.* 10). Ce jet unique pourra se décomposer en plusieurs queues ayant leur premier élément commun, s'il est formé de substances de diverse nature inégalement affectées par la force répulsive. Mais la difficulté (n° **32**) relative aux deux queues opposées a disparu.

La forme des courbes de niveau, déduite de la théorie que nous venons de développer, se retrouve dans les dessins de la comète de Donati publiés par G. Bond. On y remarque, dans la nébulosité de la comète, des couches distinctes, mais à peu près semblables, ce qui s'expliquerait en admettant que son atmosphère était composée de plusieurs matières pour chacune desquelles φ était différent. A chacune des valeurs de φ doit correspondre un système de surfaces de niveau; l'existence de plusieurs queues, chez cette comète, semble confirmer cette différence de composition.

44. Nous avons vu que le grand axe D de la surface libre de l'atmosphère est

lié par la formule (37)

$$D = a\sqrt{\frac{2\mu}{\varphi}},$$

avec la distance du Soleil, la masse de la comète, et la force répulsive φ ou plus exactement son rapport à la pesanteur solaire. Quand φ n'existe pas, on a (n° **31**), $D = a\sqrt[3]{4\mu}$, et cette relation peut servir à déterminer μ, lorsque la comète n'a pas encore de queue, et qu'elle est assez éloignée du Soleil pour rendre insensible l'action répulsive. La formule actuelle est très-différente ; si μ était connu pour une comète, elle permettrait de calculer φ, à diverses époques de son apparition.

Une autre remarque que nous ferons sur cette formule, c'est qu'elle explique la diminution de volume qu'éprouve souvent une comète en se rapprochant du Soleil. Nous avons déjà fait observer, au n° **31**, que les dimensions des couches de niveau qui s'établissent dans l'atmosphère d'une comète diminuent proportionnellement à la distance a du Soleil. La surface libre, en particulier, se contracte à mesure que l'astre approche du périhélie. Mais le fluide cométaire ne participant pas à cette contraction, une portion reste en dehors de la surface libre, et se dissipe, allant ainsi alimenter la nébulosité et la queue.

La même chose a lieu dans l'hypothèse de la force répulsive ; le décroissement est encore plus rapide, car les dimensions de la comète varient en raison inverse de $\sqrt{\varphi}$, et il est vraisemblable que l'énergie de la force répulsive φ augmente à mesure que l'action calorifique du Soleil dilate le fluide atmosphérique. Ce n'est pas une condensation que l'astre éprouve : il y a réellement perte de matière aux dépens du noyau et de l'atmosphère.

En résumé, quelle que soit la valeur qu'on suppose à la force répulsive, le calcul donne toujours pour les couches atmosphériques des figures d'équilibre, et ces figures sont analogues à celles que nous offrent les comètes ; enfin les formules déduites de l'hypothèse actuelle s'accordent avec ce que l'on sait de la constitution physique de ces astres.

Hypothèse d'un milieu interplanétaire.

45. La répulsion qui se manifeste si énergiquement dans le phénomène de la production des queues a quelquefois été attribuée, conformément à une idée de Newton, à l'action d'un milieu que la comète traverserait en marchant vers le Soleil. Si ce milieu existait, il agirait de plusieurs manières sur la comète, et d'abord par sa résistance. Il est difficile de savoir suivant quelle loi s'exerce cette résis-

tance, dans des conditions si différentes de celles que l'on a pu observer à la surface de la Terre; mais il semble qu'elle ne saurait produire l'effet que nous cherchons à expliquer, savoir l'absence de la queue dirigée vers le Soleil.

Cette résistance agit principalement en sens inverse du mouvement : on conçoit donc que, lorsque l'astre s'avance en droite ligne vers le Soleil, elle puisse refouler en arrière les particules lancées suivant cette direction, et annuler la queue qui tendrait à se former dans ce sens. Mais si l'on prend la comète à son périhélie, quand son orbite est sensiblement circulaire, les deux queues indiquées par la théorie étant l'une et l'autre à peu près perpendiculaires à la direction du mouvement, il n'y a pas de raison pour que la résistance du milieu empêche l'une de se produire plutôt que l'autre, et l'on devrait alors voir apparaître le jet qui tend à sortir de la partie voisine du Soleil. Or on peut citer bien des comètes chez lesquelles rien de pareil ne s'est manifesté aux environs du périhélie. Enfin, quand la comète s'éloigne du Soleil, elle est en quelque sorte précédée par sa queue, et c'est le contraire qui devrait arriver.

Le milieu n'agit donc pas par sa résistance dans le phénomène des queues, et il semble même que cette résistance est insensible. Pourrait-il agir par sa pesanteur? On remarquera d'abord qu'il n'est pas question ici de l'éther impondérable qui transmet les vibrations lumineuses, mais d'un milieu matériel plus ou moins comparable à l'air atmosphérique très-dilaté. Dans les idées de Newton, ce milieu constitue autour du Soleil une véritable atmosphère, dont les couches successives, pesant vers le Soleil, pressent les unes sur les autres. On ne comprend pas qu'une telle atmosphère puisse s'étendre jusqu'aux régions où les phénomènes cométaires commencent à se manifester. Admettons toutefois qu'elle existe; il faudra distinguer deux cas. Si ce milieu ne pénètre pas la masse cométaire, il la comprime; et en même temps il diminue sa pesanteur vers le Soleil, ce qui doit influer sur le mouvement de la comète, mais non pas sensiblement sur sa forme. Il en sera tout autrement si le milieu pénètre la comète elle-même, de manière à envelopper chaque particule : le poids de ces particules, tant vers le Soleil que vers le noyau, sera diminué du poids du fluide déplacé, et la figure des surfaces de niveau se trouvera modifiée. C'est à ce dernier point de vue que nous allons étudier l'action d'un milieu interplanétaire sur la comète; et cela sans nous occuper des objections que l'on peut faire, soit à l'existence de ce milieu, soit aux propriétés physiques que nous lui accordons hypothétiquement.

46. Supposons la comete et son atmosphère en mouvement dans un milieu très-rare et très-peu résistant, mais soumis à la gravitation, et dont l'effet sur un corps qui le traverse se réduirait à en diminuer le poids d'une quantité égale à celui du fluide déplacé. Le poids d'une molécule atmosphérique vers la comète, son poids

vers le Soleil, celui de la comète elle-même vers le Soleil sont donc altérés ; mais pour ce dernier la correction est négligeable, parce que le noyau conserve toujours une grande densité relativement à celle du milieu. Au contraire, pour les particules très-légères qui s'échappent de la comète sous l'influence de la chaleur du Soleil, l'effet peut être considérable, et aller même jusqu'à produire une répulsion apparente.

Nous nous contenterons, comme nous l'avons fait pour l'hypothèse de la force répulsive, d'examiner le cas d'une comète sans rotation qui marche en ligne droite vers le Soleil. L'équation des surfaces de niveau est alors (n° **34**).

$$\frac{M}{s} - \frac{M}{a^2} y + \frac{m}{r} = \text{const.}$$

Or si l'on désigne par ρ le rapport de la densité du milieu à la densité des molécules qui constituent la couche atmosphérique considérée, on voit de suite que l'influence du milieu introduira dans l'équation précédente les deux termes

$$-\frac{M\rho}{s} \quad \text{et} \quad -\frac{m\rho}{r};$$

c'est-à-dire que l'on aura

$$(1-\rho)\frac{M}{s} - \frac{M}{a^2} y + (1-\rho)\frac{m}{r} = \text{const.}$$

Remplaçant $\frac{1}{s}$ par son développement (n° **4**), et y par $r \cos \delta$, on trouve, aux quantités près de l'ordre $\frac{r^3}{a^3}$,

$$\frac{M(1-\rho)}{a}\left[1 + \frac{r}{a}\cos\delta + \frac{r^2}{2a^2}(3\cos^2\delta - 1)\right] - \frac{M}{a^2} r\cos\delta + (1-\rho)\frac{m}{r} = \text{const.};$$

ou enfin, réductions faites,

(38) $$(1-\rho)\frac{r^2}{a^2}(3\cos^2\delta - 1) + (1-\rho)\frac{2\mu}{r} - \rho\frac{2r\cos\delta}{a^2} = C.$$

Telle est, dans l'hypothèse du milieu, l'équation générale des surfaces de niveau.

L'inégalité qui caractérise les points pesant vers le noyau est

(39) $$(1-\rho)\frac{r}{a^3}(3\cos^2\delta - 1) - (1-\rho)\frac{\mu}{r^2} - \rho\frac{\cos\delta}{a^2} < 0;$$

et l'équation de la surface limite

$$(40) \qquad (1-\rho)\frac{r}{a^2}(3\cos^2\delta - 1) - (1-\rho)\frac{\mu}{r^2} - \rho\frac{\cos\delta}{a^2} = 0.$$

Ici encore nous distinguerons trois cas, savoir $\rho < 1$, $\rho = 1$ et $\rho > 1$. Et comme μ est toujours excessivement petit chez les comètes, nous supposerons ρ assez grand par rapport à μ.

47. *Premier cas*. $\rho < 1$. — Le milieu est moins dense que les particules qui composent la couche atmosphérique. Occupons-nous d'abord de la surface limite, ou simplement de sa section méridienne par le plan xOy. Cette courbe, dont l'équation peut s'écrire

$$(41) \qquad (1-\rho)r^3(3\cos^2\delta - 1) - \rho a r^2\cos\delta - (1-\rho)\mu a^3 = 0,$$

coupe l'axe Oy aux points où l'on a

$$\cos\delta = 1, \qquad 2(1-\rho)r^3 - \rho a r^2 - (1-\rho)\mu a^3 = 0;$$
$$\cos\delta = -1, \qquad 2(1-\rho)r^3 + \rho a r^2 - (1-\rho)\mu a^3 = 0.$$

Chacune de ces équations n'a qu'une racine positive. Les valeurs approchées de ces racines sont, pour la première équation,

$$r = \frac{\rho a}{2(1-\rho)},$$

et pour la seconde

$$r_{-1} = a\sqrt{\frac{\mu(1-\rho)}{\rho}} = OA,$$

μ étant supposé très-petit.

Il suit de là que, des deux branches qui forment la courbe, l'une L' (*fig*. 6) s'éloigne de plus en plus à mesure que ρ augmente, l'autre L s'approche au contraire de Ox; et c'est la seule dont il y ait à s'occuper, la première étant fort éloignée lorsque ρ a une valeur finie.

L'inégalité (39) est satisfaite pour $r = 0$, et généralement pour les points situés à droite de la branche L; c'est seulement de ce côté que l'atmosphère peut exister tant que $\rho < 1$.

48. Quant aux surfaces de niveau, leur équation générale est

$$(1-\rho)r^3(3\cos^2\delta - 1) - 2\rho a r^2\cos\delta + 2\mu a^3(1-\rho) = Ca^2r.$$

Elles coupent la partie négative de l'axe Oy aux points pour lesquels

$$\cos\delta = -1, \quad 2(1-\rho)r^3 + 2\rho a r^2 - Ca^2 r + 2\mu a^3(1-\rho) = 0;$$

cette équation peut avoir deux racines positives si C est positif; elle n'en a pas lorsque C est négatif. En exprimant qu'elle est satisfaite par l'ordonnée $r_{-1} = OA$ du sommet de la surface limite, on trouvera la valeur de C qui caractérise la surface libre.

On tire de la dernière équation

$$\begin{aligned} Ca^2 &= 2(1-\rho)r^2 + 2\rho a r + \frac{2\mu a^3(1-\rho)}{r} \\ &= 6(1-\rho)r^2 + 4\rho a r, \end{aligned}$$

en ayant égard à l'équation en r qui détermine OA (n° **47**). Substituant enfin à r sa valeur approchée $a\sqrt{\frac{\mu(1-\rho)}{\rho}}$, on a, au degré d'approximation qui consiste à traiter μ comme très-petit,

$$Ca^2 = 4a^2\sqrt{\mu\rho(1-\rho)};$$

et l'équation de la surface libre est

$$(1-\rho)r^3(3\cos^2\delta - 1) - 2\rho a r^2\cos\delta + 2\mu a^3(1-\rho) = 4a^2 r\sqrt{\mu\rho(1-\rho)}.$$

L'autre point d'intersection de la surface libre avec Oy est donné par la condition

$$\cos\delta = 1, \quad 2(1-\rho)r^3 - 2\rho a r^2 - 4a^2 r\sqrt{\mu\rho(1-\rho)} + 2\mu a^3(1-\rho) = 0.$$

On y satisfait approximativement en négligeant r^3 qui est d'ordre supérieur en μ, ce qui réduit l'équation au second degré; et l'on trouve

$$r_1 = a\sqrt{\frac{\mu(1-\rho)}{\rho}}(\sqrt{2} - 1).$$

Il y a une autre racine positive, mais elle est très-grande, et ne convient pas à la question. Le grand axe D de la surface libre a pour valeur

$$D = a\sqrt{\frac{2\mu(1-\rho)}{\rho}}.$$

Enfin l'intersection avec l'axe Ox a lieu pour

$$\cos\delta = 0, \quad (1-\rho)r^3 + 4a^2 r\sqrt{\mu\rho(1-\rho)} - 2\mu a^3(1-\rho) = 0;$$

d'où approximativement

$$r_0 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu(1-\rho)}{\rho}}.$$

On remarquera que les valeurs précédentes de r_{-1}, r_1, r_0 ne diffèrent de celles relatives à la force répulsive (n° **38**) que par le changement de φ en $\frac{\rho}{1-\rho}$, de sorte que, ρ variant de 0 à 1, c'est comme si φ variait de 0 à ∞. Bien que l'assimilation ne soit pas absolue, on peut regarder la *fig.* 7 comme représentant, dans le cas actuel, la forme de la surface libre et celle d'une surface de niveau très-voisine.

Un calcul analogue à celui du n° **39** vérifierait l'existence en A d'un point conique, à partir duquel la portion fermée de la surface libre se transforme en une nappe infinie, et par où doit s'écouler, à l'opposite du Soleil, le fluide atmosphérique en excès.

49. *Second cas*. $\rho = 1$. — Les particules atmosphériques ont la même densité que le milieu interplanétaire. La courbe limite se réduit à l'axe Ox. L'inégalité (39) devient $\cos\delta > 0$, ou $y > 0$: ce n'est donc qu'à droite de Ox qu'elle est satisfaite. Et en effet, on voit directement que les particules ne pèsent alors ni vers la comète, ni vers le Soleil, mais elles ont un mouvement relatif dans le sens des y négatifs, provenant de ce que la comète tombe vers le Soleil. Les surfaces d'équilibre (38) se réduisent à des plans parallèles $r\cos\delta = C$, ou $y = C$, perpendiculaires à l'axe Oy. Il n'y a plus de surfaces de niveau fermées, donc pas d'équilibre possible.

50. *Troisième cas*. $\rho > 1$. — Les particules atmosphériques étant plus légères que le milieu, il est évident qu'elles vont être repoussées par le Soleil et la comète, et que l'équilibre est absolument impossible. La considération des formules conduit au même résultat. Et d'abord il est aisé de voir sur l'équation (38) que l'hypothèse de $1-\rho$ négatif a pour effet de retourner en quelque sorte la courbe limite et les courbes de niveau, comme si le Soleil M, d'abord à droite sur l'axe des y, venait à passer à gauche (*fig.* 11).

L'équation (41) de la courbe limite donne

$$\text{pour } \cos\delta = 1, \quad 2(\rho-1)r^3 + \rho a r^2 - (\rho-1)\mu a^3 = 0;$$
$$\text{pour } \cos\delta = -1, \quad 2(\rho-1)r^3 - \rho a r^2 - (\rho-1)\mu a^3 = 0.$$

Ces équations sont satisfaites approximativement, la première par

$$r_1 = a\sqrt{\frac{\mu(\rho-1)}{\rho}} = \text{OA},$$

la seconde par

$$r = \frac{\rho a}{2(\rho - 1)}.$$

D'où l'on voit que la branche L', située à gauche, est fort éloignée. La branche de droite L rencontre l'axe Oy à la distance $OA = r_1$, et elle coupe les droites asymptotiques $\cos^2 \delta = \frac{1}{3}$.

51. L'inégalité (39) n'est plus satisfaite à l'origine O, ni généralement à gauche de la branche L. C'est donc seulement à droite qu'une molécule pèse vers O; il était facile de le prévoir, les actions de O et de M sur la molécule étant actuellement des répulsions. Or c'est au contraire à gauche qu'il existe des surfaces fermées satisfaisant à l'équation générale (38) de l'équilibre.

En cherchant, en effet, celle de ces surfaces qui passe par le point A, et que nous appelons la surface libre, on trouve qu'elle coupe les axes aux distances

$$r_1 = a\sqrt{\frac{\mu(\rho-1)}{\rho}}, \quad r_{-1} = a\sqrt{\frac{\mu(\rho-1)}{\rho}}(\sqrt{2}-1), \quad r_0 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu(\rho-1)}{\rho}}.$$

Elle présente d'ailleurs les mêmes particularités que celles que nous avons étudiées tout à l'heure, relativement au point multiple A et à la forme des surfaces extérieures qui viennent s'ouvrir au voisinage de ce point.

Mais les surfaces fermées qui enveloppent le point O ne peuvent convenir à l'équilibre des couches atmosphériques, puisque la pression y est dirigée de dedans en dehors; et l'on ne saurait, dans ce cas, avoir autour du noyau une atmosphère permanente.

Conclusions.

52. Dans l'hypothèse d'un milieu agissant par sa pesanteur, comme l'admettait Newton, et tant qu'on ne suppose pas le fluide atmosphérique plus léger que le milieu lui-même, on trouve pour les surfaces de niveau des figures analogues à celles qui résultent de l'hypothèse d'une force répulsive. L'absence de queue dirigée vers le Soleil, la contraction qu'éprouvent certaines comètes en approchant du périhélie, et la forme générale des couches cométaires s'expliquent donc également dans les deux hypothèses. Mais cet accord disparaît, on va le voir, devant un examen plus complet des effets du milieu interplanétaire.

Les couches voisines du noyau doivent naturellement être les plus denses. Elles vont en se raréfiant à mesure qu'elles s'éloignent; enfin elles doivent devenir aussi légères et même plus légères que ce milieu : car si l'on n'admet pas une force répulsive, pour comprendre l'extension si rapide des queues, il faut bien attribuer

aux particules qui les composent une densité moindre que celle du milieu ambiant, afin qu'il en résulte une répulsion apparente. On devrait donc observer, dans la nébulosité qui environne les comètes, ce passage à une densité inférieure à celle du milieu, passage qui serait accusé par une modification radicale dans la forme des surfaces d'équilibre, et finalement par leur disparition complète. Or, dans la comète de Donati, par exemple, aussi loin qu'on pouvait distinguer de la matière du côté du Soleil, cette matière affectait une forme plus ou moins régulière, mais toujours convexe vers le Soleil. Les couches de niveau, dans les dessins dont nous avons parlé, se montrent nettement sous forme d'enveloppes; elles se soudent aux branches de la queue du côté opposé au Soleil, sans qu'on aperçoive de solution de continuité. Enfin on n'y voit rien qui rappelle les plans parallèles en lesquels dégénèrent les surfaces de niveau, pour $\rho = 1$, au moment où l'équilibre va devenir impossible.

Nous conclurons de là que l'hypothèse du milieu n'explique pas d'une manière satisfaisante les apparences cométaires, soit qu'on le considère comme résistant, ou bien comme pesant. On trouverait contre cette hypothèse des objections plus sérieuses, ainsi que nous l'avons fait pressentir au n° 45, si on voulait la discuter en elle-même. Mais tel n'est pas ici notre but.

Il nous suffit d'avoir montré que la seule force de l'attraction ne rend pas compte des formes qu'affecte la nébulosité des comètes, ni du mouvement des particules matérielles qui s'en échappent et vont former la queue. Une autre force doit se joindre à la gravité pour produire ces phénomènes.

Si l'on admet une répulsion s'exerçant suivant le rayon vecteur du Soleil en raison inverse du carré de la distance, et n'ayant d'effet sensible que sur la matière réduite à un état d'extrême raréfaction, on obtient pour les comètes des figures théoriques ressemblant aux formes réellement observées; on voit apparaître en quelque sorte le germe de la queue dans la partie de l'atmosphère la plus éloignée du Soleil, et l'on s'explique l'énorme développement que peut prendre cette émission du fluide cométaire, au voisinage du périhélie. L'existence d'une action répulsive qui contre-balance l'attraction du Soleil sur ce fluide nous semble donc indiquée par l'étude analytique de la figure des atmosphères des comètes.

POST-SCRIPTUM.

Le présent volume était imprimé, avec le Mémoire relatif au mouvement de Mercure (p. 1-195), Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 12 septembre 1859, et dans lequel nous avons établi la nécessité d'admettre l'existence d'une ou de plusieurs planètes entre Mercure et le Soleil, lorsque nous avons reçu d'Orgères une Lettre relative à l'observation du passage d'une planète sur le Soleil. Nous reproduisons l'article des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* dans lequel nous avons inséré ce document.

Extrait du *Compte rendu* de la séance de l'Académie des Sciences du 2 janvier 1860.

Passage d'une planète sur le disque du Soleil, observé à Orgères (Eure-et-Loir), par M. Lescarbault; *Lettre à* M. Le Verrier.

Orgères, le 22 décembre 1860.

« Pénétré d'admiration pour les immortels géomètres qui découvrent, à l'aide des principes de l'analyse, la route mystérieuse des mondes, j'ai, dès mon enfance, été poussé à m'occuper avec passion de l'étude des grands phénomènes célestes.

Ayant remarqué, dès 1837, que la loi de Bode est loin de représenter exactement les rapports des distances des planètes au Soleil, je m'imaginai qu'indépendamment des quatre petites planètes Cérès, Pallas, Junon, Vesta, découvertes de 1801 à 1807 par Piazzi, Olbers, Harding, dans le grand espace compris entre Mars et Jupiter, il pourrait peut-être bien s'en rencontrer ailleurs. Alors il m'était fort difficile de faire des recherches à ce sujet; et, sans y renoncer, je me résignai à attendre.

Le passage de Mercure sur le Soleil, que je vis le 8 mai 1845, me fournit l'idée que, s'il existait entre le Soleil et nous quelque autre corps que Mercure et Vénus, ce corps devait avoir aussi ses passages devant l'astre radieux et qu'en observant fréquemment les bords du Soleil, on devait, à un certain instant, être témoin de l'apparence d'un point noir empiétant sur le Soleil pour en parcourir une corde dans un temps plus ou moins long.

A cette époque il me fut plus impossible que jamais de réaliser mes projets d'observations. Je ne m'en occupai qu'à partir de 1853 dans des conditions encore peu favorables; et jusqu'en 1858 je n'appliquai que rarement l'œil à la lunette. A dater de cette même année 1858, j'eus une terrasse à ma disposition. Je me fabriquai provisoirement une espèce d'instrument, peu délicat, à la vérité, mais

susceptible de donner, à un degré près, un angle de position. Des mesures prises sur des taches de la Lune et rapportées à une carte de notre satellite par Jean-Dominique Cassini, m'ont permis de compter sur cette approximation.

Nature et disposition de mon instrument.

1°. Une lunette portant un objectif de 10 centimètres d'ouverture, de $1^m,46$ de longueur focale et fabriqué par Cauche en 1838; munie, lors de l'observation du 26 mars 1859, d'un oculaire qui donne un grossissement de 150 fois environ.

2°. Un chercheur grossissant six fois.

3°. La lunette est montée sur un simple pied en bois, qui permet deux mouvements dans des plans réciproquement perpendiculaires : l'un horizontal, l'autre vertical. Les pointes, qui terminent inférieurement chacune des trois branches du pied, reposent sur un châssis également à trois divisions, avec des vis à caler à leurs extrémités pour pouvoir niveler le plateau qui porte l'axe du mouvement dans le plan horizontal.

4°. Au foyer de l'oculaire de la lunette sont deux fils croisés rectangulairement. La même disposition a lieu au foyer de l'oculaire du chercheur, qui, de plus, porte parallèlement au fil vertical, et de chaque côté de lui, un fil à une distance telle, qu'elle sous-tend à l'œil de l'observateur un angle de 16 à 17 minutes, ce qui fait un intervalle de 32 à 34 minutes entre les deux fils placés de chaque côté du fil vertical du milieu. Deux autres fils occupent des positions analogues de part et d'autre du fil situé horizontalement au milieu du champ.

Un disque de carton de 14 centimètres de diamètre, concentrique avec le tuyau de l'oculaire du chercheur et mobile autour de lui, est divisé en demi-degrés à sa circonférence.

5°. L'encoignure d'un bâtiment, dont la verticalité a été préalablement vérifiée ou corrigée, ou bien un fil à plomb placé à distance dans la campagne, servent à régler la position des fils des deux oculaires, en faisant tourner sur eux-mêmes les tuyaux qui les renferment. Le chercheur est d'ailleurs disposé, comme à l'ordinaire, de manière qu'une étoile vue à l'intersection des fils de la lunette soit aperçue en même temps à l'intersection des fils du chercheur.

6°. A ma proximité, j'ai un support facile à changer de place (un pied de graphomètre, par exemple). Il porte, en travers, une tringle sur laquelle glisse une plaque percée d'un trou et une tige qui se prolonge obliquement en avant et en haut, à 25 ou 30 centimètres de la plaque trouée.

7°. Un petit à-plomb à fil très-fin.

Pour me servir de cet appareil.

1°. Je commence par mettre le plateau de la lunette de niveau;

2°. Je place verticalement l'un des fils de la lunette et l'un des fils du chercheur;

3°. J'approche du chercheur le support de la plaque, de façon que l'extrémité

de la tige soit proche de l'oculaire de cette petite lunette ; je regarde par le trou de la plaque et, tenant le fil à plomb entre le pouce et l'index, la main appuyée sur l'extrémité antérieure de la tige, je fais tourner le disque divisé jusqu'à ce que son diamètre initial soit dans la verticale ;

4°. Si quelque objet se présente au bord du Soleil, vu dans la lunette, je le mets au point d'entre-croisement des fils de celle-ci ; et, comme son champ est trop restreint pour permettre d'y voir l'astre radieux dans son entier, je reporte vivement l'œil à l'oculaire du chercheur et je fais rapidement mouvoir le cercle divisé jusqu'à ce que deux des fils parallèles soient tangents aux bords du Soleil, ou bien les dépassent ou les laissent empiéter d'une même quantité. Il ne s'agit plus que de rapporter le support avec sa plaque trouée et le fil à plomb. A l'aide de ce dernier, il est facile de savoir sur les divisions du disque de carton la distance angulaire du point observé à l'un des quatre points qui occupent les extrémités, soit du diamètre vertical, soit du diamètre horizontal du Soleil, et de faire la correction dans le cas de l'excentricité du sommet de l'angle à mesurer.

Chaque fois que j'espérais du loisir pour l'après-midi, avant d'aller terminer mes visites, je réglais ma montre sur le passage du centre du Soleil par le méridien, à l'aide d'une petite lunette méridienne, et je disposais mes autres moyens d'observation, comme je viens de le dire. A mon retour, je faisais parcourir, presque sans relâche, à ma lunette, pendant un temps qui variait entre une demi-heure et trois heures, tout le contour du Soleil, tenant l'œil appliqué à l'oculaire.

Enfin, le 26 mars 1859, j'eus le bonheur de trouver ce qui suit :

(L'espoir de revoir le petit astre, dont je vais parler, m'a fait différer jusqu'ici pour en donner connaissance ; je ne crois pas devoir attendre plus longtemps.)

Je n'ai corrigé les résultats suivants ni des effets de la réfraction, qui pouvaient être négligés dans chaque observation partielle, ni de l'erreur due au déplacement de notre globe dans son orbite ; car cette dernière rectification n'aurait pas apporté une amélioration bien notable à des valeurs provenant de mesures imparfaites.

Mesurées sur la carte de France du Dépôt de la Guerre, la latitude et la longitude de la station, à Orgères, sont :

Latitude boréale	48°. 8'.55"
Complément de la latitude	41.51. 5
Longitude à l'ouest du méridien de l'Observatoire de Paris.	$0^h\ 2^m 35^s$

Le 26 mars 1859.

Temps moyen, à midi vrai, à Orgères	$0^h.\ 5^m.53^s,05$ du soir.
Temps sidéral, à midi moyen, à Orgères	0.13.35,47 du soir.
Temps vrai, à midi moyen, à Orgères	11.54. 6,87 du matin.

La planète paraît comme un point noir d'un périmètre circulaire bien arrêté. Son diamètre angulaire, vu de la Terre, est très-petit; je l'estime bien inférieur au quart de celui que j'ai vu à Mercure, avec le même grossissement appliqué à ma lunette, lors de son passage devant le Soleil, le 8 mai 1845.

Entrée, à 57° 22′ 30″, à l'occident de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du Soleil, à :

	h m s
Temps vrai, à Orgères................	3.59.46 du soir.
Temps solaire moyen d'Orgères........	4. 5.36
Temps sidéral........................	4.19.52
Temps solaire moyen de Paris.........	4. 8.11

L'erreur possible est de 1 à 5 secondes moyennes, qu'il faudrait ajouter.

Sortie, à 85° 45′ 0″, à l'occident de l'extrémité inférieure du diamètre vertical du Soleil, à :

	h m s
Temps vrai, à Orgères................	5.16.55 du soir.
Temps solaire moyen d'Orgères........	5.22.44
Temps sidéral........................	5.37.14
Temps solaire moyen de Paris.........	5.25.18

L'erreur possible est de 1 à 3 secondes moyennes, qu'il faudrait retrancher.

Au moment de la moindre distance de la planète au centre du Soleil :

	h m s
Temps vrai, à Orgères................	4.38.20 du soir.
Temps solaire moyen d'Orgères........	4.44.11
Temps sidéral........................	4.58.33
Temps solaire moyen de Paris.........	4.46.45

Durée du passage :

	h m s
En temps solaire moyen..............	1.17. 9
En temps sidéral....................	1.17.22

Moindre distance au centre du Soleil = 0° 15′ 22″,3.

Angle sous lequel est vue de la Terre la ligne parcourue devant le Soleil, entre les instants de l'entrée et de la sortie = 9′ 13″,6.

Le temps sidéral nécessaire pour parcourir le diamètre entier du Soleil eût été de $4^h 29^m 9^s$.

J'ai la conviction que, quelque jour, on reverra passer devant le Soleil un point noir parfaitement rond, très-petit, parcourant une ligne située dans un plan dont l'inclinaison à l'écliptique sera comprise entre $5° + \frac{1}{3}$ et $7° + \frac{1}{3}$; que l'orbite contenue dans ce plan coupera le plan de l'orbe terrestre vers 183 degrés, en passant du sud au nord; qu'à moins d'une excentricité énorme de l'orbite décrite par ce point noir autour de l'astre qui nous éclaire, il sera susceptible d'être vu, par nous, parcourir le diamètre solaire en $4^h 30^m$ environ.

Ce point noir sera, avec un grand degré de probabilité, la planète dont j'ai suivi la marche le 26 mars 1859, et il deviendra possible de calculer tous les éléments de son orbite.

Je suis fondé à croire que sa distance au Soleil est inférieure à celle de Mercure, et que ce corps est la planète ou l'une des planètes dont vous, Monsieur le Directeur, avez, il y a quelques mois, fait connaître l'existence dans le ciel, au voisinage du globe solaire, par cette merveilleuse puissance de vos calculs qui, en 1846, vous fit aussi reconnaître les conditions d'existence de Neptune, en fixer la place aux confins de notre monde planétaire et en tracer la route à travers les profondeurs de l'espace. »

Après cette communication, M. Le Verrier présente les remarques suivantes :

La Lettre qui précède lui est parvenue par l'entremise de M. Vallée, inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées.

Les détails compris dans ce document permettaient de lui accorder dès l'abord une certaine confiance. On pouvait être surpris toutefois que M. Lescarbault, se trouvant en possession d'un fait aussi considérable, fût demeuré neuf mois sans en donner connaissance. Cette considération m'a déterminé à me rendre sur-le-champ à Orgères, où M. Vallée fils, ingénieur des Ponts et Chaussées, a bien voulu m'accompagner, et où nous sommes arrivés le samedi 31 decembre sans avoir été annoncés.

Nous avons trouvé en M. Lescarbault un homme adonné depuis longtemps à l'étude de la science, entouré d'instruments, d'appareils de toute nature, construisant lui-même et ayant fait édifier une petite coupole tournante. M. Lescarbault a bien voulu nous permettre d'examiner dans le plus scrupuleux détail les instruments dont il s'est servi, et il nous a donné les explications les plus minutieuses sur ses travaux et en particulier sur toutes les circonstances du passage d'une planète sur le Soleil.

L'entrée elle-même n'a point été observée par lui ; la planète avait déjà parcouru quelques secondes sur le disque du Soleil au moment où M. Lescarbault l'a aperçue, et c'est en tenant compte de la vitesse qu'il lui a reconnue qu'il a jugé du moment de l'entrée.

Les angles de position relativement à la verticale ont été mesurés à l'entrée et à la sortie par le procédé décrit par M. Lescarbault ; c'est en rapportant ensuite ces observations sur une sphère céleste, qu'il est parvenu à déterminer la longueur de la corde parcourue par la planète et à en conclure le temps que l'astre eût mis à traverser le disque entier du Soleil.

Les explications de M. Lescarbault, la simplicité avec laquelle il nous les a don-

nées ont porté dans notre esprit l'entière conviction que l'observation détaillée qu'il a faite doit être admise dans la science, et que le long délai qu'il a mis à la publier provient uniquement d'une réserve modeste et du calme qu'on peut encore conserver loin de l'agitation des villes. Un article du journal le *Cosmos*, relatif au travail que nous avons donné sur Mercure, a seul déterminé M. Lescarbault à rompre le silence.

En soumettant au calcul les données fournies par l'observation, nous avons trouvé que la corde parcourue par la planète sur le Soleil est de $9' 17''$; et qu'à ce compte elle eût mis $4^h 26^m 48^s$ à traverser le disque entier. Ces nombres diffèrent très-peu de ceux donnés par M. Lescarbault. Ce résultat prouve que cet observateur a mis un grand soin dans les déductions graphiques tirées de ses observations, et l'on doit dès lors espérer que les observations elles-mêmes jouissent d'une certaine exactitude, malgré l'imperfection des moyens dont l'observateur disposait.

La durée du passage ne peut nous faire connaître la distance de la planète au Soleil qu'en admettant que l'orbite soit circulaire. Dans cette hypothèse, on trouve que le demi grand axe est égal à 0,1427, le demi grand axe de l'orbite terrestre étant pris pour unité. On en conclut que la durée de la révolution est de $19^j,7$.

Les angles de position donnés par M. Lescarbault permettent encore de calculer les longitudes et les latitudes géocentriques à l'entrée et à la sortie. On en conclut, en admettant la distance au Soleil déterminée plus haut, les longitudes et les latitudes héliocentriques, ce qui permet de fixer l'inclinaison de l'orbite à 12° et la longitude du nœud ascendant à 13°.

Suivant l'auteur, qui a observé le passage de Mercure sur le Soleil en 1845, le diamètre offert alors par cette planète était certainement quadruple du diamètre apparent de la planète observée le 26 mars 1859. En considérant les masses comme proportionnelles aux volumes, on en conclurait que la masse de cette dernière planète ne serait que le dix-septième de la masse de Mercure : masse beaucoup trop petite, à la distance où elle est placée, pour produire la totalité de l'anomalie constatée dans le mouvement du périhélie de Mercure.

Le nouvel astre, en raison du faible rayon de son orbite, ne s'éloignerait jamais à une distance de plus de 8 degrés du Soleil. Et la lumière totale qu'il nous renvoie étant plus faible que celle de Mercure, on peut comprendre qu'on ne l'ait point aperçu jusqu'ici.

Mais l'orbite peut, comme celle de Mercure, être fort excentrique : et, dans ce cas, les résultats différeraient beaucoup de ceux auxquels on parvient en admettant une orbite circulaire.

FIN DU TOME CINQUIÈME.

RECTIFICATIONS.

Tome II, page 32, valeurs de $\mathcal{A}'$, *au lieu de :* $-a\left(\frac{dM}{da}+M\right)$, *lisez :* $-\left(a\frac{dM}{da}+M\right)$.

Tome II, page 188, ligne 20, *au lieu de :* $\sin(\theta'-\theta)$, *lisez :* $\sin(r'-r)$.

Tome IV, page 12,

au lieu de : $\delta a'' = 0'',266 + 0'',983\,\nu + 11'',406\,\nu' - 0'',270\,\nu'' - 9'',173\,\nu^{iv} - 0'',431\,\nu^{v} - 0'',008\,\nu^{vi}$,

lisez : $\delta a'' = 0'',266 + 0'',104\,\nu + 1'',210\,\nu' - 0'',029\,\nu'' - 0'',973\,\nu^{iv} - 0'',046\,\nu^{v} - 0'',001\,\nu^{vi}$.

Tome IV, page 151, Argument 167° 40′, Variation séculaire, *au lieu de :* − 4,59 *lisez :* − 3,59.

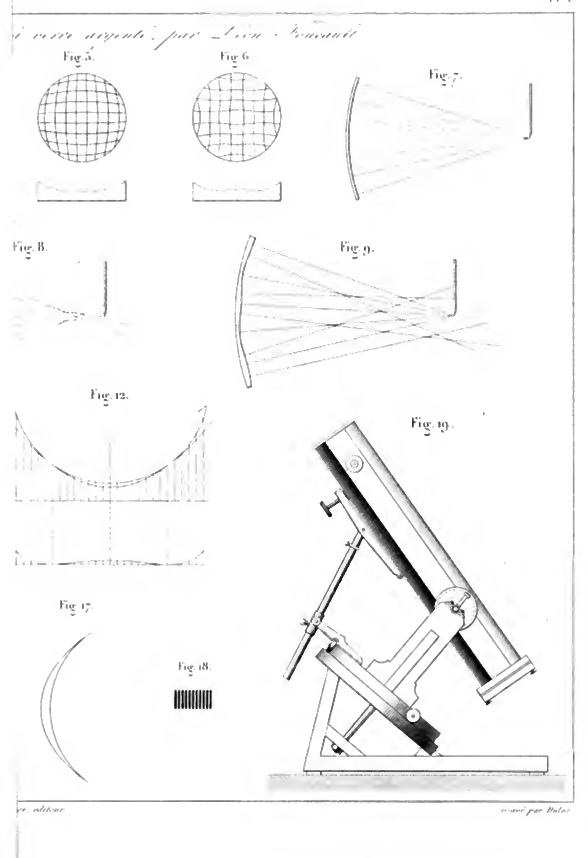
Tome IV, page 162, Table auxiliaire, années 1835 et 1840, *au lieu de :* − 0,24 et − 0,04 *lisez :* − 1,24 et − 1,04.

Tome IV, page 166, Argument 3900, *au lieu de :* − 0″,50, *lisez :* − 0″,59.

Tome V, page 8, Argument $\mathcal{A} = -l' + 2\lambda - \omega$, colonne L, *au lieu de :* − 0″,010, *lisez :* + 0″,022.

Tome V, page 19, ligne 3 en remontant, *au lieu de :* 0,985, *lisez :* 0,895.

Tome V, page 187, Argument $= -l' + 2\lambda - \omega$, colonne $\mathcal{A}_1$, *au lieu de :* − 0″,016, *lisez :* + 0″,016.


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 12.
Fig. 19.
Fig. 17.
Fig. 18.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 02457 0908






UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 02457 0908

